Комбинаторный способ счёта одноклеточных карт и созвездий

Е. А. ВАСИЛЬЕВА, Ж. ШЕФФЕР
Политехническая школа, Франция
e-mail: katya@lix.polytechnique.fr

УДК 519.115

Ключевые слова: перечисление, факторизация, карты, перестановки.

Аннотация

Работа посвящена биективному перечислению множества факторизаций перестановки в произведение m множителей, содержащих заданное количество циклов. Ранее эта основополагающая проблема комбинаторики и её различные частные случаи рассматривались главным образом с точки зрения теории характеров или алгебраической геометрии (отметим в этом контексте работы Дж. Харера и Д. Цагира или М. Концевича). В 1988 году Д. М. Джексон вывел очень обобщённую формулу, разрешающую проблему факторизации. Однако, по признанию самого автора, этот результат практически не оставляет пространства для комбинаторной интерпретации и его биективного доказательства не найдено. В 2001 году Б. Ласс привёл комбинаторное доказательство знаменитого частного случая формулы Джексона, известного как формула Харера—Цагира. Работу в этом направлении продолжили И. П. Гульден и А. Ника, опубликовавшие в 2004 году другое комбинаторное доказательство того же результата, основанное на прямой биекции. Мы ввели в рассмотрение новый класс объектов — распределённые карты и распределённые кактусы, — перечисление которых позволило нам найти биективные доказательства более общих случаев формулы Джексона.

Abstract

E. A. Vassilieva, G. Schaeffer, A combinatorial way of counting unicellular maps and constellations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 25—52.

Our work is devoted to the bijective enumeration of the set of factorizations of a permutation into m factors with a given number of cycles. Previously, this major problem in combinatorics and its various specializations were mainly considered from character theoretic or algebraic geometry point of view. Let us specially mention here the works of Harer and Zagier or Kontsevich. In 1988, Jackson reported a very general formula solving this problem. However, to the author's own admission this result left little room for combinatorial interpretation and no bijective proof of it was known yet. In 2001, Lass found a combinatorial proof of the celebrated special case of Jackson's formula known as Harer—Zagier formula. This work was followed by Goulden and Nica, who presented in 2004 another combinatorial proof involving a direct bijection. In the past two years, we have introduced new sets of objects called partitioned maps and partitioned cacti, the enumeration of which allowed us to construct bijective proofs for more general cases of Jackson's formula.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 25—52.
© 2011/2012 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

1. Введение

Мы доказываем биективным способом, что числа $B(m,n,N)$, представляющие собой количества всевозможных факторизаций длинного цикла γ_N в произведение двух перестановок с m и n циклами, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{m,n\geqslant 1} B(m,n,N)y^m z^n = N! \sum_{p,q\geqslant 1} \binom{N-1}{p-1,q-1}\binom{y}{p}\binom{z}{q} \tag{1.1}$$

или, в более общем случае, числа $M(n_1,n_2,n_3,N)$, представляющие собой количества всевозможных факторизаций длинного цикла в произведение трёх перестановок с n_1, n_2, n_3 циклами, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{n_1,n_2,n_3\geqslant 1} \frac{M(n_1,n_2,n_3,N)}{N!^2} x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3} = \sum_{p_1,p_2,p_3\geqslant 1} \binom{x_1}{p_1}\binom{x_2}{p_2}\binom{x_3}{p_3} \times$$
$$\times \binom{N-1}{p_3-1} \sum_{a\geqslant 0} \binom{N-p_2}{p_1-1-a}\binom{N-p_3}{a}\binom{N-1-a}{N-p_2}. \tag{1.2}$$

Отправной точкой для вывода наших результатов служит интерпретация факторизаций длинного цикла в терминах карт. Картой называется 2-клеточное разложение ориентированной поверхности на конечное число вершин (0-клеток), рёбер (1-клеток) и граней (2-клеток), гомеоморфных открытым дискам. В случае факторизации в произведение двух перестановок мы фокусируемся на одноклеточных двухцветных картах, т. е. на картах с одной гранью и вершинами чёрного и белого цвета, таких что каждое ребро соединяет чёрную и белую вершину. Следующий раздел, взятый из статьи [10], посвящён их перечислению и приводит к результату (1.1). Факторизации длинного цикла в произведение трёх перестановок рассматриваются как 3-кактусы, т. е. карты с некоторым количеством чёрных граней и одной белой гранью, такие что никакие чёрные грани друг с другом не соприкасаются. Их перечислению посвящена последний раздел, взятый из [11].

2. Перечисление одноклеточных двухцветных карт

На протяжении этого раздела мы будем использовать следующие обозначения. Обозначим $\mathrm{BT}(p,q)$ множество упорядоченных двухцветных (чёрно-белых) деревьев с p белыми и q чёрными вершинами. Мы предполагаем, что все деревья из этого множества имеют белый корень. Мощность множества $\mathrm{BT}(p,q)$ (см., например, [3]) определяется соотношением

$$|\mathrm{BT}(p,q)| = \frac{p+q-1}{pq}\binom{p+q-2}{p-1}^2.$$

Обозначим $\mathrm{PP}(X,Y,A)$ множество частичных перестановок из подмножества X мощности A в произвольное подмножество Y (той же мощности). Мощность

множества частичных перестановок задаётся формулой

$$|\mathrm{PP}(X,Y,A)| = \binom{|X|}{A}\binom{|Y|}{A}A!.$$

Для упрощения обозначений в последующем изложении, если X или Y равно $[M]$ (все целые числа от 1 до M), то будем писать M вместо $[M]$. Обратимся теперь к нашему основному результату.

Теорема 2.1. *Числа $B(m,n,N)$, обозначающие количества одноклеточных двухцветных карт с m белыми вершинами, n чёрными вершинами и N рёбрами, удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{m,n\geqslant 1} B(m,n,N)y^m z^n = N! \sum_{p,q\geqslant 1} \binom{N-1}{p-1,q-1}\binom{y}{p}\binom{z}{q}. \tag{2.1}$$

В следующем подразделе мы изложим биективное доказательство этой формулы. С этой целью мы введём новый класс объектов: *одноклеточные распределённые двухцветные карты*.

2.1. Одноклеточные распределённые двухцветные карты

2.1.1. Определение

Пусть $C_{N,p,q}$ — множество троек (π_1,π_2,α), таких что π_1 и π_2 — разбиения $[N]$ на p и q блоков, α — перестановка на $[N]$, обладающая следующими свойствами:

— каждый блок π_1 есть объединение циклов перестановки α;
— каждый блок π_2 есть объединение циклов перестановки $\beta = \alpha^{-1}\gamma$, где $\gamma = (1\,2\,\ldots\,N)$.

2.1.2. Геометрическая интерпретация

Множество $C_{N,p,q}$ можно рассматривать как множество одноклеточных распределённых двухцветных карт. Тройка (π_1,π_2,α) соответствует одноклеточной двухцветной карте с N рёбрами, в которой

— циклы перестановки α описывают белые вершины карты;
— циклы перестановки $\beta = \alpha^{-1}\gamma$ описывают чёрные вершины карты;
— π_1 — разбиение множества белых вершин на p подмножеств;
— π_2 — разбиение множества чёрных вершин на q подмножеств.

Пример 2.2. На рис. 1 изображена тройка $(\pi_1,\pi_2,\alpha) \in C_{9,3,2}$, где

$$\alpha = (1)(24)(3)(57)(6)(89), \quad \beta = (1479)(23)(56)(8),$$
$$\pi_1 = \{\pi_1^{(1)},\pi_1^{(2)},\pi_1^{(3)}\}, \quad \pi_2 = \{\pi_2^{(1)},\pi_2^{(2)}\},$$

$$\pi_1^{(1)} = \{2,4,6\}, \quad \pi_1^{(2)} = \{8,9\}, \quad \pi_1^{(3)} = \{1,3,5,7\},$$
$$\pi_2^{(1)} = \{2,3,5,6\}, \quad \pi_2^{(2)} = \{1,4,7,8,9\}$$

(нумерация блоков здесь произвольная). Для более простой визуализации предположим, что каждому блоку приписана какая-то определённая форма: $\pi_1^{(1)}$ — квадрат, $\pi_1^{(2)}$ — круг, $\pi_1^{(3)}$ — треугольник, $\pi_2^{(1)}$ — ромб и $\pi_2^{(2)}$ — пятиугольник. Поэтому каждая вершина нашей распределённой карты имеет форму, соответствующую блоку, которому она принадлежит.

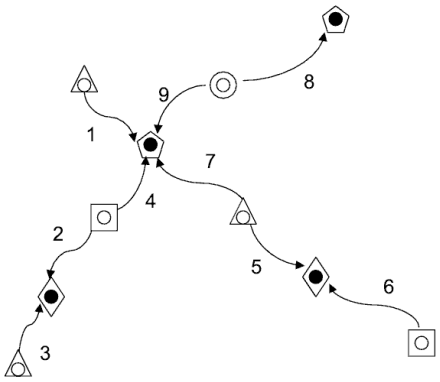

Рис. 1. Пример распределённой двухцветной карты

2.1.3. Связь с одноклеточными двухцветными картами

Пусть $c_{N,p,q} = |C_{N,p,q}|$. Используя числа Стирлинга второго рода $S(a,b)$, дающие количество разбиений множества из a элементов на b непустых неупорядоченных подмножеств, получаем, что

$$c_{N,p,q} = \sum_{m \geqslant p,\ n \geqslant q} S(m,p)S(n,q)B(m,n,N).$$

Тогда, поскольку

$$\sum_{b=1}^{a} S(a,b)(x)_b = x^a$$

(см., например, [12]), где

$$(x)_b = \prod_{i=0}^{b-1}(x-i),$$

имеем, что

$$\sum_{m,n\geqslant 1} B(m,n,N)y^m z^n = \sum_{p,q\geqslant 1} c_{N,p,q}(y)_p(z)_q. \tag{2.2}$$

2.2. Биективное описание одноклеточных распределённых двухцветных карт

2.2.1. Комбинаторная интерпретация основной формулы

Скомбинировав соотношения (2.1) и (2.2), получим, что

$$c_{N,p,q} = \frac{N!}{p!\,q!}\binom{N-1}{p-1,q-1}.$$

Выполнив теперь некоторые преобразования последней формулы, придём к соотношению

$$c_{N,p,q} = \left[\frac{p+q-1}{pq}\binom{p+q-2}{p-1}^2\right] \times \\ \times \left[\binom{N}{N+1-(p+q)}\binom{N-1}{N+1-(p+q)}\big(N+1-(p+q)\big)!\right].$$

В результате получим, что

$$|C_{N,p,q}| = |\mathrm{BT}(p,q)| \times \big|\mathrm{PP}\big(N,N-1,N+1-(p+q)\big)\big|.$$

Для того чтобы доказать результат (1.1), нам нужно показать, что количество одноклеточных распределённых двухцветных карт с N рёбрами, p блоками белых вершин и q блоками чёрных равно количеству двухцветных деревьев с p белыми вершинами и q чёрными вершинами (с белым корнем), умноженному на количество частичных подстановок из любого подмножества $[N]$, содержащего $N+1-(p+q)$ элементов в любое подмножество $[N-1]$ (содержащее $N+1-(p+q)$ элементов). Для этого мы собираемся использовать биекцию между соответствующими множествами.

