Полукольца непрерывных $[0,1]$-значных функций

Е. М. ВЕЧТОМОВ, Е. Н. ЛУБЯГИНА
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: mathematics@vshu.kirov.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: полукольцо, единичный отрезок, компакт, полукольцо непрерывных функций, простой идеал полукольца, гомоморфизм полуколец.

Аннотация

Изучаются свойства простых идеалов в полукольцах непрерывных функций на топологических пространствах со значениями в единичном отрезке $[0,1]$. Описаны максимальные и чистые идеалы таких полуколец. Исследуются гомоморфизмы полуколец непрерывных $[0,1]$-значных функций. В терминах полуколец функций получены характеризации ряда свойств компактов. Показано, что теория идеалов в рассматриваемых полукольцах отличается от случая колец непрерывных функций.

Abstract

E. M. Vechtomov, E. N. Lubyagina, The semiring of continous $[0,1]$*-valued functions*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 53—82.

In this paper, we study the properties of prime ideals in semirings of continuous functions with values in the unit interval $[0,1]$ on topological spaces. We describe maximal and pure ideals of such semirings. We study homomorphisms of semirings of continuous $[0,1]$-valued functions. In terms of semirings of functions we characterize some properties of compacta. We show that the theory of ideals in these semirings differs from the case of rings of continuous functions.

Введение

Статья лежит в русле развития и расширения классической теории колец $C(X,\mathbb{R})$ непрерывных действительнозначных функций на топологических пространствах X [4, 16]. Полукольца $C(X,\mathbb{R}^+)$ непрерывных неотрицательных функций систематически изучаются, начало положено работой [1]. Полукольца непрерывных функций со значениями в компактном числовом полукольце $\mathbf{I}=[0,1]$ рассматривались в [1, 9, 10].

Через $C(X,S)$ обозначается полукольцо всех непрерывных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце S, с поточечно определёнными операциями над функциями. В качестве полукольца S берётся единичный числовой отрезок $\mathbf{I}$, рассматриваемый с обычными операциями умножения $\cdot$, max ($\vee$) и min ($\wedge$), частичными операциями сложения $+$ и вычитания $-$, в стандартной топологии.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 53—82.
© 2011/2012 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Основы общей топологии можно найти в [13]. Теории полуколец посвящены, в частности, монография Дж. С. Голана [15] и учебное пособие В. В. Чермных [11].

Пусть Z — произвольное топологическое пространство. На нём рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$, если $f(x) = f(y)$ для любой функции $f \in C(Z, \mathbf{I})$. На фактор-множестве $\tau Z = X/\sim$ зададим наименьшую топологию, относительно которой непрерывны все функции $\bar{f}\colon \tau X \to \mathbf{I}$, где $f \in C(X, \mathbf{I})$ и $\bar{f}(\tilde{x}) = f(x)$ при любом $x \in X$. Пространство τZ *тихоновское* (т. е. вполне регулярное хаусдорфово), и $C(Z, \mathbf{I}) \cong C(\tau Z, \mathbf{I})$. Для пространства τZ существует стоун-чеховская компактификация $\beta\tau Z = X$, дающая изоморфизм $C(X, \mathbf{I}) \cong C(\tau Z, \mathbf{I}) \cong C(Z, \mathbf{I})$. Таким образом, любому топологическому пространству Z соответствует *компакт* X (т. е. компактное хаусдорфово пространство), такой что полукольца $C(Z, \mathbf{I})$ и $C(X, \mathbf{I})$ канонически изоморфны. Поэтому всюду далее будем считать топологическое пространство X компактом.

В зависимости от выбранных в $\mathbf{I}$ операций $C(X, \mathbf{I})$ может являться

1) идемпотентным полукольцом с операциями $\vee$ и $\cdot$;
2) частичным полукольцом с операциями $+$ и $\cdot$;
3) ограниченной дистрибутивной решёткой с операциями $\vee$ и $\wedge$.

В статье полукольцам, имеющим ряд общих свойств с идемпотентными полукольцами $C(X, \mathbf{I})$, дано название с-полуколец. В разделе 1 рассмотрены общие свойства с-полуколец, связанные с их простыми идеалами. Раздел 2 посвящён изучению идемпотентных полуколец $C(X, \mathbf{I})$. В разделе 3 изучаются гомоморфизмы идемпотентных полуколец $C(X, \mathbf{I})$. В разделе 4 рассмотрены полукольцевые характеристики некоторых топологических свойств компактов. Сходство и различие алгебраических свойств идемпотентных полуколец $C(X, \mathbf{I})$, частичных полуколец $C(X, \mathbf{I})$ и решёток $C(X, \mathbf{I})$ отмечены в разделе 5.

1. О с-полукольцах

Полукольцом называется непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, для которых $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа с нейтральным элементом 1 и $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$, $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ для любых $a, b, c \in S$ [15].

Полукольцо с коммутативным умножением называется *коммутативным*. Полукольцо, в котором выполняется тождество $a + a = a$, называется (*аддитивно*) *идемпотентным*.

В идемпотентном полукольце S естественным образом вводится отношение порядка: для любых $a, b \in S$ $a \leqslant b$ означает, что найдётся $c \in S$, для которого $b = a + c$ (это равносильно тому, что $a + b = b$).

Далее будем рассматривать только коммутативные полукольца.

В полукольце S можно определить отношение делимости: для любых $a, b \in S$ элемент a делится на элемент b тогда и только тогда, когда найдётся элемент $c \in S$, для которого $a = bc$.

Идемпотентное полукольцо S назовём с-полукольцом, если выполняются следующие условия:

1) 1 — наибольший элемент в упорядоченном множестве $\langle S, \leqslant \rangle$;
2) для любого $a \in S$ существует единственный элемент $\sqrt{a}$, такой что $(\sqrt{a})^2 = a$;
3) для любых $a, b \in S$ если $a \leqslant b^2$, то a делится на b.

Заметим, что если в c-полукольце элемент a делится на b, то $a \leqslant b$, однако обратное не обязано выполняться.

Для нас основополагающим мотивом введения понятия с-полукольца и исходным примером послужили идемпотентные полукольца $C(X, \mathbf{I})$ (см. лемму 6). Другой пример с-полуколец — ограниченные дистрибутивные решётки. Основы теории решёток изложены в [8].

Идеалом (*фильтром*) полукольца S называется всякое его непустое подмножество J, такое что для любых $a, b \in J$, $s \in S$ выполняются соотношения $as \in J$, $a + b \in J$ ($a + s \in J$, $ab \in J$). Идеал (фильтр) J в S называется *простым*, если его дополнение до S непусто и мультипликативно (аддитивно) замкнуто. Как частный случай получаем фильтр в решётке подмножеств данного множества. Идеал J полукольца S называется *полупростым*, если из того, что $a^2 \in J$, следует, что $a \in J$ для любого $a \in S$. Очевидно, простые идеалы являются полупростыми.

Известно, что если в полукольце S задан идеал J, не пересекающийся с мультипликативно замкнутым множеством T, то любой максимальный идеал среди содержащих J и не пересекающихся с T будет простым идеалом [15]. Следствиями этого предложения являются следующие утверждения: любой собственный идеал полукольца S содержится в некотором его максимальном идеале; максимальные идеалы в S простые; полупростые идеалы в S совпадают с пересечениями простых идеалов, их содержащих.

Легко убедиться, что как объединение, так и пересечение любой цепи простых идеалов полукольца S является простым идеалом. Поэтому в силу леммы Цорна каждый простой идеал в S не только содержится в некотором максимальном идеале, но и содержит какой-то минимальный простой идеал.

Аналогичными свойствами обладают фильтры. В с-полукольцах фильтры и идеалы связаны следующим образом.

Предложение 1. *Для подмножества J с-полукольца S эквивалентны следующие утверждения*:

1) *J — простой идеал*;
2) *$S \setminus J$ — простой фильтр*;
3) *J — идеал, $S \setminus J$ — фильтр.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Обозначим $F = S \setminus J$. Пусть J — простой идеал и $a, b \in F$. Тогда $ab \in F$. Для любого $s \in S$ справедливо $a \leqslant a + s = (\sqrt{a+s})^2$. Следовательно, в с-полукольце S a делится на $\sqrt{a+s}$, т. е. $a = \sqrt{a+s} \cdot k$ для некоторого $k \in S$. Значит, $\sqrt{a+s} \in F$ и $a + s = (\sqrt{a+s})^2 \in F$. Если $c, d \in J$, то $c + d \in J$, т. е. F — простой фильтр.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $S \setminus J$ — простой фильтр и $a, b \in J$. Тогда $a+b \in J$. Так как 1 — наибольший элемент в S, то $as+a = a(s+1) = a \in J$ для любого $s \in S$. Получаем, что $as \in J$, значит, J — идеал.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть J — идеал и $S \setminus J$ — фильтр. Тогда $ab \in S \setminus J$ для любых $a, b \in S \setminus J$. Значит, J — простой идеал. □

Поскольку для подмножеств P, Q в S $P \subseteq Q$ тогда и только тогда, когда $S \setminus Q \subseteq S \setminus P$, то из предложения 1 выводим следующий результат.