2.2.2. Построение биекции

В этом подразделе мы строим биективное отображение, которое каждой тройке $(\pi_1,\pi_2,\alpha) \in C_{N,p,q}$ ставит в соответствие упорядоченное двухцветное дерево из $\mathrm{BT}(p,q)$ и частичную перестановку из $\mathrm{PP}\big(N,N-1,N+1-(p+q)\big)$.

Упорядоченное двухцветное дерево. Пусть $\pi_1^{(1)},\dots,\pi_1^{(p)}$ и $\pi_2^{(1)},\dots,\pi_2^{(q)}$ — блоки разбиений π_1 и π_2 соответственно. Обозначим через $m_1^{(i)}$ максимальный элемент блока $\pi_1^{(i)}$ $(1\leqslant i\leqslant p)$ и через $m_2^{(j)}$ максимальный элемент блока $\pi_2^{(j)}$ $(1\leqslant j\leqslant q)$. Припишем индекс p блоку разбиения π_1, содержащему элемент 1. Предположим на данном этапе, что индексация всех остальных блоков произвольна и не подчиняется никаким дополнительным ограничениям.

Создадим размеченное упорядоченное двухцветное дерево T на множестве из p белых и q чёрных вершин, такое что белые (чёрные) вершины имеют чёрных (соответственно белых) потомков. Корнем T является белая вершина p. Для любого $j = 1, \ldots, q$ будем считать, что чёрная вершина j является потомком белой вершины i, если элемент $\beta\big(m_2^{(j)}\big)$ принадлежит белому блоку $\pi_1^{(i)}$. Аналогично для любого $i = 1, \ldots, p-1$ белая вершина i является потомком чёрной вершины j, если элемент $m_1^{(i)}$ принадлежит чёрному блоку $\pi_2^{(j)}$. Если обе чёрные вершины j, k являются потомками белой вершины i, то j левее k, когда $\beta\big(m_2^{(j)}\big) < \beta\big(m_2^{(k)}\big)$; если обе белые вершины i, l являются потомками чёрной вершины j, то i левее l, когда $\beta^{-1}\big(m_1^{(i)}\big) < \beta^{-1}\big(m_1^{(l)}\big)$. Можно показать, что описанная конструкция позволяет указать единственный путь, ведущий от любой вершины i к корню, и значит, дерево T корректно определено.

Сняв метки с дерева T, получим двухцветное упорядоченное дерево t.

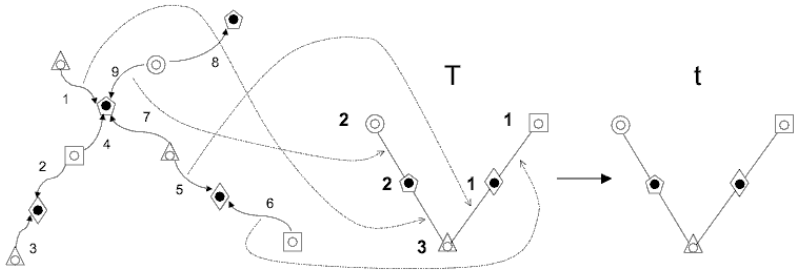

Рис. 2. Построение упорядоченного двухцветного дерева

Пример 2.3. Вернёмся к примеру 2.2. Мы можем сохранить нумерацию блоков, поскольку условие $1 \in \pi_1^{(p)}$ выполняется. В нашем примере

$$\beta\big(m_2^{(1)}\big) = \beta(6) = 5 \in \pi_1^{(3)}, \quad \beta\big(m_2^{(2)}\big) = \beta(9) = 1 \in \pi_1^{(3)},$$

поэтому как чёрный ромб 1, так и чёрный пятиугольник 2 являются потомками белого треугольника 3. Более того, поскольку $\beta\big(m_2^{(1)}\big) < \beta\big(m_2^{(2)}\big)$, вершина 2 находится левее вершины 1. Далее, $m_1^{(1)} = 6 \in \pi_2^{(1)}$, $m_1^{(2)} = 9 \in \pi_2^{(2)}$, и следовательно, белый круг 1 является потомком чёрного пятиугольника 1, тогда как белый квадрат 2 является потомком чёрного ромба 2. Таким образом, вначале мы строим дерево T и затем, сняв метки, получаем дерево t (см. рис. 2).

Частичная перестановка. Построение частичной перестановки включает два основных этапа.

1. *Перенумеровывающие перестановки*. Рассмотрим *реверсивно-размеченное* двухцветное дерево t', полученное перенумерацией вершин дерева t, основанной на двух независимых для белых и чёрных вершин процедурах реверсив-

ной разметки. Корню присваивается метка p, белые вершины уровня 2 нумеруются справа налево начиная с метки $p-1$, после чего нумеруются справа налево белые вершины уровня 4 и всех последующих чётных уровней вплоть до достижения самой левой белой вершины с меткой 1 на верхнем чётном уровне. Чёрные вершины на уровне 1 нумеруются справа налево начиная с метки q, после чего нумеруются справа налево чёрные вершины всех последующих нечётных уровней вплоть до достижения самой левой чёрной вершины с меткой 1 на верхнем нечётном уровне. Деревья T и t' представляют две, возможно различные, нумерации t. Предположим, что (чёрная или белая) вершина t имеет метку i в T и метку j в t'. Тогда зададим $\pi_1^j = \pi_1^{(i)}$ для белой вершины и $\pi_2^j = \pi_2^{(i)}$ для чёрной. Продолжим описанную перенумерацию всех белых и всех чёрных вершин. Получим новую индексацию $\pi_1^1, \ldots, \pi_1^p$ белых блоков разбиения π_1 и новую индексацию $\pi_2^1, \ldots, \pi_2^q$ чёрных блоков разбиения π_2. Легко убедиться, что $\pi_1^p = \pi_1^{(p)}$. Пусть ω^i и υ^j — строки, полученные в результате записи элементов π_1^i и π_2^j в порядке возрастания. Обозначим $\omega = \omega^1 \ldots \omega^p$ и $\upsilon = \upsilon^1 \ldots \upsilon^q$ конкатенации $\omega^1, \ldots, \omega^p$ и $\upsilon^1, \ldots, \upsilon^q$ соответственно. Зададим $\lambda \in \mathrm{S}_N$, положив ω первой строкой и $[N]$ — второй строкой λ в двустрочной записи λ. Аналогично определим $\nu \in \mathrm{S}_N$, положив υ первой строкой и $[N]$ — второй строкой ν в двустрочной записи ν.

Пример 2.4. Продолжим наш пример 2.3 и построим перенумерующие перестановки λ и ν. На рис. 3 дерево T изображено рядом с реверсивно-размеченным деревом t', что позволяет проиллюстрировать естественным образом перенумерацию блоков:

$$\pi_1^1 = \pi_1^{(2)}, \quad \pi_1^2 = \pi_1^{(1)}, \quad \pi_1^3 = \pi_1^{(3)},$$
$$\pi_2^1 = \pi_2^{(2)}, \quad \pi_2^2 = \pi_2^{(1)}.$$

Строки ω^i и υ^j задаются следующим образом:

$$\omega^1 = 89, \quad \omega^2 = 246, \quad \omega^3 = 1357,$$
$$\upsilon^1 = 14789, \quad \upsilon^2 = 2356.$$

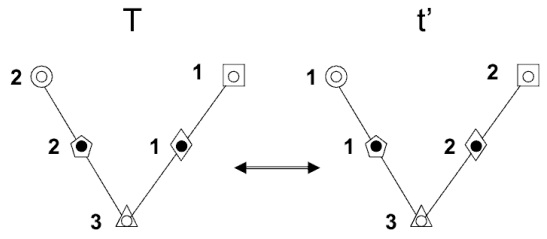

Рис. 3. Перенумерация блоков

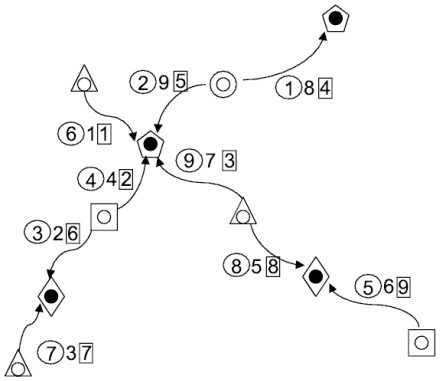

Рис. 4. Перенумерация распределённой двухцветной карты

Построим перенумеровывающие перестановки λ и ν:

$$\lambda = \left(\begin{array}{cc|cccc|cccc} 8 & 9 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right), \quad \nu = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 4 & 7 & 8 & 9 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}\right).$$

На рис. 4 изображены эти две новые нумерации для нашего примера.

2. *Частичная перестановка*. Теперь мы рассмотрим частичную перестановку, которая содержит информацию о связи λ и ν и о структуре распределённой двухцветной карты. Пусть S — подмножество $[N]$, содержащее все рёбра карты, которые не были использованы для построения двухцветного дерева:

$$S = [N] \setminus \{m_1^1, m_1^2, \ldots, m_1^{p-1}, \beta(m_2^1), \ldots, \beta(m_2^q)\}.$$

Зададим частичную перестановку σ на множестве $[N]$ как композицию ранее описанных перестановок, применённую к множеству S, перенумерованному λ:

$$\sigma = \nu \circ \beta^{-1} \circ \lambda^{-1}|_{\lambda(S)}. \tag{2.3}$$

В леммах 2.6 и 2.7 мы покажем, что σ — биекция между двумя подмножествами из $N + 1 - (p + q)$ элементов и что образ σ является подмножеством $[N - 1]$.

Пример 2.5. В нашем предыдущем примере множество S равно

$$S = \{2, 3, 4, 7, 8\}.$$

Частичная перестановка σ задаётся следующим образом:

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right).$$

Множество вершин, не задействованных при построении дерева, и их связь с картой посредством σ показаны на рис. 5.

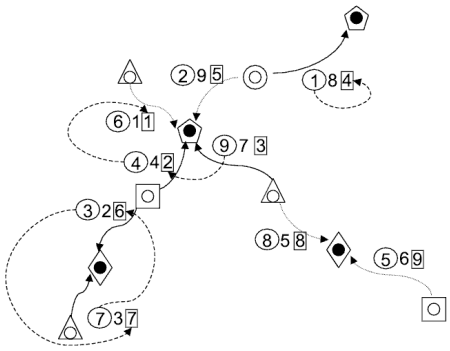

Рис. 5. Связь между перенумеровывающими перестановками λ и ν посредством σ

Лемма 2.6. *Мощность заданного выше множества S удовлетворяет соотношению $|S| = N + 1 - (p + q)$.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение леммы, мы покажем, что верно эквивалентное ему утверждение

$$\{m_1^1, m_1^2, \ldots, m_1^{p-1}\} \cap \{\beta(m_2^1), \ldots, \beta(m_2^q)\} = \varnothing.$$

Предположим, что существуют такие i, j, $i = 1, \ldots, p-1$, $j = 1, \ldots, q$, что

$$\beta(m_2^j) = m_1^i. \tag{2.4}$$

Тогда, поскольку блоки π_2 стабильны при действии β, мы заключаем, что $m_1^i \in \pi_2^j$ и $m_1^i \leqslant m_2^j$. Поскольку блоки π_1 стабильны при действии α, из предположения (2.4) также следует, что $\alpha\beta(m_2^j) = \gamma(m_2^j) \in \pi_1^i$. Следовательно, $\gamma(m_2^j) \leqslant m_1^i$. Комбинируя оба неравенства, имеем, что $\gamma(m_2^j) \leqslant m_2^j$, что возможно, только если $m_2^j = N$. В таком случае $\gamma(m_2^j) = 1$ и $1 \in \pi_1^i$, т. е. $i = p$, и мы приходим к противоречию. □

Лемма 2.7. *Элемент N не принадлежит образу перестановки σ.*

Доказательство. Заметим, что по построению перенумеровывающей перестановки ν имеем, что $N = \nu(m_2^q)$. Кроме того,

$$\nu(m_2^q) = \nu \circ \beta^{-1} \circ \lambda^{-1}\Big(\lambda\big(\beta(m_2^q)\big)\Big).$$

Таким образом, поскольку $\lambda\big(\beta(m_2^q)\big)$ не принадлежит $\lambda(S)$, элемент N не принадлежит образу перестановки σ. □

Биективное отображение. Обозначим через $\Theta_{N,p,q}$ отображение, заданное следующим образом:

$$\Theta_{N,p,q}\colon C_{N,p,q} \to \mathrm{BT}(p,q) \times \mathrm{PP}\big(N, N-1, N+1-(p+q)\big), \quad (\pi_1, \pi_2, \alpha) \mapsto (t, \sigma).$$

В следующем подразделе мы покажем, что отображение $\Theta_{N,p,q}$ в действительности является биекцией.

2.3. Доказательство биективности

2.3.1. Инъективность

Пусть (t, σ) — образ некоторой тройки $(\pi_1, \pi_2, \alpha) \in C_{N,p,q}$ при отображении $\Theta_{N,p,q}$. Покажем конструктивным образом, что (π_1, π_2, α) определяется по (t, σ) единственным образом.

Вначале, используя дерево t и числа, недостающие в каждой из двух строк σ, найдём количество элементов в каждом блоке и продолжим σ на всё множество $[N]$. По построению перестановки σ видно, что в первой строке $\lambda(S)$ отсутствуют следующие элементы:

$$\lambda(m_1^1), \ldots,\ \lambda(m_1^{p-1}),\ \lambda\big(\beta(m_2^1)\big), \ldots,\ \big(\lambda(\beta(m_2^q)\big).$$

Далее, если в реверсивно-размеченном дереве t' чёрная вершина j является потомком белой вершины i, то $\beta(m_2^j) \in \pi_1^i$ для всех $j = 1, \ldots, q$. Благодаря этому свойству нам точно известно, как элементы $\beta(m_2^1), \ldots, \beta(m_2^q)$ распределяются среди белых блоков. Более того, по определению λ любой элемент $\lambda(\pi_1^i)$ строго меньше любого элемента $\lambda(\pi_1^j)$ для $i < j$. Таким образом, для того чтобы восстановить точный порядок на элементах, недостающих в первой строке перестановки σ, нам остаётся восстановить порядок на недостающих элементах из одного и того же блока $\lambda(\pi_1^i)$, не являющихся максимальными (если таковые имеются). Эти элементы соответствуют множеству потомков белой вершины i в дереве t'. Поскольку по определению для двух потомков одной вершины i чёрная вершина j_1 левее чёрной вершины j_2 тогда и только тогда, когда $\beta(m_2^{j_1}) \leqslant \beta(m_2^{j_2})$, и сужение λ на любой блок π_1 — возрастающая функция, порядок на них естественным образом индуцирован порядком (слева направо) на множестве потомков i в реверсивно-размеченном дереве t'.

Рассмотрим множество $\nu \circ \beta^{-1}(S)$ во второй строке σ. Недостающими являются элементы

$$\nu(m_2^1), \ldots,\ \nu(m_2^q),\ \nu(\beta)^{-1}(m_1^1), \ldots,\ \nu(\beta)^{-1}(m_1^{p-1}).$$

Чтобы упорядочить эти элементы, мы так же, как и для первой строки σ, используем структуру t', связь между ν и t' и тот факт, что $\nu(\beta)^{-1}(m_1^{i_1}) \leqslant \nu(\beta)^{-1}(m_1^{i_2})$, если i_1 и i_2 являются потомками одной и той же чёрной вершины и при этом i_1 находится левее, чем i_2. Как только порядок на обоих подмножествах недостающих элементов установлен, недостающие целые числа могут быть определены единственным образом по этим элементам. Следовательно, продолжение

$\bar\sigma = \nu \circ \beta^{-1} \circ \lambda^{-1}$ частичной перестановки σ на всё множество $[N]$ задаётся единственным образом, поскольку

$$\bar\sigma\big(\lambda(m_1^i)\big) = \nu\big(\beta^{-1}(m_1^i)\big) \quad \text{для любого} \quad i \in [p-1],$$
$$\bar\sigma\Big(\lambda\big(\beta(m_2^j)\big)\Big) = \nu(m_2^j) \quad \text{для любого} \quad j \in [q].$$

Зная $\lambda(m_1^1), \dots, \lambda(m_1^{p-1})$ и $\nu(m_2^1), \dots, \nu(m_2^q)$, мы можем установить точное количество элементов в каждом блоке разбиений $\lambda(\pi_1) = \lambda(\pi_1^1), \dots, \lambda(\pi_1^p)$ и $\nu(\pi_2) = \nu(\pi_2^1), \dots, \nu(\pi_2^q)$. Действительно, блоками этих разбиений являются интервалы

$$\begin{aligned}
&\lambda(\pi_1^1) = [\lambda(m_1^1)],\\
&\lambda(\pi_1^i) = [\lambda(m_1^i)] \setminus [\lambda(m_1^{i-1})] \quad \text{при} \quad 2 \leqslant i \leqslant p-1,\\
&\lambda(\pi_1^p) = [N] \setminus [\nu(m_1^{p-1})],\\
&\nu(\pi_2^1) = [\nu(m_1^1)],\\
&\nu(\pi_2^i) = [\nu(m_1^i)] \setminus [\nu(m_1^{i-1})] \quad \text{при} \quad 2 \leqslant i \leqslant q.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda(\pi_1)$ и $\nu(\pi_2)$ единственным образом определяются по (t, σ). Кроме того, поскольку множество π_2 стабильно при действии β, мы можем использовать $\bar\sigma$, чтобы восстановить $\lambda(\pi_2)$. Действительно,

$$\bar\sigma^{-1}\big(\nu(\pi_2)\big) = \lambda \circ \beta \circ \nu^{-1}\big(\nu(\pi_2)\big), \quad \bar\sigma^{-1}\big(\nu(\pi_2)\big) = \lambda \circ \beta(\pi_2), \quad \bar\sigma^{-1}\big(\nu(\pi_2)\big) = \lambda(\pi_2). \tag{2.5}$$

Тогда, поскольку $\bar\sigma$ и $\nu(\pi_2)$ определены единственным образом, $\lambda(\pi_2)$ тоже определяется единственным образом.

Пример 2.8. Проиллюстрируем первые шаги доказательства инъективности. Предположим, что заданы параметры $N = 10$, $p = 3$, $q = 2$, частичная перестановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

и двухцветное упорядоченное дерево, изображённое на рис. 6.

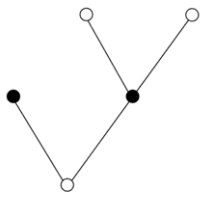

Рис. 6. Двухцветное дерево

Рассмотрим множество $\lambda(S)$ в первой строке σ. Предполагая, что дерево реверсивно размечено, мы можем определить недостающие элементы в $\lambda(S)$:

$$\lambda(m_1^1),\ \lambda(m_1^2),\ \lambda\big(\beta(m_2^1)\big),\ \lambda\big(\beta(m_2^2)\big).$$

Целые числа, дополняющие $\lambda(S)$ до $\lambda([N])$, — это 1, 2, 7, 9. Согласно всем предыдущим замечаниям мы можем записать следующее:

$$\lambda(m_1^1)=1,\quad \lambda(m_1^2)=2,\quad \lambda\big(\beta(m_2^1)\big)=7,\quad \lambda\big(\beta(m_2^2)\big)=9.$$

Рассмотрим множество $(\nu\circ\beta)^{-1}(S)$ во второй строке σ. Недостающие элементы — это

$$\nu(m_2^1),\ \nu(m_2^2),\ \nu(\beta)^{-1}(m_1^1),\ \nu(\beta)^{-1}(m_2^2).$$

Имеем, что

$$\nu(m_2^1)=2,\quad \nu(\beta)^{-1}(m_1^1)=3,\quad \nu(\beta)^{-1}(m_2^2)=9,\quad \nu(m_2^2)=10.$$

Теперь мы можем продолжить σ до перестановки $\bar\sigma$ на множестве $[N]$:

$$\bar\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\5&9&4&6&3&1&2&8&10&7\end{pmatrix}.$$

Заметим, что, поскольку $\lambda(m_1^1)=1$, $\lambda(m_1^2)=2$, $\nu(m_2^1)=2$, $\nu(m_2^2)=10$, мы можем определить образы белых блоков под действием λ и образы чёрных блоков под действием ν:

$$\lambda(\pi_1^1)=\{1\},\quad \lambda(\pi_1^2)=\{2\},\quad \lambda(\pi_1^3)=\{3,4,5,6,7,8,9,10\},$$
$$\nu(\pi_2^1)=\{1,2\},\quad \nu(\pi_2^2)=\{3,4,5,6,7,8,9,10\}.$$

Используя (2.5), получим перенумерацию разбиения π_2:

$$\begin{aligned}\lambda(\pi_2^1)&=\{6,7\},\\ \lambda(\pi_2^2)&=\{1,2,3,4,5,8,9,10\}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Покажем, что λ и ν также определяются единственным образом. Поскольку $1\in\pi_1^p$ и λ является возрастающей функцией на каждом блоке π_1, $\lambda(1)$ является минимальным элементом $\lambda(\pi_1^p)$. Тогда пусть $\lambda(\pi_2^k)$ — такой блок $\lambda(\pi_2)$, что $\lambda_1\in\lambda(\pi_2^k)$. Поскольку ν является возрастающей функцией на каждом блоке π_2, заключаем, что $\nu(1)$ — минимальный элемент $\nu(\pi_2^k)$.