Лемма 1. *Подмножество J с-полукольца S — минимальный простой идеал (фильтр) тогда и только тогда, когда $S \setminus J$ — максимальный фильтр (идеал).*

Легко убедиться, что фильтры в с-полукольцах — это в точности непустые мультипликативно замкнутые множества, с каждым своим элементом a содержащие все элементы, бóльшие a. Симметричным свойством в с-полукольцах обладают полупростые идеалы.

Предложение 2. *Любой полупростой идеал с-полукольца S с каждым своим элементом содержит все элементы, меньшие его.*

Доказательство. Пусть P — полупростой идеал с-полукольца S. Если $a \in S$, $b \in P$ и $a \leqslant b$, то a делится на $\sqrt{b}$. Поскольку $\sqrt{b} \in P$, то $a \in P$. □

Напомним, что *аннулятором элемента* a полукольца S называется множество $\operatorname{Ann} a = \{s \in S \colon as = 0\}$, необходимо являющееся идеалом в S. Для непустого подмножества $J \subseteq S$ получаем идеал — *аннулятор* $\operatorname{Ann} J = \bigcap\limits_{a \in J} \operatorname{Ann} a$ *множества* J. Идеал вида $\operatorname{Ann} J$ называется *аннуляторным*. Для простых идеалов P полукольца S определяются множества

$$O_P = \{s \in S \colon \text{найдётся } e \in S \setminus P, \text{ такой что } se = 0\},$$

называемые иногда 0-компонентами полукольца.

Полукольцо S называется *редуцированным*, если в нём нет ненулевых нильпотентных элементов, т. е. не существует такого ненулевого элемента $a \in S$, что $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. *В любом полукольце S выполняются следующие свойства.*

1. *Для любого простого идеала P O_P является идеалом, причём в редуцированном S идеал O_P полупростой.*
2. *Для простых идеалов $P \subseteq Q$ справедливо $O_Q \subseteq O_P \subseteq P$.*

Доказательство. 1. Поскольку 0 лежит в любом идеале P и $0 \cdot 1 = 0$, то $O_P \neq \varnothing$. Пусть $a, b \in O_P$, $s \in S$. Тогда найдутся такие $e, h \in S \setminus P$, что

$ae = 0 = bh$. Получаем, что $(as) \cdot e = 0$ и $(a+b) \cdot (eh) = 0$. Так как идеал P простой, то $eh \in S \setminus P$. Значит, $as, a+b \in O_P$ и O_P — идеал.

Предположим, что полукольцо S редуцированное. Если $a^2 \in O_P$, то найдётся $e \notin P$, такой что $0 = a^2 e = (a\sqrt{e})^2$. Поэтому $a\sqrt{e} = 0 \in P$. Поскольку $\sqrt{e} \notin P$, то $a \in O_P$, т. е. идеал O_P полупростой.

2. Пусть $P \subseteq Q$. Тогда для любого $a \in O_Q$ найдётся $e \in S \setminus Q$, для которого $ae = 0$. При этом $e \in S \setminus P$, т. е. $a \in O_P$. Значит, $O_Q \subseteq O_P$. Поскольку для любого $a \in O_P$ найдётся $e \in S \setminus P$, для которого $ae = 0 \in P$, то $a \in P$ и $O_P \subseteq P$. □

Обозначим через $\operatorname{Spec} S$ множество всех простых идеалов полукольца S, через $\operatorname{Max} S$ — множество всех его максимальных идеалов и через $\operatorname{Min} S$ — множество всех его минимальных простых идеалов.

Положим

$$D(A) = \{P \in \operatorname{Spec} S \colon A \nsubseteq P\}, \quad D(a) = \{P \in \operatorname{Spec} S \colon a \notin P\}$$

для любых множества $A \subseteq S$ и элемента $a \in S$. Множества вида $D(A)$ образуют *топологию Стоуна—Зариского* на множестве $\operatorname{Spec} S$. Получаем топологическое пространство $\operatorname{Spec} S$, называемое *простым спектром* полукольца S, причём множества $D(a)$, $a \in S$, образуют в нём открытую базу. В пространстве $\operatorname{Spec} S$ выделим подпространства: *максимальный спектр* $\operatorname{Max} S$ и *минимальный спектр* $\operatorname{Min} S$ полукольца S.

Напомним, что топологическое пространство X называется T_0-*пространством* (T_1-*пространством*), если для любых его различных точек x, y найдётся открытое в X множество, содержащее ровно одну из них (содержащее x и не содержащее y). Легко убедиться, что $\operatorname{Spec} S$ — компактное T_0-пространство и $\operatorname{Max} S$ — компактное T_1-пространство.

Предложение 3 (см. [11, с. 75]). *Для любых простых идеалов P, Q полукольца S эквивалентны следующие условия*:

1) *в пространстве* $\operatorname{Spec} S$ *точки P и Q неотделимы*;
2) *$P \cap Q$ содержит простой идеал*;
3) *$O_P \subseteq Q$.*

Предложение 4. *Для любого простого идеала P редуцированного полукольца S $P \in \operatorname{Min} S$ тогда и только тогда, когда $O_P = P$.*

Доказательство. Пусть $P \in \operatorname{Min} S$. По лемме 2 получаем, что $O_P \subseteq P$. Покажем, что $O_P \supseteq P$. Пусть это не так, т. е. найдётся $a \in P \setminus O_P$. Тогда возьмём простой идеал Q, содержащий O_P и не пересекающийся с мультипликативной системой $\{a, a^2, \ldots\}$. По предложению 3 пересечение $P \cap Q$ содержит простой идеал, строго меньший P, противоречие. Получаем, что $O_P \supseteq P$, значит, $O_P = P$.

Обратно, если $O_P = P$, то по лемме 1 для любого простого идеала $Q \subseteq P$ выполняется $P = O_P \subseteq O_Q \subseteq Q$. Тогда $P = Q$ и $P \in \operatorname{Min} S$. □

Заметим, что в редуцированном полукольце S топологическое пространство $\operatorname{Min} S$ *нульмерное* (т. е. его открыто-замкнутые множества образуют базу топологии) и хаусдорфово. Действительно, пусть даны $Q_1, Q_2 \in \operatorname{Min} S$ и $a \in Q_1 \setminus Q_2$. Тогда $Q_2 \in D(a)$, $Q_1 \notin D(a)$ и в пространстве $\operatorname{Min} S$ открытое множество

$$D(a) \cap \operatorname{Min} S = \{P \in \operatorname{Min} S \colon a \notin P = O_P\} = \{P \in \operatorname{Min} S \colon \operatorname{Ann} a \subseteq P\}$$

замкнуто.

Для простого фильтра F полукольца S обозначим

$$E_F = \{s \in S \colon \text{найдётся } e \in S \setminus F, \text{ такой что } s + e = 1\}.$$

В с-полукольцах фильтры аналогично идеалам обладают следующими свойствами.

Лемма 3. *В идемпотентном полукольце S с наибольшим элементом 1 для простых фильтров F, G выполняются следующие свойства.*

1. *E_F — фильтр.*
2. *Если $F \subseteq G$, то $E_G \subseteq E_F \subseteq F$.*

Доказательство. 1. Поскольку 1 лежит в любом фильтре и $1 + 0 = 1$, то $E_F \neq \varnothing$. Пусть $a, b \in E_F$. Тогда найдутся такие $e, h \in S \setminus F$, что $a + e = 1 = b + h$. Значит, $ab + (e + h) = 1$. Так как фильтр F прост, то $e + h \in S \setminus F$ и $ab \in E_F$. Пусть $s \in S$. Тогда $(a + s) + e = 1$, значит, $a + s \in E_F$. Таким образом, E_F — фильтр.

2. Если $a \in E_G$, то найдётся $e \in S \setminus G$, такой что $a + e = 1$. Пусть $F \subseteq G$. Тогда $e \in S \setminus F$ и $E_G \subseteq E_F$. Все элементы из E_F лежат в F, так как иначе $1 \in S \setminus F$, противоречие. □

Предложение 5. *Пусть F — простой фильтр в с-полукольце S. Тогда $F = E_F$ тогда и только тогда, когда F — минимальный простой фильтр.*

Доказательство. Если $F = E_F$, то для любого простого фильтра $T \subseteq F$ выполняется $F = E_F \subseteq E_T \subseteq T$. Значит, $T = F$ и F — минимальный простой фильтр.

Пусть F — минимальный простой фильтр. Тогда по лемме 1 $M = S \setminus F$ — максимальный идеал. Для любого $a \in F$ получаем, что $M + aS = S$, т. е. найдутся такие $m \in M$, $s \in S$, что $m + as = 1$. Но в S 1 — наибольший элемент, значит, $m + a = 1$. Получили, что для любого $a \in F$ найдётся $m \in M$, для которого $m + a = 1$. Это означает, что $F \subseteq E_F$. По лемме 3 $E_F \subseteq F$, значит, $F = E_F$. □

2. Простые и чистые идеалы в идемпотентных полукольцах $C(X, \mathbf{I})$

Простые идеалы колец $C(X, \mathbb{R})$ и полуколец $C(X, \mathbb{R}^+)$ изучались в [1, 4, 16]. В этом разделе мы будем рассматривать идемпотентные полукольца $C(X, \mathbf{I})$ с операциями $\vee$ и $\cdot$.

Под *окрестностью* подмножества M пространства X понимается любое открытое множество в X, содержащее M. В частности, окрестность точки x есть любое открытое множество в X, содержащее её.

Каждой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ соответствуют *нуль-множество* $Z(f) = f^{-1}(0)$, его внутренность $Z^0(f)$ и *конуль-множество* $\operatorname{coz} f = X \setminus Z(f)$. Заметим, что множества $Z^0(f)$ образуют базу открытых множеств в X, а нуль-множества и замыкания $\overline{\operatorname{coz} f}$ конуль-множеств дают базы замкнутых множеств пространства X. В полукольце $C(X,\mathbf{I})$ все элементы, кроме 1, необратимы, однако любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ можно поставить в соответствие функцию $1-f \in C(X,\mathbf{I})$.

Каждой точке $x \in X$ отвечают следующие подмножества полукольца $C(X,\mathbf{I})$:

$$E_x = \{f \in C(X,I)\colon f = 1 \text{ на некоторой окрестности точки } x\},$$
$$O_x = 1 - E_x = \{f \in C(X,\mathbf{I})\colon x \in Z^0(f)\},$$
$$M_x = \{f \in C(X,\mathbf{I})\colon f(x) = 0\},$$
$$N_x = \{f \in C(X,\mathbf{I})\colon f(x) \neq 1\} = \{f \in C(X,\mathbf{I})\colon f(x) < 1\} = C(X,\mathbf{I}) \setminus (1 - M_x).$$

Заметим, что для любой точки $x \in X$ O_x — полупростой идеал, E_x — фильтр полукольца $C(X,\mathbf{I})$, M_x и N_x — его простые идеалы и имеют место соотношения

$$O_x \subseteq M_x \subset N_x \subseteq C(X,\mathbf{I}) \setminus E_x, \quad 1 - O_x = E_x.$$

Лемма 4. *Пусть X содержит более одной точки. Тогда для любой окрестности U точки $x \in X$ существует функция $f \in E_x$ ($g \in O_x$), для которой $f(X \setminus W) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$ ($g(X \setminus W) = \{1\}$ и $g(V) = \{0\}$) для некоторых окрестностей $V \subseteq W$ точки x, таких что $\bar{W} \subseteq U$.*

Доказательство. Так как компакт X тихоновский, существует функция $h \in C(X,\mathbf{I})$, для которой $h(x) = 1$ и $h(X \setminus U) = \{0\}$. Положим

$$f = \left(\left(h - \frac{1}{2}\right) \vee 0\right) 2 \wedge 1 \in C(X,\mathbf{I}).$$

Положим

$$W = U \setminus \left\{x \in X\colon h(x) \leqslant \frac{1}{2}\right\}, \quad V = \left\{x \in X\colon g(x) > \frac{3}{4}\right\},$$

при этом $V \subseteq W \subseteq U$ — окрестности точки x и $X \setminus W$ — окрестность множества $X \setminus U$. Тогда $f = 0$ на $X \setminus W$ и $f = 1$ на окрестности V точки x. Вместе с f в $C(X,\mathbf{I})$ содержится функция $g = 1 - f$, для которой $g(X \setminus W) = \{1\}$ и $g(V) = \{0\}$. □

Лемма 5. *Для любой точки $x \in X$ выполняются следующие утверждения*:

1) $x \in Z^0(f)$ *тогда и только тогда, когда* $f \in O_x$;
2) $x \in \overline{\operatorname{coz} f}$ *тогда и только тогда, когда* $f \notin O_x$;

3) *для любой функции* $f \in O_x$ $(g \in E_x)$ *найдётся такая функция* $h \in E_x$ $(h \in O_x)$, *что* $fh = 0$ $(g \vee h = 1)$;
4) *если* $y \in X \setminus \{x\}$, *то* $O_x \vee O_y = C(X, \mathbf{I}) = E_x \wedge E_y$.

Доказательство. Пункты 1)—3) вытекают из определений и леммы 4.

Докажем утверждение 4). Для непересекающихся окрестностей U, V точек x, y возьмём функции $g_x \in O_x$, $g_y \in O_y$, $f_x \in E_x, f_y \in E_y$ из леммы 4, т. е. такие функции, для которых выполняются соотношения $g_x \vee g_y = 1$, $f_x \wedge f_y = 0$. Тогда для любой функции $h \in C(X, \mathbf{I})$

$$h = h \wedge (g_x \vee g_y) = (h \wedge g_x) \vee (h \wedge g_y) \in O_x \vee O_y,$$
$$h = h \vee (f_x \wedge f_y) = (h \vee f_x) \wedge (h \vee f_y) \in E_x \wedge E_y. \qquad \square$$

Заметим, что в леммах 4 и 5 нужна лишь, чтобы пространство X было тихоновским.

В идемпотентном полукольце $C(X, \mathbf{I})$ отношение $f \leqslant g$ равносильно тому, что $f(x) \leqslant g(x)$ для любых $x \in X$.

Лемма 6. *Для любых* $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ *если* $f \leqslant g^2$, *то* f *делится на* g.

Доказательство. Действительно, пусть

$$h = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \in Z(g); \\ f/g, & \text{если } x \in \operatorname{coz} g. \end{cases}$$

На открытом множестве $\operatorname{coz} g$ функция h непрерывна. Пусть $x_0 \in Z(g)$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда множество $U = \{x \in X \colon g(x) < \varepsilon\}$ будет окрестностью точки x_0. Для любого $x \in U$ имеем, что $h(x) = f/g \leqslant g < \varepsilon$, а значит, и в любой точке из $Z(g)$ функция h непрерывна. Поэтому $h \in C(X, \mathbf{I})$ и $f = gh$ делится на g. $\square$

Как следствие получаем, что полукольца $C(X, \mathbf{I})$ являются c-полукольцами.

Так как $fg \leqslant f \wedge g \leqslant f \vee g$, то по предложению 2 заключаем, что простые идеалы в полукольце $C(X, \mathbf{I})$ $\wedge$-простые.

Обозначим

$$O_B = \{f \in C(X, \mathbf{I}) \colon B \subseteq Z^0(f)\}$$

для подмножества B пространства X. В частности, $O_{\{x\}} = O_x$ и $O_\varnothing = X$. Идеал J полукольца $C(X, \mathbf{I})$, такой что для любой функции $f \in J$ существует функция $e \in J$, для которой $fe = f$, называется *чистым идеалом*. Чистые идеалы кольца $C(X, \mathbb{R})$ в случае произвольного тихоновского пространства X описаны в [4]. Так же как в $C(X, \mathbb{R})$, в идемпотентных полукольцах $C(X, \mathbf{I})$ выполняется следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть* X — *компакт,* $J \subseteq C(X, \mathbf{I})$. *Тогда эквивалентны следующие условия*:

1) J — *чистый идеал*;
2) J — *мультипликативный идеал с условием, что для любых* $f, g \in J$ *найдётся функция* $e \in J$, *такая что* $fe = f$, $ge = g$;

3) *$J = O_B$ для некоторого однозначно определённого замкнутого множества $B \subseteq X$.*

Доказательство. Будем доказывать импликации по схеме

$$1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 1) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1).$$

Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 2)$. Рассмотрим произвольные $f, g \in J$. Тогда $f \vee g \in J$ и найдётся $e \in J$, такая что $(f \vee g)e = f \vee g \in J$. Тогда $fe = f$, $ge = g$.

Докажем импликацию $2) \Longrightarrow 1)$. Для любых $f, g \in J$ найдётся функция $e \in J$, такая что $fe = f$, $ge = g$. Тогда $f \vee g = ef \vee eg = e(f \vee g)$. Поскольку J — идеал, то $f \vee g \in J$.

Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 3)$. Пусть J — полукольцевой идеал и для любой $f \in J$ найдётся функция $e \in J$, такая что $fe = f$. Пусть $B = \bigcap\limits_{f \in J} Z(f)$ — замкнутое подмножество в X. Тогда для любой $f \in J$ найдётся $e_f \in J$, такая что

$$Z^0(f) = X \backslash \overline{\{x, f(x) \neq 0\}} \supseteq X \backslash \overline{\{x \colon e_f(x) = 1\}} = X \backslash \{x \colon e_f(x) = 1\} \supseteq Z(e_f) \supseteq B,$$

т. е. $Z^0(f) \supseteq B$. Значит, $B = \bigcap\limits_{f \in J} Z^0(f)$ и $J \subseteq O_B$.

Докажем обратное включение. Пусть $g \in O_B$, т. е. $B \subseteq Z^0(g)$. Для любой функции $f \in J$ имеем, что $B \subseteq Z^0(f)$. Для любой точки $x \in X \setminus B$ найдётся такая функция $f \in J$, что $x \notin Z(f)$, т. е. для любой точки $x \in X \backslash Z^0(g)$ найдётся такая функция $f \in J$, что $x \in X \setminus Z(f) = U$, где U открыто. Получаем, что U_i — открытое покрытие $X \setminus Z^0(g)$. Как замкнутое подмножество компактного пространства, $X \setminus Z^0(g)$ компактно. Значит, для $X \setminus Z^0(g)$ существует конечное подпокрытие $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$ и $Z(f_{i_1} \vee \ldots \vee f_{i_k}) \subseteq Z(g)$. Для функции $f_{i_1} \vee \ldots \vee f_{i_k}$ найдётся такая функция $e \in J$, что $(f_{i_1} \vee \ldots \vee f_{i_k})e = f_{i_1} \vee \ldots \vee f_{i_k}$. Тогда $ge = g \in J$. Значит, $O_B \supseteq J$.

Докажем импликацию $3) \Longrightarrow 1)$. Для любых функций $f, g \in O_B$, $h \in C(X, \mathbf{I})$ получаем, что $f \vee g \in O_B$ и $fh \in O_B$, т. е. O_B — полукольцевой идеал. Пусть $f \in O_B$. По лемме 4 существует $e_1 \in C(X, \mathbf{I})$, равная 0 на B и 1 на $\overline{\operatorname{coz} f}$. Тогда функции f будет соответствовать функция $e = 2\big((e_1 - 1/2) \vee 0\big) \in O_B$. □

Получаем, что O_B по всем замкнутым множествам $B \subseteq X$ — это в точности чистые идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$. Максимальными среди чистых идеалов будут $O_x = O_{\{x\}}$ для всех $x \in X$.

Следствие 1. *Пусть $\alpha \colon C(X, \mathbf{I}) \to C(Y, \mathbf{I})$ — мультипликативный изоморфизм. Тогда для любой точки $x \in X$ выполняется равенство $\alpha(O_x) = O_y$ для некоторой точки $y \in Y$ и компакты X, Y гомеоморфны.*

Доказательство. Пусть $\alpha \colon C(X, \mathbf{I}) \to C(Y, \mathbf{I})$ — мультипликативный изоморфизм. Получаем отображение $\varphi \colon X \to Y$, $\varphi(x) = y$, где $\alpha(O_x) = O_y$. При этом φ — непрерывное и взаимно-однозначное отображение, сохраняющее открытые множества $Z^0(f)$, $f \in C(X, \mathbf{I})$. Значит, φ — гомеоморфизм компактов X и Y. □

Следствие 2. *Для любых компактов X и Y эквивалентны следующие условия*:

1) *полукольца $C(X,\mathbf{I})$ и $C(Y,\mathbf{I})$ изоморфны*;
2) *мультипликативные полугруппы $C(X,\mathbf{I})$ и $C(Y,\mathbf{I})$ изоморфны*;
3) *компакты X и Y гомеоморфны.*

Теорема 1. *Любой простой идеал P полукольца $C(X,\mathbf{I})$ обладает следующими свойствами*:

1) *$O_x \subseteq P$ для однозначно определённой точки $x \in X$*;
2) *$P \subseteq C(X,\mathbf{I}) \setminus E_x$ для некоторой единственной точки $x \in X$*;
3) *если $O_x \subseteq P$, то $P \subseteq M_x$ или $N_x \subseteq P$.*

Доказательство. Докажем свойство 1). Пусть утверждение неверно. Тогда для любой точки $x \in X$ найдётся такая $f \in O_x \setminus P$, что $f(x) = 0$ на некоторой окрестности U_x точки x. Для открытого покрытия U_x, $x \in X$, компакта X существует конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_k$, для которого $0 = f_1 \cdot \ldots \cdot f_k \in \in S \setminus P$, противоречие. Значит, P содержит O_x для некоторой точки $x \in X$. Единственность этой точки вытекает из пункта 4) леммы 5.

Докажем 2). Как следствие из пункта 1) и леммы 4 получаем существование точки x, а её единственность следует из пункта 4) леммы 5.

Докажем утверждение 3). Возьмём простой идеал $P \supseteq O_x$. Предположим, что найдётся функция $f \in P \setminus M_x$. Идеал P вместе с любой функцией f содержит всевозможные корни $\sqrt[n]{f}$, $n \in \mathbb{N}$. Значение функций $\sqrt[n]{f}$ в точке x стремится к 1 при $n \to \infty$. Возьмём произвольную функцию $g \in N_x$, $g(x) = a < 1$. Тогда на некоторой окрестности U точки x $g(x) < a + (1-a)/2$. Найдётся такой корень $\sqrt[n]{f} \in P$, что $\sqrt[n]{f} > a + (1-a)/2$ в точке x, а значит, и на некоторой её окрестности V. Возьмём функцию $h \in E_x \subseteq C(X,\mathbf{I}) \setminus P$, равную 1 на такой окрестности W точки x, что $\bar{W} \subseteq U \cap V$, и равную 0 на $X \setminus (U \cap V)$. Получим, что $gh \leqslant \sqrt[n]{f}h \in P$. По предложению 2 $gh \in P$, значит, $g \in P$. Поэтому $N_x \subseteq P$. $\square$

Заметим, что из доказательства теоремы 1 мы получаем, что любой простой мультипликативный идеал в $C(X,\mathbf{I})$ содержит O_x для некоторой точки $x \in X$.

Предложение 7. *Пусть $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ — полукольцевой эпиморфизм. Тогда в X найдётся такая* (*единственная*) *точка x, что*

1) *$\alpha(O_x) = \{0\}$, $\alpha(1 - O_x) = \{1\}$*;
2) *функции, равные на окрестности x, имеют равные образы*;
3) *для любых функций $f, g \in C(X,\mathbf{I})$ из того, что $f(x) < g(x)$, следует, что $\alpha(f) \leqslant \alpha(g)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Множество $\{0\}$ является простым идеалом полукольца $\mathbf{I}$, его прообраз $J = \alpha^{-1}(0)$ также будет простым идеалом. По теореме 1 найдётся такая точка $x \in X$, что $O_x \subseteq J$, причём эта точка единственная. Получаем, что $\alpha(O_x) = \{0\}$.

Покажем, что $\alpha(1-O_x)=\{1\}$. Пусть $f\in 1-O_x$, т. е. $f(U)=1$ на некоторой окрестности U точки x. По лемме 4 найдётся функция $g\in O_x$, на замкнутых множествах $V\subseteq U$ и $X\setminus U$ равная соответственно 0 и 1. Получаем, что $1=\alpha(f\vee g)=\alpha(f)\vee 0=\alpha(f)$.