Предположим, что для данного i из $[N-1]$ мы уже определили $\lambda(1),\dots,\lambda(i)$ и $\nu(1),\dots,\nu(i)$. Поскольку π_1 стабильно при действии α, заключаем, что $\beta(i)$ и $i+1=\gamma(i)=\alpha\circ\beta(i)$ принадлежат одному и тому же блоку π_1. Следовательно, $\lambda(i+1)$ и $\lambda\big(\beta(i)\big)$ принадлежат одному и тому же блоку $\lambda(\pi_1)$. Однако

$$\lambda\big(\beta(i)\big)=\lambda\circ\beta\circ\nu^{-1}\big(\nu(i)\big)=\bar\sigma^{-1}\big(\nu(i)\big).$$

Следовательно, $\lambda(i+1)$ и $\bar\sigma^{-1}\big(\nu(i)\big)$ принадлежат одному и тому же блоку $\lambda(\pi_1)$. Наконец, поскольку λ является возрастающей функцией на каждом из блоков π_1, $\lambda(i+1)$ является минимальным элементом блока $\lambda(\pi_1)$, содержащего $\bar\sigma^{-1}\big(\nu(i)\big)$, который ещё не был использован при определении $\lambda(1),\dots,\lambda(i)$.

Обозначим через $\lambda(\pi_2^l)$ блок $\lambda(\pi_2)$, содержащий $\lambda(i+1)$. Поскольку ν является возрастающей функцией на каждом блоке π_2, $\nu(i+1)$ определяется единственным образом как минимальный элемент блока $\nu(\pi_2^l)$, который ещё не был использован при определении $\nu(1),\dots,\nu(i)$. Повторяя описанную выше процедуру для всех целых чисел из $[N-1]$, мы можем убедиться в том, что λ и ν определяются единственным образом.

Чтобы завершить доказательство, заметим, что

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \lambda^{-1}\big(\lambda(\pi_1)\big),\\ \pi_2 &= \nu^{-1}\big(\nu(\pi_2)\big),\\ \alpha &= \gamma\circ\beta^{-1} = \gamma\circ\nu^{-1}\circ\bar\sigma\circ\lambda.\end{aligned}$$

В результате самое большее одна тройка (π_1,π_2,α) может быть ассоциирована с (t,σ) с помощью $\Theta_{N,p,q}$. Более того, если такая тройка существует, её можно найти, используя описание $\Theta_{N,p,q}^{-1}$ из доказательства, приведённого выше.

Пример 2.9. Применим нашу итеративную процедуру реконструкции λ и ν к предыдущему примеру. Мы будем использовать таблицу с тремя строками и N колонками для того, чтобы на каждом этапе реконструкции резюмировать известную информацию о λ и ν: первая строка совпадает с $[N]$ и представляет собой изначальную нумерацию γ рёбер распределённой карты, вторая и третья строки представляют собой перенумерацию тех же рёбер посредством λ и ν. Мы инициализируем процедуру, положив $3=\min\big(\lambda(\pi_1^3)\big)$ на первой позиции строки, соответствующей λ:

γ:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ:	3	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
ν:	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

.

Теперь из уравнений (2.6) мы получаем, что элемент 3 принадлежит второму чёрному блоку $\lambda(\pi_2^2)$. Поскольку наименьший элемент $\nu(\pi_2^2)$ равен 3, записываем 3 на первое место в третьей строке нашей таблицы:

γ:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ:	3	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
ν:	3	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

.

Определим следующий белый блок в нашей распределённой карте. Для этого применим $\bar\sigma^{-1}$ к только что найденному элементу $\nu(1)$:

$$\bar\sigma^{-1}\big(\nu(1)\big)=\bar\sigma^{-1}(3)=5.$$

Таким образом, $\bar\sigma^{-1}\big(\nu(1)\big)$ принадлежит π_1^3. Следовательно, $\lambda(2)$ является наименьшим из ранее не встречавшихся элементов $\lambda(\pi_1^3)$, т. е. 4. Записываем 4 на второе место в строке, соответствующей λ:

γ:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ:	3	4	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
ν:	3	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$

.

Будем повторять описанную процедуру, пока λ и ν не будут полностью восстановлены:

$$\begin{array}{lcccccccccc} \gamma\colon & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \lambda\colon & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 2 \\ \nu\colon & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}.$$

Как только нам известны λ и ν, можно считать, что распределённая карта восстановлена:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \big\{\{4\}\,\{10\}\,\{1,2,3,5,6,7,8,9\}\big\},\\ \pi_2 &= \big\{\{5,6\}\,\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\big\},\\ \alpha &= (1\,3\,2\,5\,6\,7\,9\,8)\,(4)\,(10). \end{aligned}$$

Двухцветная карта, соответствующая полученной перестановке, — это одноклеточная карта второго рода, изображённая на рис. 7.

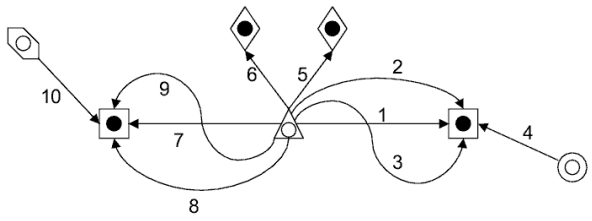

Рис. 7. Реконструированная распределённая двухцветная карта

2.3.2. Сюръективность

Покажем, что отображение $\Theta_{N,p,q}$ — сюръекция. Очевидно, что, кроме восстановления λ и ν, первые шаги описанной в предыдущем подразделе процедуры можно применить к любой паре (t,σ) из $\mathrm{BT}(p,q)\times\mathrm{PP}\big(N,N-1,N-1-(p+q)\big)$. А именно, мы можем задать продолжение $\bar\sigma$ перестановки σ на всё множество $[N]$ и разбиения $\lambda(\pi_1)$, $\lambda(\pi_2)$ и $\nu(\pi_2)$. Затем мы используем лемму 2.10, чтобы показать, что процесс восстановления λ и ν также успешно завершается.

Лемма 2.10. *Пусть* (t,σ) *— произвольная пара из* $\mathrm{BT}(p,q)\times\mathrm{PP}\big(N,N-1,N-1-(p+q)\big)$. *Тогда итеративная процедура для восстановления* λ *и* ν *всегда может быть проведена и в каждом случае приводит к корректному результату.*

Доказательство. Отметим, что только две причины могут помешать завершению процедуры: либо для данного i из $[N-1]$ оказывается, что $\bar\sigma^{-1}\big(\nu(i)\big)$

принадлежит блоку $\lambda(\pi_1)$, все элементы которого уже были ранее использованы для построения $\lambda(1), \ldots, \lambda(i)$, и поэтому мы не можем задать $\lambda(i+1)$, либо $\lambda(i+1)$ принадлежит такому блоку $\lambda(\pi_2)$, что соответствующий блок $\nu(\pi_2)$ содержит только уже использованные для построения $\nu(1), \ldots, \nu(i)$ элементы, и мы не можем задать $\nu(i+1)$. Покажем методом математической индукции, что описанная ситуация невозможна.

Предположим, что мы успешно прошли все итерации процедуры вплоть до $i \leqslant N-1$. Предположим также, что по приведённой выше причине мы не можем задать $\lambda(i+1)$. Обозначим через $\lambda(\pi_1^k)$ блок, содержащий $\bar{\sigma}^{-1}\big(\nu(i)\big)$. Тогда

1) если $\lambda(\pi_1^k)$ не содержит $\lambda(1)$, из нашего предположения следует, что в результате действия $\bar{\sigma}^{-1}$ образ $|\pi_1^k|+1$ различных элементов, включая $\nu(i)$, использовавшихся для построения ν, лежит в $\lambda(\pi_1^k)$. Это, конечно, противоречит тому, что $\bar{\sigma}^{-1}$ является биекцией;
2) если же $\lambda(1)$ принадлежит $\lambda(\pi_1^k)$ (тогда $k=p$), мы снова приходим к противоречию. В этом случае нам известно лишь, что в результате действия $\bar{\sigma}^{-1}$ образ $|\pi_1^k|$ различных элементов лежит в $\lambda(\pi_1^p)$. Однако из определений $\bar{\sigma}$, $\lambda(\pi_1)$ и $\lambda(\pi_2)$ следует, что если белая вершина t, соответствующая данному блоку π_1^a, является прямым потомком чёрной вершины, соответствующей блоку π_2^b, то
$$\lambda(m_1^a) \in \lambda(\pi_2^b).$$
Другими словами, мы не могли бы использовать все элементы $\nu(\pi_2^b)$ для построения ν, прежде чем максимальный элемент $\lambda(\pi_1^a)$ (а значит, и все элементы $\lambda(\pi_1^a)$) был использован для построения λ. Аналогично, если чёрная вершина, соответствующая π_2^c, является прямым потомком белой вершины, соответствующей π_1^d, имеем, что
$$\bar{\sigma}^{-1}\big(\nu(m_2^c)\big) \in \lambda(\pi_1^d).$$
Значит, все элементы $\nu(\pi_2^c)$ должны быть использованы для восстановления ν до того, как элементы $\lambda(\pi_1^d)$ будут использованы для восстановления λ. Другими словами, элементы блока, соответствующего (чёрной или белой) вершине x, не используются для построения λ и ν до тех пор, пока все элементы блоков, соответствующих вершинам-потомкам x, не были использованы для этого построения. Поскольку π_1^p соответствует корню t, тот факт, что все элементы $\lambda(\pi_1^p)$ уже были использованы для построения λ и ν, означает, что все элементы всех других блоков $\lambda(\pi_1)$ и $\nu(\pi_{2)}$ также уже были использованы. Таким образом, восстановление завершено и $i=N$. Это противоречит нашему предположению, что $i \leqslant N-1$.