Далее покажем, что справедливо утверждение 2), т. е. что функции $f,g\in C(X,\mathbf{I})$, равные на окрестности U точки x, имеют равные образы при отображении α. Возьмём открытое множество V, замыкание которого содержится в множестве U. По лемме 4 существует функция h, равная 1 на $\bar{V}$ и 0 на $X\setminus U$. По утверждению 1) $\alpha(h)=1$. Тогда имеем следующую последовательность импликаций:

$$hf=hg\Longrightarrow\alpha(hf)=\alpha(hg)\Longrightarrow\alpha(h)\alpha(f)=\alpha(h)\alpha(g)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 1\cdot\alpha(f)=1\cdot\alpha(g)\Longrightarrow\alpha(f)=\alpha(g).$$

Для доказательства утверждения 3) построим вспомогательные функции. Обозначим $m=g(x)$, $n=f(x)$, $c=(m+n)/2$. Так как функции f, g непрерывны, то следующие множества будут открытыми:

$$U_1=\left\{x\in X\colon c<g(x)<\frac{1+m}{2}\right\},\quad U_2=\left\{x\in X\colon \frac{n}{2}<f(x)<c\right\}.$$

Получаем окрестности U_1, U_2 точки x. Найдётся открытое множество V, замыкание которого содержится в $U=U_1\cap U_2$. По лемме 4 существует непрерывная функция φ_1, равная 1 на $\bar{V}$ и 0 на $X\setminus U$. Положим $\gamma_1=1-\varphi_1$, $\varphi=\varphi_1\cdot c$, $\gamma=\gamma_1\vee c$. Получим, что $\varphi\leqslant g$, $f\leqslant\gamma$ и $\varphi(x)=\gamma(x)=c$ на $\bar{V}$. Из сохранения $\vee$ и пункта 2) следует, что $\alpha(f)\leqslant\alpha(\gamma)=\alpha(\varphi)\leqslant\alpha(g)$, т. е. $\alpha(f)\leqslant\alpha(g)$. □

Идеал J полукольца $C(X,\mathbf{I})$ называется *z-идеалом*, если для любых $f\in J$, $g\in C(X,\mathbf{I})$ из равенства $Z(f)=Z(g)$ следует, что $g\in J$.

Предложение 8. *Для любого простого идеала P полукольца $C(X,\mathbf{I})$ идеал O_P обладает следующими свойствами*:

1) *$O_x\subseteq O_P$ для однозначно определённой точки $x\in X$, такой что $O_x\subseteq P$*;
2) *O_P равен пересечению всех минимальных простых идеалов полукольца $C(X,\mathbf{I})$, его содержащих*;
3) *O_P — z-идеал.*

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из пункта 3) леммы 5 и пункта 2) теоремы 1.

Докажем утверждение 2). По утверждению 1 леммы 2 O_P — полупростой идеал, а значит, совпадает с пересечением простых идеалов, его содержащих. Но любой минимальный простой идеал $Q=O_Q$ (предложение 4), содержащийся в P, содержит O_P по утверждению 2 леммы 2. Значит, O_P равен пересечению всех минимальных простых идеалов полукольца $C(X,\mathbf{I})$, его содержащих.

Докажем утверждение 3). Пусть $f\in O_P$ и $Z(f)=Z(g)$. Существует функция $h\in C(X,\mathbf{I})\setminus P$, для которой $fh=0$. Поэтому $gh=0$, откуда следует, что $g\in O_P$. □

Замечание 1. Рассмотрим произвольный простой идеал P полукольца $C(X,\mathbf{I})$, содержащий O_x для фиксированной точки $x \in X$. По утверждению 3) теоремы 1 $P \subseteq M_x$ или $M_x \subseteq N_x \subseteq P$. Если P — минимальный простой идеал, то $O_x \subseteq O_P = P \subseteq M_x$ в силу предложения 4. Ясно, что $O_{M_x} = O_x$. Поэтому если $P \supseteq M_x$, то по лемме 2 $O_P \subseteq O_x$. С другой стороны, $O_x \subseteq O_P$ по утверждению 2) предложения 8. Если P — максимальный идеал, то $P \supseteq N_x$, и $O_P = O_x$. Очевидно, что никакой минимальный простой идеал P полукольца $C(X,\mathbf{I})$, содержащий O_x, не содержит функций $f \in C(X,\mathbf{I})$, для которых $\operatorname{Ann} f \subseteq O_x$. В силу предложений 4 и 8 минимальные простые идеалы полукольца $C(X,\mathbf{I})$ являются z-идеалами.

Лемма 7. *Если F — фильтр в полукольце $C(X,\mathbf{I})$, то $1-F$ — идеал.*

Доказательство. Поскольку $0 \in 1-F$, то $1-F \neq \varnothing$. Заметим, что $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $1-f \geqslant 1-g$ для любых $f,g \in C(X,\mathbf{I})$. Так как фильтр F с каждым своим элементом содержит все бóльшие его элементы, то $1-F$ с каждым своим элементом содержит все меньшие его элементы. Для $f \in 1-F$ и $c \in C(X,\mathbf{I})$ получаем, что $f \geqslant fc \in 1-F$. Пусть $g,h \in F$. Тогда $gh \in F$ и $gh \leqslant g \wedge h \in F$. Получаем, что $(1-g)\vee(1-h) = 1-(g\wedge h) \in 1-F$. □

Лемма 8. *Если P — простой идеал в полукольце $C(X,\mathbf{I})$, то $1-P$ с каждым своим элементом содержит все элементы, бóльшие его, и множество $C(X,\mathbf{I}) \setminus (1-P)$ замкнуто относительно $\vee$.*

Доказательство. Поскольку $1 \in 1-P$, то $1-P \neq \varnothing$. Так как по предложению 2 простой идеал P с каждым своим элементом содержит элементы, меньшие его, то $1-P$ с каждым своим элементом содержит элементы, бóльшие его. Если $f,g \in C(X,\mathbf{I}) \setminus P$, то

$$(1-f)\vee(1-g) = 1-(f\wedge g) \in 1-(C(X,\mathbf{I})\setminus P) = C(X,\mathbf{I})\setminus(1-P). \qquad \square$$

Лемма 9. *Если P — простой идеал в полукольце $C(X,\mathbf{I})$ и $P \subseteq M_x$, то $1-P$ — простой фильтр.*

Доказательство. Ввиду леммы 8 достаточно показать замкнутость множества $1-P$ относительно умножения. Имеем, что

$$(1-f)\cdot(1-g) = 1-(f+g-fg)$$

для любых $f,g \in P$. Но

$$f\vee g = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \geqslant \frac{1}{2}(f+g-fg).$$

Так как $f\vee g \in P$ и $1/2 \notin P$, то $f+g-fg \in P$ и $(1-f)\cdot(1-g) \in 1-P$. □

Далее заметим, что для любых функций $f,e \in C(X,\mathbf{I})$

$$fe = 0 \Longleftrightarrow f\wedge e = 0 \Longleftrightarrow 1-(f\wedge e) = 1 \Longleftrightarrow (1-f)\vee(1-e) = 1$$

и

$$e \in M \Longleftrightarrow 1-e \in 1-M.$$

Предложение 9. *Подмножество P полукольца $C(X,\mathbf{I})$ является его минимальным простым идеалом тогда и только тогда, когда $1-P$ есть минимальный простой фильтр.*

Доказательство. Пусть P — минимальный простой идеал. По предложению 4 имеем, что $P = O_P$. Согласно лемме 9 и замечанию 1 нужно доказать минимальность простого фильтра $1-P$. Поскольку

$$\begin{aligned}1 - O_P &= \{1-f \in C(X,\mathbf{I})\colon \text{найдётся } e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus P, \text{ такая что } fe = 0\} = \\ &= \{1-f \in C(X,\mathbf{I})\colon \text{найдётся } (1-e) \in C(X,\mathbf{I}) \setminus (1-P), \\ &\quad \text{такая что } (1-f) \vee (1-e) = 1\} = E_{1-P},\end{aligned}$$

то $1-P = E_{1-P}$, и по предложению 5 $1-P$ — минимальный простой фильтр полукольца $C(X,\mathbf{I})$.

Обратно, пусть F — минимальный простой фильтр в $C(X,\mathbf{I})$. По лемме 7 $1-F$ — идеал. Пусть $f,g \notin 1-F$ и $fg \in 1-F$. Тогда $1-fg \in F = E_F$ и найдётся такой $e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus F$, что $(1-fg) \vee e = 1$. Имеем следующую последовательность эквивалентностей:

$$(1-fg) \vee e = 1 \Longleftrightarrow (1-f \wedge g) \vee e = 1 \Longleftrightarrow \big((1-f) \vee (1-g)\big) \vee e = 1.$$

Поэтому $(1-f) \vee (1-g) \in F$, что противоречит простоте фильтра F. Значит, $1-F$ — простой идеал. Имеем, что

$$\begin{aligned}1 - F &= 1 - E_F = \\ &= \{1-f \in C(X,\mathbf{I})\colon \text{найдётся } e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus F, \text{ такая что } f \vee e = 1\} = \\ &= \{1-f \in C(X,\mathbf{I})\colon \text{найдётся } 1-e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus (1-F), \\ &\quad \text{такая что } (1-f)\cdot(1-e) = 0\} = 0_{1-F}.\end{aligned}$$

Следовательно, $1-F$ — минимальный простой идеал по предложению 5. □

Из леммы 1 и предложений 4 и 9 выводим следующую теорему.