Как только элемент $\lambda(i+1)$ найден, можно сразу определить элемент $\nu(i+1)$. Действительно, если бы $\lambda(i+1)$ принадлежал такому блоку $\lambda(\pi_2^l)$, что все элементы $\nu(\pi_2^l)$ уже были использованы для построения ν, это значило бы, что $|\pi_2^l|+1$ различных элементов принадлежат $\lambda(\pi_2^l)$, — противоречие. Наша индукция, таким образом, завершается очевидным замечанием, что $\lambda(1)$ и $\nu(1)$ всегда могут быть определены. □

На последнем этапе доказательства нам надо показать, что перестановка

$$\alpha = \gamma \circ \nu^{-1} \circ \bar{\sigma} \circ \lambda$$

удовлетворяет двум следующим условиям:

$$\alpha(\pi_1) = \pi_1, \tag{2.7}$$

$$\alpha^{-1}\gamma(\pi_2) = \pi_2. \tag{2.8}$$

Условие (2.8) следует из того, что

$$\lambda(\pi_2) = \bar{\sigma}^{-1}(\pi_2).$$

Таким образом,

$$\pi_2 = \lambda^{-1} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \nu \circ \gamma^{-1} \circ \gamma(\pi_2),$$

и следовательно,

$$\pi_2 = \alpha^{-1} \circ \gamma(\pi_2).$$

Выполнение условия (2.7) можно доказать, используя то, что для всех i из $[N]$ $\lambda(i)$ и $\bar{\sigma}^{-1} \circ \nu \circ \gamma^{-1}(i)$ принадлежат одному и тому же блоку $\lambda(\pi_1)$. Следовательно, $\lambda^{-1} \circ \bar{\sigma}^{-1} \circ \nu \circ \gamma^{-1}(i)$ и i принадлежат одному и тому же блоку π_1. Наконец, блоки π_1 стабильны при действии α^{-1} и, следовательно, α.

3. Перечисление 3-кактусов

3.1. Распределённые кактусы и кактусные деревья

3.1.1. Распределённые 3-кактусы. Определение

Пусть $\mathrm{CC}(p_1, p_2, p_3, N)$ — множество пятёрок $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \alpha_1, \alpha_2)$, таких что π_1, π_2 и π_3 — разбиения $[N]$ на p_1, p_2 и p_3 блоков и α_1, α_2 — перестановки из Σ_N, удовлетворяющие следующим условиям:

— каждый блок π_1 является объединением циклов α_1;

— каждый блок π_2 является объединением циклов α_2;

— каждый блок π_3 является объединением циклов $\alpha_3 = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} \circ \gamma_N$.

Такую пятёрку будем называть *распределённым* 3-*кактусом* с N треугольниками, p_1 белыми, p_2 чёрными и p_3 серыми блоками.

3.1.2. Графическое представление

Данное нами определение имеет наглядное графическое представление, поскольку пятёрка $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \alpha_1, \alpha_2)$ соответствует 3-кактусу с N треугольниками:

— циклы α_1 описывают белые вершины кактуса;

— циклы α_2 описывают чёрные вершины кактуса;

— циклы $\alpha_3 = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} \circ \gamma_N$ описывают серые вершины кактуса;

— π_1 разбивает множество белых вершин на p_1 подмножеств;

— π_2 разбивает множество чёрных вершин на p_2 подмножеств;
— π_3 разбивает множество серых вершин на p_3 подмножеств.

Пример 3.1. На рис. 8 изображена пятёрка $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathrm{CC}(2,2,2,5)$, заданная следующим образом:

$$\alpha_1 = (1)\,(2\,4)\,(3)\,(5), \quad \alpha_2 = (1)\,(2\,3)\,(4\,5), \quad \alpha_3 = (1\,5)\,(2)\,(3)\,(4),$$
$$\pi_1 = \{\pi_1^{(1)}, \pi_1^{(2)}\}, \quad \pi_2 = \{\pi_2^{(1)}, \pi_2^{(2)}\}, \quad \pi_3 = \{\pi_3^{(1)}, \pi_3^{(2)}\},$$

где

$$\pi_1^{(1)} = \{2,4,5\}, \quad \pi_1^{(2)} = \{1,3\}, \quad \pi_2^{(1)} = \{1,2,3\}, \quad \pi_2^{(2)} = \{4,5\},$$
$$\pi_3^{(1)} = \{3\}, \quad \pi_3^{(2)} = \{1,2,4,5\}.$$

Аналогично [10] каждому блоку разбиения мы поставим в соответствие определённую форму.

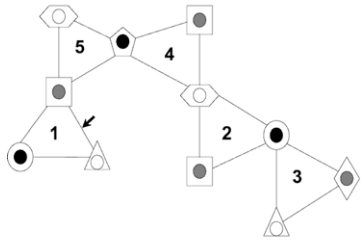

Рис. 8. Пример распределённого 3-кактуса

Связь с кактусами. Распределённые 3-кактусы и 3-кактусы связаны следующей формулой:

$$|\mathrm{CC}(p_1,p_2,p_3,N)| = \\ = \sum_{n_1 \geqslant p_1,\ n_2 \geqslant p_2,\ n_3 \geqslant p_3} S(n_1,p_1)S(n_2,p_2)S(n_3,p_3)|M(n_1,n_2,n_3,N)|,$$

где $S(a,b)$ — числа Стирлинга второго рода. Отсюда следует, что

$$\sum_{n_1,n_2,n_3 \geqslant 1} |M(n_1,n_2,n_3,N)| x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} = \\ = \sum_{p_1,p_2,p_3 \geqslant 1} |\mathrm{CC}(p_1,p_2,p_3,N)| (x_1)_{p_1} (x_2)_{p_2} (x_3)_{p_3},$$

где $(x)_l = x(x-1)(x-2)\cdots(x-l+1)$.

Для доказательства результата (1.2) сфокусируемся на описании биекций для распределённых кактусов. Введём некоторые новые объекты.

3.1.3. Кактусные деревья

Кактус, вложенный в сферу (поверхность рода 0), называется планарным кактусом или *кактусным деревом*. Построение биекции, описанное в следующем подразделе, отчасти основано на трёхцветных кактусных деревьях с двумя видами многоугольников: треугольниками и обычными рёбрами. Точнее, мы рассматриваем множества $\mathrm{CT}(p_1, p_2, p_3, a, b, c)$ кактусных деревьев с p_1 белыми вершинами, p_2 чёрными вершинами, p_3 серыми вершинами, a треугольниками на серой вершине, b треугольниками на белой вершине, c треугольниками на чёрной вершине, такие что

- корень кактусного дерева является белой вершиной;
- белая вершина может иметь в качестве потомков чёрные вершины и/или треугольники на этой белой вершине;
- чёрная вершина может иметь в качестве потомков серые вершины и/или треугольники на этой чёрной вершине;
- серая вершина может иметь в качестве потомков белые вершины и/или треугольники на этой серой вершине;
- каждый треугольник содержит белую, чёрную и серую вершину; при движении вокруг треугольника по часовой стрелке вершины следуют друг за другом в определённом циклическом порядке: белая вершина — чёрная вершина — серая вершина — белая вершина.

Пример 3.2. На рис. 9 изображено кактусное дерево из $\mathrm{CT}(5, 4, 7, 1, 1, 2)$.

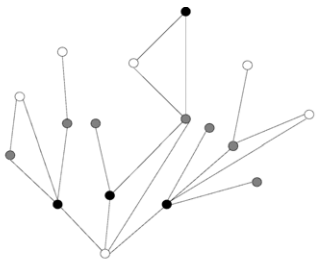

Рис. 9. Пример кактусного дерева

Лемма 3.3. *Мощность рассматриваемого множества кактусных деревьев равна*

$$|\mathrm{CT}(p_1, p_2, p_3, a, b, c)| = \frac{a(b-p_3)+p_2p_3}{p_1p_2p_3} \times \\ \times \binom{p_1+p_2-1-a}{p_1-1,\ p_2-a-b}\binom{p_2+p_3-1-b}{p_2-1,\ p_3-b-c}\binom{p_1+p_3-2-c}{p_3-1,\ p_1-1-a-c},$$

где

$$\binom{u}{v,\ w} = \frac{u!}{v!\,w!\,(u-v-w)!} -$$

триномиальный коэффициент.

Доказательство. Лемма доказывается непосредственным применением теоремы Лагранжа о неявных функциях. □

3.2. Биективное описание распределённых кактусов

В этом подразделе мы построим биективное отображение Θ_{N,p_1,p_2,p_3}. Пусть $(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\alpha_1,\alpha_2) \in \mathrm{CC}(p_1,p_2,p_3,N)$ — распределённый 3-кактус. Отображение Θ_{N,p_1,p_2,p_3} ставит ему в соответствие семёрку $(\tau, S_0, S_1, S_2, \chi, \sigma_1, \sigma_2)$, состоящую из

- упорядоченного кактусного дерева $\tau \in \mathrm{CT}(p_1,p_2,p_3,a,b,c)$ с заданной тройкой (a,b,c);
- множеств $S_0 \in P_{p_1-1+p_2-a}([N])$, $S_1 \in P_{p_1-1+p_3-1-c}([N-1])$, $S_2 \in \in P_{p_3+p_2-1-b}([N-1])$;
- упорядоченного множества $\chi \in \mathrm{OP}_{p_3-b-c}([N])$, такого что $S_0 \cap \chi = \varnothing$;
- перестановок $\sigma_1 \in \Sigma_{N-p_1+1-p_3+c}$, $\sigma_2 \in \Sigma_{N-p_2-p_3+b}$.

Оставшаяся часть этого подраздела посвящена детальному описанию этих объектов и тому, как каждый из них связан с изначально заданным 3-кактусом.

Кактусное дерево. Пусть $\pi_1^{(1)},\dots,\pi_1^{(p_1)}$, $\pi_2^{(1)},\dots,\pi_2^{(p_2)}$ и $\pi_3^{(1)},\dots,\pi_3^{(p_3)}$ — блоки разбиений π_1, π_2 и π_3 соответственно, где нумерация блоков подчиняется только условию $1 \in \pi_1^{(p_1)}$. Обозначим через $m_1^{(i)}$ максимальный элемент блока $\pi_1^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant p_1)$, через $m_2'^{(j)}$ максимальный элемент множества $\alpha_3^{-1}\bigl(\pi_2^{(j)}\bigr)$ $(1 \leqslant j \leqslant p_2)$ и через $m_3^{(k)}$ максимальный элемент $\pi_3^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant p_3)$. Построим сначала трёхцветное размеченное дерево последнего обхода T с p_1 белыми, p_2 чёрными и p_3 серыми вершинами, удовлетворяющее следующим условиям:

- корень T является белой вершиной p_1;
- для $j = 1,\dots,p_2$ чёрная вершина j является потомком белой вершины i, если
$$m_2'^{(j)} = \max\Bigl(\alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1}\bigl(\pi_2^{(j)}\bigr)\Bigr) \in \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1}\bigl(\pi_1^{(i)}\bigr);$$
- для $k = 1,\dots,p_3$ серая вершина k является потомком чёрной вершины j, если
$$m_3^{(k)} = \max\Bigl(\alpha_3^{-1}\bigl(\pi_3^{(k)}\bigr)\Bigr) \in \alpha_3^{-1}\bigl(\pi_2^{(j)}\bigr);$$
- для $i = 1,\dots,p_1-1$ белая вершина i является потомком серой вершины k, если
$$m_1^{(i)} \in \pi_3^{(k)};$$