Теорема 2. *Для любого компакта X максимальные идеалы полукольца $C(X,\mathbf{I})$ — это в точности идеалы вида $C(X,\mathbf{I}) \setminus (1-P)$ по всем простым идеалам P полукольца $C(X,\mathbf{I})$, совпадающим с O_P.* □

Следствие 3. *Подмножество F в $C(X,\mathbf{I})$ является максимальным фильтром тогда и только тогда, когда $1-F$ — максимальный идеал.*

Для произвольной точки $x \in X$ зададим конгруэнцию ρ_x на полукольце $C(X,\mathbf{I})$, положив для любых $f,g \in C(X,\mathbf{I})$

$$f\ \rho_x\ g \Longleftrightarrow f = g \text{ на некоторой окрестности точки } x.$$

В фактор-полукольце $C(X,\mathbf{I})/\rho_x$ введём отношение $\preceq$:

$$[f]_{\rho_x} \preceq [g]_{\rho_x} \Longleftrightarrow f \leqslant g \text{ на некоторой окрестности точки } x,$$

Очевидно, это отношение порядка.

Лемма 10. *Пусть P — простой идеал, содержащий O_x. Если $f \in P$ и $[g] \preceq [f]$, то $g \in P$. В частности, если $f \in P$ и $[f] = [g]$, то $g \in P$.*

Доказательство. Пусть P — простой идеал, содержащий O_x, $f \in P$, $g \in C(X, \mathbf{I})$. Если $[g] \preceq [f]$, то $g \leqslant f$ на некоторой окрестности U точки x. Возьмём функцию $e \in E_x$ из леммы 4, равную 0 на окрестности множества $X \setminus U$ и 1 на окрестности точки x. Тогда $ge \leqslant fe \in P$, откуда по предложению 2 получаем, что $ge \in P$. По теореме 1 $e \notin P$, значит, $g \in P$. □

Таким образом, принадлежность функции f к простому идеалу P, содержащему O_x, определяется её значениями на некоторой окрестности точки x. Рассмотрим канонический эпиморфизм $\pi\colon C(X, \mathbf{I}) \to C(X, \mathbf{I})/\rho_x$, для которого $\pi(f) = [f]$, $f \in C(X, \mathbf{I})$. Тогда $\pi(O_x) = [\mathbf{0}]$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 11. *Канонический эпиморфизм $\pi\colon C(X, \mathbf{I}) \to C(X, \mathbf{I})/\rho_x$ задаёт взаимно-однозначное соответствие между простыми идеалами P в $C(X, \mathbf{I})$, содержащими O_x, и простыми идеалами $\pi(P)$ фактор-полукольца $C(X, \mathbf{I})/\rho_x$.*

Доказательство. Очевидно, что для эпиморфизма $\alpha\colon S \to T$ коммутативных полуколец прообраз простого идеала прост.

Обратно, пусть P — простой идеал в $C(X, \mathbf{I})$, содержащий O_x. Очевидно, что $\pi(P)$ — идеал. Покажем, что он простой. Обозначим $S = C(X, \mathbf{I})/\rho_x$. Пусть $[f], [g] \in S \setminus \pi(P)$. Тогда $f, g \in C(X, \mathbf{I}) \setminus P$, поэтому $fg \in C(X, \mathbf{I}) \setminus P$. Значит, $[f][g] = \pi(f)\pi(g) = \pi(fg) \in S \setminus \pi(P)$ по лемме 10. □

Точка $x \in X$ называется *F-точкой*, если для любых функций $f, g \in C(X, \mathbf{I})$ из того, что $x \in Z^0(fg)$, следует, что $x \in Z^0(f) \cup Z^0(g)$. Точка $x \in X$ называется *P-точкой*, если из того, что $x \in Z(f)$, следует, что $x \in Z^0(f)$ для любой $f \in C(X, \mathbf{I})$.

Очевидно, изолированные точки являются P-точками, а P-точки являются F-точками.

Теорема 3. *Для любой точки x компакта X эквивалентны следующие утверждения*:

1) *$x \in X$ — F-точка*;
2) *идеал O_x простой*;
3) *множество $C(X, \mathbf{I}) \setminus E_x$ — идеал*;
4) *множество $C(X, \mathbf{I}) \setminus E_x$ — максимальный идеал*;
5) *$C(X, \mathbf{I})/\rho_x$ — линейно упорядоченное полукольцо относительно порядка $\preceq$*;
6) *в $C(X, \mathbf{I})$ все простые идеалы, содержащие O_x, образуют цепь*;
7) *в $C(X, \mathbf{I})$ все простые идеалы, содержащие M_x, образуют цепь.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) вытекает из определений F-точки и идеала O_x. Поскольку $C \setminus (1 - O_x) = C \setminus E_x$, то по теоремам 2 и 1 получаем, что 2) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 4). Импликация 6) $\Longrightarrow$ 7) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $x \in X$ — F-точка. Покажем, что порядок $\preceq$ на S линейный. Возьмём $[f], [g] \in S$, $f, g \in C(X, \mathbf{I})$. Рассмотрим в $C(X, \mathbf{I})$

функции $h_1 = (f-g)\vee 0$ и $h_2 = (g-f)\vee 0$. Имеем, что $Z(h_1h_2) = X$. Поскольку x — F-точка, то $x \in Z^0(h_1) \cup Z^0(h_2)$. Если $x \in Z^0(h_1)$, то $f \leqslant g$ на окрестности $Z^0(h_1)$ точки x, если же $x \in Z^0(h_2)$, то $g \leqslant f$ на окрестности $Z^0(h_2)$ точки x. Значит, $[f] \preceq [g]$ или $[g] \preceq [f]$.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 6). Пусть для $C(X,\mathbf{I})/\rho_x$ выполняется утверждение 5). Возьмём произвольные простые идеалы P и Q в полукольце $C(X,\mathbf{I})$, содержащие O_x. Если $P \nsubseteq Q$, то найдётся $p \in P \setminus Q$. Для любой функции $g \in Q$ по лемме 10 справедливо $[p] \neq [g]$. Так как полукольцо $C(X,\mathbf{I})/\rho_x$ линейно упорядоченное, то элементы $[p]$, $[g]$ сравнимы. По лемме 10 $[p] \nleq [g]$. Значит, $[g] \leqslant [p]$ и $g \in P$. Получаем, что $Q \subseteq P$, т. е. в $C(X,\mathbf{I})$ все простые идеалы, содержащие O_x, образуют цепь.

Докажем импликацию 7) $\Longrightarrow$ 2). Пусть в $C(X,\mathbf{I})$ все простые идеалы, содержащие M_x, образуют цепь. Тогда получаем единственность максимального идеала, содержащего O_x. По теореме 2 единственным будет и минимальный простой идеал, содержащий O_x. Этим минимальным простым идеалом будет O_x. □

Предложение 10. *Для любой точки x компакта X равносильны следующие условия*:

1) x — *P-точка*;
2) $O_x = M_x$;
3) $C(X,\mathbf{I}) \setminus E_x = N_x$;
4) N_x — *максимальный идеал.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2) и 3) вытекает из определений P-точки и N_x.

По утверждению 2) теоремы 1 получаем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4).

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 2). Если N_x — максимальный идеал в $C(X,\mathbf{I})$, то $M_x = 1-(C(X,\mathbf{I})\setminus N_x)$ — минимальный простой идеал, т. е. $M_x = O_{M_x} = O_x$. □

Таким образом, если $x \in X$ — P-точка, то существуют ровно два простых идеала полукольца $C(X,\mathbf{I})$, содержащих O_x: M_x и N_x.

Пример 1. В индуцированной топологии числовое множество

$$X = \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$$

является нульмерным компактом, в котором все точки $x \neq 0$ изолированные. Пространство X служит одноточечной компактификацией Александрова счётного дискретного пространства $\{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Открытыми множествами в X являются все его подмножества, не содержащие 0, и подмножества, содержащие 0 и имеющие конечные дополнения в X. Все замкнутые множества в X — нуль-множества.

Все точки $0 \neq x \in X$ являются P-точками, $O_x = M_x$ — минимальный простой идеал полукольца $C(X,\mathbf{I})$, N_x — максимальный идеал, единственный среди простых идеалов, строго содержащий O_x.

Точка 0 не является F-точкой, значит, не будет и P-точкой. Найдём минимальные простые идеалы P в $C(X,\mathbf{I})$, содержащие идеал

$$O_0 = \{f \in C(X,\mathbf{I})\colon \operatorname{coz} f \text{ — конечное множество изолированных точек из } X\}.$$

По теореме 1 и замечанию 1 $P \subseteq M_0$ и P — z-идеал. Покажем, что никакая функция $f \in M_0$ с конечным нуль-множеством $Z(f)$ не принадлежит P. Действительно, предположим от противного, что в P нашлась функция f с конечным нуль-множеством: $Z(f) = \{0, x_1, \ldots, x_k\}$, $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Возьмём в E_0 функцию

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_1/2; \\ 1, & \text{если } x > x_1/2. \end{cases}$$

Так как на окрестности $[0, x_1/2]$ функции f и g совпадают, то по лемме 10 $g \in P$. А так как $P = O_P$, то найдётся такая функция $e \in C(X,\mathbf{I}) \setminus P$, что $ge = 0$. Получаем, что $\operatorname{coz} e = \{0\}$, т. е. точка 0 изолированная, противоречие.

Обозначим через L решётку всех подмножеств (нуль-множеств) в X, содержащих точку 0. Решётка L является булевой решёткой с наименьшим элементом $\{0\}$, поэтому простые фильтры $\mathcal{F}$ решётки L максимальные, т. е. для любого подмножества $A \in L$ либо $A \in \mathcal{F}$, либо его дополнение $A' \in \mathcal{F}$. Фильтры $\mathcal{F}$, не содержащие конечных множеств, называются *свободными*. Любой фильтр решётки L является фильтром и решётки $Z(X)$ всех нуль-множеств пространства X. Только свободные максимальные фильтры $\mathcal{F}$ в L будут простыми фильтрами в $Z(X)$.

Пусть P — минимальный простой идеал в $C(X,\mathbf{I})$, содержащий O_0. Тогда $Z[P] = \{Z(f)\colon f \in P\}$ будет свободным максимальным фильтром в L, причём $P = Z^{-1}\big[Z[P]\big]$, поскольку минимальные простые идеалы являются z-идеалами.

Пусть $\mathcal{F}$ — свободный максимальный фильтр в L. Тогда

$$Z^{-1}[\mathcal{F}] = \{f \in C(X,\mathbf{I})\colon Z(f) \in \mathcal{F}\} -$$

простой z-идеал в $C(X,\mathbf{I})$, содержащий O_0. Если $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ содержит минимальный простой идеал P_0, то $Z[P_0] \subseteq \mathcal{F}$, где $Z[P_0]$ — свободный максимальный фильтр решётки L. Получаем, что $Z[P_0] = \mathcal{F}$ и $Z^{-1}[\mathcal{F}] = P_0$. Значит, идеалы $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ по всем свободным максимальным фильтрам $\mathcal{F}$ в L — это в точности минимальные простые идеалы, содержащие O_x.

Пусть $P \subseteq M_0$ — простой идеал в $C(X,\mathbf{I})$, не содержащий функций с конечным нуль-множеством. Так как $Z[P]$ — свободный максимальный фильтр решётки L, то по доказанному $Z^{-1}\big[Z[P]\big]$ — минимальный простой идеал и $P \subseteq Z^{-1}\big[Z[P]\big]$. Поэтому $P = Z^{-1}\big[Z[P]\big]$ — минимальный простой идеал.

Таким образом, все простые идеалы $P \subseteq M_0$ полукольца $C(X,\mathbf{I})$, не содержащие функций f с $Z(f) = \{0\}$, совпадают с идеалами $Z^{-1}[\mathcal{F}]$ по всем свободным максимальным фильтрам $\mathcal{F}$ булевой решётки L.

Заметим также, что в данном примере любой содержащий O_0 простой z-идеал либо является минимальным, либо содержит M_0. Приведём пример простого

идеала $P \subseteq M_0$, не являющегося z-идеалом. Возьмём в $C(X,\mathbf{I})$ функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ 1/(1/x)!, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

и $h(x) = x$. Заметим, что в $C(X,\mathbf{I})$ не существует функции c, для которой $cf = h^k$ при $k \in \mathbb{N}$. Действительно, если $cf = h^k$, то при $x \to 0$ ($n \to \infty$) имеем

$$c = \frac{h^k}{f} = \frac{n!}{n^k} \to \infty,$$

противоречие. Обозначим через P простой идеал, содержащий идеал $C(X,\mathbf{I})f \cup \cup O_0$ и не пересекающийся с мультипликативной системой $\{h, h^2, \ldots\}$. Очевидно, P не является z-идеалом и $P \subseteq M_0$.

По теореме 2 максимальные идеалы M полукольца $C(X,\mathbf{I})$, содержащие O_0, имеют вид

$$M = \{f \in C(X,\mathbf{I})\colon f \not\equiv 1 \text{ ни на каком множестве } A \in \mathcal{F}\},$$

где $\mathcal{F}$ — произвольный свободный максимальный фильтр булевой решётки L.

3. Мультипликативные и полукольцевые гомоморфизмы идемпотентных полуколец $C(X,\mathbf{I})$

А. Н. Милграм [18] в 1949 г. описал все мультипликативные изоморфизмы $\alpha\colon C(X,\mathbb{R}) \to C(Y,\mathbb{R})$ колец непрерывных функций на произвольных компактах X и Y.

Теорема А. *Пусть X, Y — компакты и $\alpha\colon C(X,\mathbb{R}) \to C(Y,\mathbb{R})$ — мультипликативный изоморфизм. Тогда существуют*

1) *гомеоморфизм $\varphi\colon X \to Y$,*
2) *непрерывная положительная функция $r \in C(X,\mathbb{R})$,*
3) *возможно, конечное множество изолированных точек $x_1, \ldots, x_n$ и автоморфизмы $\tau_1, \ldots, \tau_n$ мультипликативной полугруппы вещественных чисел,*

такие что $\alpha(f)\big(\varphi(x)\big) = \big(\operatorname{sign} f(x)\big)|f(x)|^{r(x)}$ для любых $f \in C(X,\mathbb{R})$ и $x \in X$, $x \neq x_i$ и $\alpha(f)\big(\varphi(x_i)\big) = \tau_i\big(f(x_i)\big)$ при $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, что в условиях теоремы А $\alpha(M_x) = M_{\varphi(x)}$ для всех $x \in X$ (это равенство остаётся верным и в более общей ситуации (см. [2])).

Рассмотрим случай мультипликативного изоморфизма $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$.

В 2007 г. в [14] было введено следующее понятие стандартной точки: точка $y \in Y$ называется *стандартной для мультипликативного изоморфизма* $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$, если существуют такие точка $x \in X$ и число $r \in (0,+\infty)$, что $\alpha(f)(y) = f(x)^r$ для любых $f \in C(X,\mathbf{I})$. Аналогично вводится определение

стандартной точки для гомоморфизма $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$. Множество стандартных точек для α обозначим через $R(\alpha)$. Назовём мультипликативный гомоморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ *стандартным*, если существуют такие непрерывные отображения $\varphi\colon Y \to X$ и $r\colon Y \to (0,+\infty)$, что $\alpha(f)(y) = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)}$ для любых $f \in C(X,\mathbf{I})$ и $y \in Y$. Для таких стандартных гомоморфизмов введём обозначение $\alpha = \alpha[\varphi, r]$. Очевидно, стандартный гомоморфизм является полукольцевым.

Для α положим

$$R_1(\alpha) = \big\{y \in Y\colon \text{найдётся } f \in C(X,\mathbf{I}), \\ \text{такая что } \big(f\big(\varphi(y)\big) \notin \{0,1\} \text{ и } \alpha(f)(y) \notin \{0,1\}\big)\big\}.$$

В [14] был получен следующий результат для мультипликативных изоморфизмов полуколец $C(X,\mathbf{I})$ и $C(Y,\mathbf{I})$.

Теорема B. *Пусть X, Y — компакты и $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ — мультипликативный изоморфизм. Тогда*

1) *существуют такие гомеоморфизм $\varphi\colon Y \to X$ и непрерывное отображение $r\colon R(\alpha) \to (0,+\infty)$, что $\alpha(f)(y) = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)}$ для любых $f \in C(X,\mathbf{I})$, $y \in R(\alpha)$;*
2) *r продолжается до непрерывного отображения $Y \to [0,+\infty]$, которое в точках $y \in Y \setminus R(\alpha)$ принимает значения 0, $+\infty$;*
3) *$R(\alpha) = R_1(\alpha)$ и $Y = \beta R(\alpha)$, где β — стоун-чеховская компактификация подпространства $R(\alpha)$.*

Как следствия из теоремы B получаются следующие три утверждения.

Предложение 11. *Пусть $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ — мультипликативный изоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi\colon Y \to X$ и $\alpha = \beta \circ \alpha_1$, где $\alpha_1\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(R(\alpha),\mathbf{I})$, $\alpha_1(f)(y) = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)}$, $f \in C(X,\mathbf{I})$, $y \in R(\alpha)$, β — стоун-чеховская компактификация $R(\alpha)$.*

Предложение 12. *Любой мультипликативный изоморфизм*

$$\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$$

является полукольцевым, т. е. сохраняет операцию $\vee$.