— если обе серые вершины k_1 и k_2 являются потомками чёрной вершины j, то k_1 находится левее k_2, когда

$$\alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3\big(m_3^{(k_1)}\big) < \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3\big(m_3^{(k_2)}\big);$$

— если обе чёрные вершины j_1 и j_2 являются потомками белой вершины i, то j_1 находится левее j_2, когда

$$\alpha_2 \circ \alpha_3\big(m_2^{\prime(j_1)}\big) < \alpha_2 \circ \alpha_3\big(m_2^{\prime(j_2)}\big);$$

— если обе белые вершины i_1 и i_2 являются потомками серой вершины k, то i_1 находится левее i_2, когда

$$\alpha_3^{-1}\big(m_1^{(i_1)}\big) < \alpha_3^{-1}\big(m_1^{(i_2)}\big).$$

Можно доказать, что трёхцветное размеченное дерево T корректно определено. Сняв с T метки, получим *трёхцветное упорядоченное дерево* t. Следующий шаг состоит в построении трёхцветного кактусного дерева τ. Для этого соединим каждую вершину t с самым правым потомком её самого правого потомка; эту операцию будем выполнять тогда и только тогда, когда все три указанные вершины принадлежат одному и тому же треугольнику исходного распределённого кактуса (легко убедиться, что этому условию могут удовлетворять только самые правые потомки). Следуя описанным правилам построения, получим

— треугольник на серой вершине, если

$$\alpha_2 \circ \alpha_3\big(m_2^{\prime(j)}\big) = m_1^{(i)}; \tag{3.1}$$

— треугольник на белой вершине, если

$$\alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3\big(m_3^{(k)}\big) = m_2^{\prime(j)}; \tag{3.2}$$

— треугольник на чёрной вершине, если

$$\alpha_3^{-1}\big(m_1^{(i)}\big) = m_3^{(k)}. \tag{3.3}$$

Пример 3.4. Продолжим пример 3.1. Поскольку

$$m_2^{\prime(1)} = \max\{2,3,5\} = 5 \in \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1}\big(\pi_1^{(2)}\big) = \{2,5\},$$

чёрный круг 1 является потомком корня-треугольника 2. Поскольку

$$m_3^{(1)} = 3 \in \alpha_3^{-1}\big(\pi_2^{(1)}\big) = \{2,3,5\}, \quad m_3^{(2)} = 5 \in \alpha_3^{-1}\big(\pi_2^{(1)}\big) = \{2,3,5\},$$

серый ромб 1 и серый квадрат 2 оба являются потомками чёрного круга 1. Более того, в силу того что

$$\alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3\big(m_3^{(1)}\big) = 2 < \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3\big(m_3^{(2)}\big) = 5,$$

серый ромб 1 находится левее серого квадрата 2. Белый шестиугольник 1 является потомком серого квадрата 2, так как

$$m_1^{(1)} = 5 \in \pi_3^{(2)} = \{1,2,4,5\}.$$

Чёрный пятиугольник 2 в свою очередь является потомком белого шестиугольника 1, потому что

$$m_2'^{(2)} = \max\{1,4\} = 4 \in \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1}\big(\pi_1^{(1)}\big) = \{1,3,4\}.$$

Таким образом строится первое дерево T. Снимая формы и метки с T, получаем дерево t. Используя равенство

$$\alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3\big(m_3^{(2)}\big) = m_2'^{(1)} = 5$$

и соединяя корень t с правой серой вершиной, строим треугольник на корне t. Поскольку

$$\alpha_2 \circ \alpha_3\big(m_2'^{(2)}\big) = m_1^{(i)} = 5,$$

строим треугольник на упомянутой серой вершине, соединяя её с верхней чёрной вершиной t. В итоге получаем из дерева t кактусное дерево τ (рис. 10).

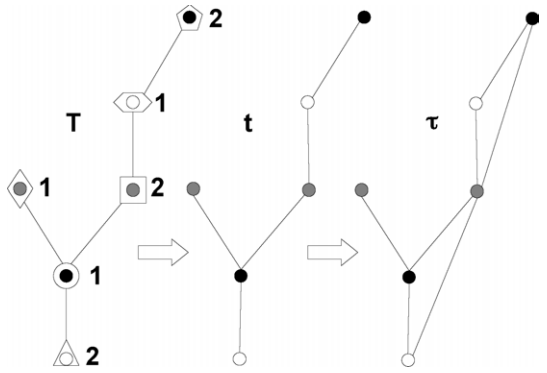

Рис. 10. Размеченное дерево T, дерево t и кактусное дерево τ

До конца подраздела a будет обозначать количество треугольников на серых вершинах, b — количество треугольников на белых вершинах и c — количество треугольников на чёрных вершинах.

Перенумерованные множества-носители.

1. *Перенумеровывающие перестановки*. Применяя поход, аналогичный [10], построим три перенумеровывающие перестановки λ_1, λ_2, λ_3. Сначала рассмотрим *реверсивно-размеченное* дерево T', полученное приписыванием меток вершинам t. Построение основано на трёх независимых процедурах реверсивной разметки для белых, чёрных и серых вершин. Корню присваивается метка p_1, белые вершины уровня 3 нумеруются справа налево начиная с $p_1 - 1$, после чего нумеруются справа налево белые вершины уровня 5 и все другие уровни белых вершин, пока не будет достигнута самая левая вершина, на верхнем уровне которой будет метка 1. Аналогичным образом нумеруются чёрные и серые вершины. Следующий шаг состоит в перенумерации блоков (белых, чёрных

и серых) с использованием меток T'. Если белой вершине присвоена метка i в T и i' в T', обозначим $\pi_1^{i'} = \pi_1^{(i)}$. Чёрные и серые блоки перенумеровываются аналогичным образом. Пусть ω^i, υ^j, ν^k — строки, полученные при записи элементов π_1^i, $\alpha_3^- 1(\pi_2^j)$, π_3^k в порядке возрастания. Обозначим через $\omega = \omega^1 \dots \omega^{p_1}$, $\upsilon = \upsilon^1 \dots \upsilon^{p_2}$, $\nu = \nu^1 \dots \nu^{p_3}$ конкатенации заданных выше строк. Зададим перестановку $\lambda_1 \in \Sigma_N$, полагая ω первой строкой и $[N]$ второй строкой этой перестановки. Аналогичным образом зададим λ_2 и λ_3.

2. *Носители*. Зададим множество $S_0 \subset [N]$ мощности $|S_0| = p_1 - 1 + p_2 - a$ как

$$S_0 = \lambda_1(\{m_1^i,\, \alpha_2 \circ \alpha_3(m_2'^j) \mid 1 \leqslant i \leqslant p_1 - 1,\ 1 \leqslant j \leqslant p_2\}),$$

множество $S_1 \subset [N-1]$ мощности $|S_1| = p_1 - 1 + p_3 - 1 - c$ как

$$S_1 = \lambda_3(\{m_3^k,\, \alpha_3^{-1}(m_1^i) \mid 1 \leqslant k \leqslant p_3 - 1,\ 1 \leqslant i \leqslant p_1 - 1\})$$

(очевидно, $N = \lambda_3(m_3^{p_3})$), множество $S_2 \subset [N-1]$ мощности $|S_2| = p_2 - 1 + p_3 - b$ как

$$S_2 = \lambda_2(\{m_2'^j,\, \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3(m_3^k) \mid 1 \leqslant j \leqslant p_2 - 1,\ 1 \leqslant k \leqslant p_3\}).$$

Пример 3.5. Вернёмся вновь к нашему примеру 3.4 и построим перенумеровывающие перестановки и множества-носители. Используя реверсивную разметку T, положим

$$\pi_1^1 = \pi_1^{(1)}, \quad \pi_1^2 = \pi_1^{(2)}, \quad \pi_2^1 = \pi_2^{(2)}, \quad \pi_2^2 = \pi_2^{(1)}, \quad \pi_3^1 = \pi_3^{(1)}, \quad \pi_3^2 = \pi_3^{(2)}.$$

Тогда строки ω^i, υ^j и ν^k задаются следующим образом:

$$\omega^1 = 245, \quad \omega^2 = 13, \quad \upsilon^1 = 14, \quad \upsilon^2 = 235, \quad \nu^1 = 3, \quad \nu^2 = 1245.$$

Теперь построим перенумеровывающие перестановки λ_1, λ_2 и λ_3:

$$\lambda_1 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right), \quad \lambda_2 = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right),$$
$$\lambda_3 = \left(\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Следовательно, перенумерованные множества-носители выглядят следующим образом:

$$S_0 = \lambda_1(\{1,5\}) = \{3,4\}, \quad S_1 = \lambda_3(\{1,3,5\}) = \{1,2,5\},$$
$$S_2 = \lambda_2(\{2,4,5\}) = \{2,3,5\}.$$

Перенумерованное упорядоченное множество дополнения носителя. Зададим упорядоченное множество

$$\chi = \big(\lambda_1 \circ \alpha_3(m_3^k),\ 1 \leqslant k \leqslant p_3 \mid \alpha_3(m_3^k) \notin \{m_1^i,\ 1 \leqslant i \leqslant p_1 - 1,\ \alpha_2 \circ \alpha_3(m_2'^j),\ 1 \leqslant j \leqslant p_2\}\big)$$

мощности $|\chi| = p_3 - b - c$. Очевидно, что для него верно соотношение $S_0 \cap \chi = \varnothing$.

Пример 3.6. Множество дополнения носителя χ для нашего примера 3.5 задаётся следующим образом:

$$\chi = \big(\lambda_1(\{1,3\} \setminus \{1\})\big) = \lambda_1(3) = 5.$$

Перестановки. Для завершения конструкции нам понадобятся ещё два объекта. Описание этих объектов мы дадим в два этапа.

1. *Частичные перестановки*. Сначала зададим множества

$$E_1 = [N] \setminus \lambda_1\{m_1^i,\, \alpha_3(m_3^k) \mid 1 \leqslant i \leqslant p_1 - 1,\ 1 \leqslant k \leqslant p_3\}$$

и

$$E_2 = [N] \setminus \lambda_1\{\alpha_2 \circ \alpha_3(m_2'^j),\, \alpha_3(m_3^k) \mid 1 \leqslant i \leqslant p_2,\ 1 \leqslant k \leqslant p_3\}.$$

Мы построим частичные перестановки $\tilde{\sigma}_1$ and $\tilde{\sigma}_2$, заданные на E_1 и E_2 соответственно следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_1 \colon E_1 \to [N-1] \setminus S_1,\ \ u \mapsto \lambda_3 \circ \alpha_3^{-1} \circ \lambda_1^{-1}(u),$$
$$\tilde{\sigma}_2 \colon E_2 \to [N-1] \setminus S_2,\ \ u \mapsto \lambda_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \lambda_1^{-1}(u).$$

2. *Перестановки*. Зададим упорядоченное множество $\bar{E}_1$, содержащее элементы E_1, записанные в порядке возрастания, и функцию ρ_1, которая каждому элементу E_1 ставит в соответствие его номер в $\bar{E}_1$. Из данного определения следует, что $\rho_1(E_1) = [N - p_1 + 1 - p_3 + c]$. Аналогично задаётся функция ρ_2 для нумерации элементов E_2, ρ_3 для нумерации элементов $[N-1]\setminus S_1$ и ρ_4 для нумерации элементов $[N-1] \setminus S_2$. Теперь мы можем дать определения перестановок σ_1 и σ_2:

$$\sigma_1 \colon [N - p_1 + 1 - p_3 + c] \to [N - p_1 + 1 - p_3 + c],\ \ u \mapsto \rho_3 \circ \tilde{\sigma}_1 \circ \rho_1^{-1}(u),$$
$$\sigma_2 \colon [N - p_2 - p_3 + b] \to [N - p_2 - p_3 + b],\qquad\quad u \mapsto \rho_4 \circ \tilde{\sigma}_2 \circ \rho_2^{-1}(u).$$

Пример 3.7. Обратимся к примеру 3.6. Множества E_1 и E_2 имеют вид

$$E_1 = [5] \setminus \{1,3,5\} = \{2,4\}, \quad E_2 = [5] \setminus \{1,3,5\} = \{2,4\}.$$

Следовательно, частичные перестановки $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ задаются следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

В итоге получаем желаемые перестановки σ_1 и σ_2:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Вывод основной формулы

Пусть $I(p_1, p_2, p_3, N)$ — множество семёрок, описанное в предыдущем подразделе. Имеем

$$I(p_1,p_2,p_3,N)=\Big\{(\tau,S_0,S_1,S_2,\chi,\sigma_1,\sigma_2)\in$$
$$\in\bigcup_{a,b,c\geqslant 0}\mathrm{CT}(p_1,p_2,p_3,a,b,c)\times P_{p_1-1+p_2-a}([N])\times$$
$$\times P_{p_1-1+p_3-1-c}([N-1])\times P_{p_3+p_2-1-b}([N-1])\times \mathrm{OP}_{p_3-b-c}([N])\times$$
$$\times\Sigma_{N-p_1+1-p_3+c}\times\Sigma_{N-p_2-p_3+b}\mid S_0\cap\chi=\varnothing\Big\}.$$

Результат (1.2) доказывается следующей теоремой.

Теорема 3.8. *Отображение* Θ*, заданное формулой*

$$\mathrm{CC}(p_1,p_2,p_3,N)\to I(p_1,p_2,p_3,N),\quad(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\alpha_1,\alpha_2)\mapsto(\tau,S_0,S_1,S_2,\chi,\sigma_1,\sigma_2),$$

является биекцией.

Детальное доказательство теоремы даётся в следующем подразделе. Результат (1.2) является прямым следствием теоремы 3.8. Действительно, верна следующая лемма.

Лемма 3.9. *Мощность множества-образа отображения* Θ *удовлетворяет соотношению*

$$|I(p_1,p_2,p_3,N)|=\frac{N!^2}{p_1!\,p_2!\,p_3!}\binom{N-1}{p_3-1}\sum_{a\geqslant 0}\binom{N-p_2}{p_1-1-a}\binom{N-p_3}{a}\binom{N-1-a}{N-p_2}.$$

Доказательство. Мощность множества $\mathrm{CT}(p_1,p_2,p_3,a,b,c)$ была найдена в лемме 3.3. Количества способов выбора множеств S_0, S_1 и S_2 равны биномиальным коэффициентам

$$\binom{N}{p_1-1+p_2-a},\quad\binom{N-1}{p_1-1+p_3-1-c},\quad\binom{N-1}{p_3+p_2-1-b}.$$

Поскольку $S_0\cap\chi=\varnothing$, множество способов выбрать χ равно

$$\binom{N-p_1+1-p_2+a}{p_3-b-c}(p_3-b-c)!.$$

Количества перестановок σ_1, σ_2 равны $(N-p_1+1-p_3+c)!$, $(N-p_2-p_3+b)!$. Комбинируя вышесказанное и проводя суммирование по (a,b,c), получаем

$$|I(p_1,p_2,p_3,N)|=$$
$$=\sum_{a,b,c\geqslant 0}\frac{(a(b-p_3)+p_2p_3)}{p_1p_2p_3}\binom{p_1+p_2-1-a}{p_1-1,\ p_2-a-b}\binom{p_2+p_3-1-b}{p_2-1,\ p_3-b-c}\times$$
$$\times\binom{p_1+p_3-2-c}{p_3-1,\ p_1-1-a-c}\binom{N}{p_1-1+p_2-a}\binom{N-1}{p_1-1+p_3-1-c}\times$$
$$\times\binom{N-1}{p_3+p_2-1-b}\binom{N-p_1+1-p_2+a}{p_3-b-c}(p_3-b-c)!\times$$
$$\times(N-p_1+1-p_3+c)!\,(N-p_2-p_3+b)!.\qquad(3.4)$$

Соотношение (3.4) можно значительно упростить, манипулируя биномиальными коэффициентами. Получим

$$|I(p_1,p_2,p_3,N)| = \frac{(N-1)!^2}{p1!\,p2!\,p3!} \sum_{a,b,c\geqslant 0} (a(b-p_3)+p_2p_3) \times \\ \times \binom{N}{a,\ b,\ c,\ p_1-1-a-c,\ p_2-a-b,\ p_3-b-c},$$

где последний справа элемент является мультиномиальным коэффициентом. Вычисление приводит к желаемому результату путём приведения слагаемых, зависящих от b и c, и суммирования по этим двум параметрам с применением конволюции Вандермонда. (К тому же результату можно прийти с помощью формулы Джексона [7].) □

3.4. Доказательство биективности

3.4.1. Инъективность

На первом этапе доказательства мы сфокусируемся на инъективности отображения Θ. Пусть $(\tau, S_0, S_1, S_2, \chi, \sigma_1, \sigma_2)$ — образ $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \alpha_1, \alpha_2) \in \in \mathrm{CC}(p_1,p_2,p_3,N)$. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что пятёрка $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \alpha_1, \alpha_2)$ единственным образом восстанавливается по семёрке $(\tau, S_0, S_1, S_2, \chi, \sigma_1, \sigma_2)$. Доказательство состоит из нескольких шагов.

Заметим, что S_0 и τ позволяют найти значения

$$\lambda_1(\{m_1^i,\ \alpha_2\circ\alpha_3(m_2'^j) \mid 1\leqslant i\leqslant p_1-1,\ 1\leqslant j\leqslant p_2\}),$$

поскольку S_0 даёт множество значений всех этих элементов (по построению) и τ задаёт на них отношение порядка (включая равенства). Действительно, по построению τ и λ_1 элементы $\lambda_1(m_1^l)$ упорядочены по возрастанию в соответствии с реверсивным порядком на метках τ, элементы $\lambda_1\big(\alpha_2\circ\alpha_3(m_2'^l)\big)$, ассоциирующиеся с чёрными вершинами-потомками одной и той же белой вершины, упорядочены в порядке возрастания слева направо. Если чёрная вершина j в реверсивной нумерации вершин τ является потомком белой вершины i, мы имеем, что

$$\lambda_1\big(\alpha_2\circ\alpha_3(m_2'^j)\big) \in \lambda_1(\pi_1^i)$$

и, следовательно,

$$\lambda_1\big(\alpha_2\circ\alpha_3(m_2'^j)\big) > \lambda_1(m_1^l),$$

если $l<i$,

$$\lambda_1\big(\alpha_2\circ\alpha_3(m_2'^j)\big) < \lambda_1(m_1^l),$$

если $i<l$, и

$$\lambda_1\big(\alpha_2\circ\alpha_3(m_2'^j)\big) = \lambda_1(m_1^i),$$

если чёрная вершина j и белая вершина i принадлежат одному и тому же треугольнику на серой вершине.

Аналогично

$$\lambda_3(\{m_3^k,\, \alpha_3^{-1}(m_1^i) \mid 1 \leqslant k \leqslant p_3,\ 1 \leqslant i \leqslant p_1 - 1\}),$$

и

$$\lambda_2(\{m_2'^j,\, \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_3(m_3^k) \mid 1 \leqslant j \leqslant p_2,\ 1 \leqslant k \leqslant p_3\})$$

определяются однозначно.

Рассматривая треугольники на белой или чёрной вершине внутри дерева τ, мы можем определить $\lambda_1\big(\alpha_3(m_3^k)\big)$, если $\lambda_1\big(\alpha_3(m_3^k)\big) \in S_0$. Дополнительное упорядоченное множество χ позволяет единственным образом определить $\lambda_1\big(\alpha_3(m_3^k)\big)$, если $\lambda_1\big(\alpha_3(m_3^k)\big) \notin S_0$.

Следующий шаг начинается с наблюдения, состоящего в том, что восстановленные на настоящий момент элементы позволяют однозначно определить и носители частичных перестановок $\tilde\sigma_1$ и $\tilde\sigma_2$, и сами частичные перестановки. Теперь мы зададим $\bar\sigma_1 = \lambda_3 \circ \alpha_3^{-1} \circ \lambda_1^{-1}$ и $\bar\sigma_2 = \lambda_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \alpha_2^{-1} \circ \lambda_1^{-1}$ — продолжения $\tilde\sigma_1$ и $\tilde\sigma_2$ на всё множество $[N]$, положив $\bar\sigma_1(i) = \tilde\sigma_1(i)$, если i принадлежит носителю $\tilde\sigma_1$, и $\lambda_3(m_3^k) = \bar\sigma_1\Big(\lambda_1\big(\alpha_3(m_3^k)\big)\Big)$ или $\lambda_3\big(\alpha_3^{-1}(m_1^i)\big) = \bar\sigma_1\big(\lambda_1(m_1^i)\big)$ в противном случае. (Для $\bar\sigma_2$ построение аналогично.)

Разбиение $\lambda_1(\pi_1)$ теперь также задаётся однозначно, поскольку

$$\lambda_1(\pi_1^1) = [\lambda_1(m_1^1)], \quad \lambda_1(\pi_1^i) = [\lambda_1(m_1^i)] \setminus [\lambda_1(m_1^{i-1})] \ \text{ для } \ 2 \leqslant i \leqslant p_1.$$

Подобная процедура реконструкции работает и для $\lambda_2(\alpha_3^{-1}\pi_2)$ и $\lambda_3(\pi_3)$.

Применяя $\bar\sigma_1^{-1}$ к $\lambda_3(\pi_3)$, мы единственным образом определяем $\lambda_1(\pi_3)$.

Применяя $\bar\sigma_2^{-1}$ к $\lambda_2(\alpha_3^{-1}\pi_2)$, единственным образом определяем $\lambda_1(\pi_2)$.

Затем по индукции доказывается, что λ_1, λ_2, λ_3 определяются единственным образом. Действительно, элемент $\lambda_1(1)$ определяется единственным образом как минимальный элемент множества $\lambda_1(\pi_1^{p_1})$. Предположим, что $\lambda_1(l)$, $\lambda_2(l-1)$ и $\lambda_3(l-1)$ определены единственным образом для $l = 1, \ldots, i$ для некоторого $i < N$. Поскольку λ_3 — возрастающая функция на блоках π_3, очевидно, что элемент $\lambda_3(i)$ — минимальный (ещё не идентифицированный с помощью нашей процедуры) элемент $\lambda_3(\pi_3^{k_i})$, где k_i — номер серого блока, такого что $\lambda_1(i) \in \lambda_1(\pi_3^{k_i})$, и, следовательно, определяется однозначно. Вычислим $\lambda_1\big(\alpha_3(i)\big) = \bar\sigma_1^{-1}\big(\lambda_3(i)\big)$. Тогда мы можем идентифицировать $\lambda_2(i)$ как минимальный (ещё не найденный с помощью нашей процедуры) элемент $\lambda_2\big(\alpha_3^{-1}(\pi_2^{j_i})\big)$, где j_i — номер чёрного блока, такого что $\lambda_1\big(\alpha_3(i)\big) \in \lambda_1(\pi_2^{j_i})$. Вычислим $\lambda_1\big(\alpha_2\alpha_3(i)\big) = \bar\sigma_2^{-1}\big(\lambda_2(i)\big)$. Идентифицируем $\lambda_1(i+1)$ как минимальный (ещё не найденный с помощью нашей процедуры) элемент $\lambda_1(\pi_1^{l_i})$, где l_i — номер белого блока, для которого $\lambda_1\big(\alpha_2\alpha_3(i)\big) \in \lambda_1(\pi_1^{l_i})$ (так как π_1 стабилен под действием α_1, элемент $i+1 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3(i)$ принадлежит тому же белому блоку, что и $\alpha_2\alpha_3(i)$, и следовательно, $\lambda_1(i+1)$ определяется однозначно). В заключение заметим, что $\lambda_2(N)$ и $\lambda_3(N)$ определяются единственным образом.

Из вышесказанного следует, что распределённый кактус определяется единственным образом, поскольку

$$\pi_1 = \lambda_1^{-1}\big(\lambda_1(\pi_1)\big), \quad \pi_2 = \lambda_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2^{-1}\Big(\lambda_2\big(\alpha_3^{-1}(\pi_2)\big)\Big), \quad \pi_3 = \lambda_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_1^{-1}\big(\lambda_3(\pi_3)\big),$$
$$\alpha_1 = \gamma_N \circ \lambda_2^{-1} \circ \bar{\sigma}_2 \circ \lambda_1, \quad \alpha_2 = \lambda_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2^{-1} \circ \lambda_2 \circ \lambda_3^{-1} \circ \bar{\sigma}_1 \circ \lambda_1.$$

3.4.2. Сюръективность

Последний шаг доказательства заключается в том, чтобы показать, что отображение $\Theta(p_1, p_2, p_3, N)$ является сюръекцией. Пусть $(\tau, S_0, S_1, S_2, \chi, \sigma_1, \sigma_2)$ — произвольная семёрка из множества $I(p_1, p_2, p_3, N)$. Зная, что $S_0 \cap \chi = \varnothing$, мы можем задать разбиения $\lambda_1(\pi_1)$, $\lambda_2\big(\alpha_3^{-1}(\pi_2)\big)$, $\lambda_3(\pi_3)$ и перестановки $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ согласно процедуре реконструкции, описанной в предыдущем подразделе. Следовательно, мы можем задать $\lambda_1(\pi_2)$ и $\lambda_1(\pi_3)$, используя соотношения $\lambda_1(\pi_2) = \bar{\sigma}_2^{-1}\Big(\lambda_2\big(\alpha_3^{-1}(\pi_2)\big)\Big)$, $\lambda_1(\pi_3) = \bar{\sigma}_1^{-1}\big(\lambda_3(\pi_3)\big)$. Для того чтобы доказать сюръективность Θ, нам необходимо показать, что итеративная процедура реконструкции λ_1, λ_2, λ_3, описанная в процессе доказательства инъективности, всегда может быть доведена до конца и даёт корректный результат. Основная сложность — граничное условие.

Заметим, что мы всегда можем задать $\lambda_1(1)$ как минимальный элемент множества $\lambda_1(\pi_1^{p_1})$. Предположим теперь, что нам удалось восстановить $\lambda_1(l)$ для $l = 1, \ldots, h$ $(h < N)$, $\lambda_2(l)$ и $\lambda_3(l)$, $l = 1, \ldots, h-1$. Мы не сможем восстановить $\lambda_3(h)$ в том и только в том случае, если все элементы $\lambda_3(\pi_3^{k_h})$, такие что $\lambda_1(h) \in \lambda_1(\pi_3^{k_h})$, уже были вовлечены в процедуру на более ранних этапах. Очевидно, это значило бы, что $|\lambda_1(\pi_3^{k_h})| + 1$ различных элементов принадлежат множеству $\lambda_1(\pi_3^{k_h})$, что по понятным причинам невозможно. Невозможность восстановления $\lambda_2(h)$ была бы эквивалентна тому, что все элементы $\lambda_2(\pi_2^{j_h})$, где $\bar{\sigma}_1^{-1}\big(\lambda_3(h)\big) \in \lambda_1(\pi_2^{j_h})$, уже были ранее идентифицированы. Поскольку $\bar{\sigma}_1$ является биекцией, подобное предположение ведёт к противоречию. Тот же самый аргумент применим к реконструкции $\lambda_1(h+1)$, если $\bar{\sigma}_2^{-1}\big(\lambda_2(h)\big) \in \lambda_1(\pi_1^{i_{h+1}})$, где $i_{h+1} \neq p_1$. Если $\bar{\sigma}_2^{-1}\big(\lambda_2(h)\big) \in \lambda_1(\pi_1^{p_1})$, мы только можем утверждать, что $|\lambda_1(\pi_1^{p_1})|$ различных элементов принадлежат $\lambda_1(\pi_1^{p_1})$, поскольку элемент $\lambda_1(1)$ не был задан тем же способом, что и остальные $\lambda_1(l)$. Однако согласно нашему построению если чёрная вершина дерева τ, соответствующая некоторому блоку π_2^u, является прямым потомком белой вершины, ассоциированной с π_1^v, то $\bar{\sigma_2}^{-1}\big(\lambda_2(m_2'^u)\big) \in \lambda_1\big(\pi_1^{(v)}\big)$. Следовательно, если все элементы $\lambda_1\big(\pi_1^{(v)}\big)$ уже были задействованы в процедуре реконструкции, максимальные элементы (а значит, и остальные элементы) всех блоков $\lambda_2\big(\alpha_3^{-1}(\pi_2^u)\big)$, соответствующих вершинам-потомкам белой вершины, ассоциированной с $\lambda_1\big(\pi_1^{(v)}\big)$, уже были задействованы в процедуре. Аналогично можно показать, что для любой вершины, независимо от цвета, если все элементы соответствующего блока были вовлечены в процесс реконструкции, то и все элементы блоков, соответствующих вершинам-потомкам, были вовлечены в процесс реконструкции.

Поскольку $\pi_1^{p_1}$ ассоциируется с корнем кактусного дерева τ, тот факт, что все элементы $\lambda_1(\pi_1^{p_1})$ были задействованы в процедуре реконструкции, означает, что то же можно сказать обо всех элементах всех блоков. Следовательно, процесс реконструкции завершён желаемым образом и $h = N$, что противоречит нашему предположению. Покажем, что объекты, полученные в процессе реконструкции, являются корректно определёнными элементами $\mathrm{CC}(p_1, p_2, p_3, N)$. Наши объекты корректны тогда и только тогда, когда удовлетворены условия стабильности разбиений под действием перестановки. Если $l \in \pi_1^i$, то согласно нашей процедуре реконструкции $\lambda_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2^{-1} \circ \lambda_2(l-1) \in \pi_1^i$ для $l \geqslant 2$. Кроме того, было показано, что $\lambda_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2^{-1} \circ \lambda_2(N) \in \pi_1^{p_1}$, где $1 \in \pi_1^{p_1}$. Следовательно, какой бы ни был элемент l, l и $\lambda_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_2^{-1} \circ \lambda_2 \gamma_N^{-1}(l)$ принадлежат одному и тому же блоку π_1. Другими словами, блоки π_1 стабильны при действии α_1^{-1}, или, что эквивалентно, α_1. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что разбиение π_2 стабильно относительно действия α_2. Очевидно, разбиение π_3 стабильно относительно α_3, где $\alpha_3 = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} \circ \gamma_N$, поскольку $\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1^{-1} \circ \gamma_N(\pi_3) = \lambda_1^{-1} \circ \bar{\sigma}_1^{-1}\big(\lambda_3(\pi_3)\big) = \pi_3$ по определению.

Литература

[1] Adrianov N. M. An analogue of the Harer–Zagier formula for unicellular two-color maps // Funct. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 31, no. 3. — P. 149—155.

[2] Cori R., Machi A. Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey. I, II, III // Exposition. Math. — 1992. — Vol. 10. — P. 403—427; 429—447; 449—467.

[3] Goulden I. P., Jackson D. M. Combinatorial Enumeration. — New York: Wiley, 1983.

[4] Goulden I. P., Nica A. A direct bijection for the Harer–Zagier formula // J. Combin. Theory. Ser. A. — 2005. — Vol. 111. — P. 224—238.

[5] Goupil A., Schaeffer G. Factoring n-cycles and counting maps of given genus // European. J. Combin. — 1998. — Vol. 19, no. 7. — P. 819—834.

[6] Harer J., Zagier D. The Euler characteristic of the moduli space of curves // Invent. Math. — 1986. — Vol. 85. — P. 457—486.

[7] Jackson D. M. Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group // J. Combin. Theory. Ser. A. — 1988. — Vol. 49. — P. 363—369.

[8] Kontsevich M. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Comm. Math. Phys. — 1992. — Vol. 147. — P. 1—23.

[9] Lass B. Démonstration combinatoire de la formule de Harer–Zagier // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. — 2001. — Vol. 333. — P. 155—160.

[10] Schaeffer G., Vassilieva E. A bijective proof of Jackson's formula for the number of factorizations of a cycle // J. Combin. Theory. Ser. A. — 2008. — Vol. 115, no. 6. — P. 903—924.

[11] Schaeffer G., Vassilieva E. Partitioned cacti: a bijective approach to the cycle factorization problem // Proc. of FPSAC'08.

[12] Stanton D., White D. Constructive Combinatorics. — New York: Springer, 1986.