Предложение 13 (см. [17]). *Для компактов с первой аксиомой счётности X, Y любой мультипликативный изоморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ является стандартным.*

Заметим, что в условиях теоремы B для стандартных точек $y \in Y$ выполняется $\alpha^{-1}(M_y) = M_{\varphi(y)}$. Для нестандартных точек это свойство не выполняется. Приведём пример мультипликативного изоморфизма, который переводит константы, отличные от 1, в функции из M_y.

Пример 2. Пусть $X = \beta((0,1))$ — стоун-чеховская компактификация числового интервала $(0,1)$. Рассмотрим непрерывное отображение $r\colon (0,1) \to [4,+\infty)$,

$r(x) = 1/(x - x^2)$. Зададим отображение $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(X,\mathbf{I})$ следующим образом: для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ положим $\alpha(f) = \beta(f^r)$. Функция $f^r \in C\big((0,1),\mathbf{I}\big)$ непрерывная и ограниченная на интервале $(0,1)$. Тогда $\alpha(f) \in C(X,\mathbf{I})$. Очевидно, что α — полукольцевой гомоморфизм. Прообразом произвольной функции $g \in C(X,\mathbf{I})$ будет функция f, заданная формулой $f = \beta(g^{1/r})$. Поэтому α — изоморфизм.

Для любой точки $x \in X \setminus (0,1)$ $\alpha^{-1}(M_x)$ содержит все константы $0 \leqslant c < 1$, т. е. $\alpha(c)(x) = 0$. Для точки x из нароста $X \setminus (0,1)$ получаем нестандартный полукольцевой эпиморфизм $\alpha_x\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, $\alpha_x = \pi_x \circ \alpha$, где $\pi_x\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, $\pi_x(f) = f(x)$ для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ (такое отображение π_x называется *вычислением в точке* x).

Из утверждения 2) теоремы B получаем, что если подпространство $R(\alpha)$ *псевдокомпактно* (т. е. любая функция на нём является ограниченной), то $R(\alpha) = Y$. С учётом равенства $Y = \beta R(\alpha)$ в [14] был получен следующий критерий существования нестандартной точки.

Теорема C. *Пусть X, Y — компакты. Следующие условия эквивалентны*:

1) *существует мультипликативный изоморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$, не являющийся стандартным*;
2) *X и Y гомеоморфны и существует такое непсевдокомпактное подмножество $Z \subset Y$, что $Y = \beta Z$.*

Рассмотрим теперь произвольный мультипликативный гомоморфизм

$$\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$$

идемпотентных полуколец.

Пусть $\varphi\colon Y \to X$ — непрерывное отображение компактов. Через α_φ обозначим такое отображение $C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$, что $\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi$ — композиция отображений φ и f для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$. Получаем, что $\alpha_\varphi = \alpha[\varphi,1]$.

Лемма 12. *Для непрерывных отображений $\varphi\colon Y \to X$ и $r\colon Y \to (0,+\infty)$ если $\varphi \neq \psi$, то $\alpha[\varphi,r] \neq \alpha[\psi,r]$, в частности $\alpha_\varphi \neq \alpha_\psi$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \neq \psi$. Тогда найдётся точка $y \in Y$, в которой $\varphi(y) \neq \psi(y)$. Поскольку X тихоновский, существует функция $f \in C(X,\mathbf{I})$, равная 1 на $\{\varphi(y)\}$ и 0 на $\{\psi(y)\}$. Тогда $1 = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)} = \alpha_\varphi(f)(y)$ и $0 = f\big(\psi(y)\big)^{r(y)} = \alpha_\psi(f)(y)$. Значит, $\alpha[\varphi,r] \neq \alpha[\psi,r]$, в частности $\alpha_\varphi \neq \alpha_\psi$. $\square$

Заметим, что для любых $f,g \in C(X,\mathbf{I})$ если $f \leqslant g$, то $\alpha(f) \leqslant \alpha(\sqrt{g})$. Если же $0 < f \leqslant g$, то $\alpha(f) \leqslant \alpha(g)$.

Лемма 13. *Пусть $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ — мультипликативный гомоморфизм. Тогда если $0 < l < h$, то $\alpha(f^h) \leqslant \alpha(f^l)$ для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$.*

Доказательство. Действительно, если $0 < l < h$, то $h - l > 0$ и $f^{h-l} \in C(X,\mathbf{I})$. Тогда $f^l \cdot f^{h-l} = f^h$ и $\alpha(f^l) \cdot \alpha(f^{h-l}) = \alpha(f^h)$ и $\alpha(f^h) \leqslant \alpha(f^l)$. $\square$

Предложение 14. *Пусть* $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ — *мультипликативный гомоморфизм. Тогда* $\alpha(f^r) = \alpha(f)^r$ *для любых функции* $f \in C(X,\mathbf{I})$ *и положительного числа* r.

Доказательство. Если $r = n_1/n_2$, $n_i \in \mathbb{N}$, то для $f \in C(X,\mathbf{I})$ имеем

$$\alpha(f^r) = \alpha(f^{n_1/n_2}) = \alpha(f^{n_1/n_2})^{n_2/n_2} = \alpha(f^{(n_1/n_2)\cdot n_2})^{1/n_2} = \alpha(f)^{n_1/n_2} = \alpha(f)^r.$$

Пусть $r \in (0,+\infty)$ иррациональное. Зафиксируем произвольную точку $y \in Y$. Покажем, что для любого числа $\varepsilon > 0$ выполняется двойное неравенство

$$\alpha(f)^r(y) - \varepsilon \leqslant \alpha(f^r)(y) \leqslant \alpha(f)^r(y) + \varepsilon.$$

Действительно, найдутся такие положительные числа $l, h \in \mathbb{Q}$, что

$$\alpha(f)^r(y) - \varepsilon \leqslant \alpha(f)^l(y) \leqslant \alpha(f)^r(y) \leqslant \alpha(f)^h(y) \leqslant \alpha(f)^r(y) + \varepsilon.$$

Тогда $l > r > h$, и по лемме 13 $\alpha(f^l) \leqslant \alpha(f^r) \leqslant \alpha(f^h)$. Получаем, что

$$\alpha(f)^r(y) - \varepsilon \leqslant \alpha(f)^l(y) = \alpha(f^l)(y) \leqslant \alpha(f^r)(y) \leqslant \\ \leqslant \alpha(f^h)(y) = \alpha(f)^h(y) \leqslant \alpha(f)^r(y) + \varepsilon.$$

Таким образом, $\alpha(f^r)(y) = \alpha(f)^r(y)$ для любой точки $y \in Y$. Значит, $\alpha(f^r) = \alpha(f)^r$. □

Следствие 4. *Для мультипликативного гомоморфизма* $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ *возможны следующие пять случаев*:

1) $\alpha\big(C(X,\mathbf{I})\big) = \{0\}$;
2) $\alpha\big(C(X,\mathbf{I})\big) = \{1\}$;
3) $\alpha(1) = 1$ *и* $\alpha(C(X,\mathbf{I}) \setminus \{1\}) = \{0\}$;
4) $\alpha(0) = 0$ *и* $\alpha(C(X,\mathbf{I}) \setminus \{0\}) = \{1\}$;
5) $\alpha\big(C(X,\mathbf{I})\big) = \mathbf{I}$.

Гомоморфизм полуколец $C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, переводящий функцию-константу 1 в число 1, назовём *функционалом*. Заметим, что мультипликативный гомоморфизм $C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, не переводящий функцию-константу 1 в число 1, все функции переводит в 0.

Приведём пример, когда мультипликативный эпиморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ не сохраняет $\vee$ (поэтому не является стандартным).

Пример 3. Пусть $X = \{1,2\}$ — дискретное двоеточие. Для любой функции $f = (x_1, x_2) \in C(X,\mathbf{I})$ положим

$$\alpha(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \neq 1; \\ x_2, & \text{если } x_1 = 1. \end{cases}$$

Очевидно, отображение α сюръективное, изотонное и мультипликативное:

$$\alpha\big((x_1,x_2)\cdot(x_1',x_2')\big) = \alpha(x_1x_1', x_2x_2') = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 \neq 1 \text{ или } x_1' \neq 1; \\ x_2x_2', & \text{если } x_1 = 1 \text{ и } x_1' = 1 \end{cases} = \\ = \alpha(x_1,x_2)\alpha(x_1',x_2').$$

При этом $\alpha(O_1) = \alpha(O_2) = 0$ и $\alpha(E_1) = \mathbf{I}$, $\alpha(E_2) = \{0,1\}$. Но α не сохраняет $\vee$:

$$\alpha\left(\left(1, \frac{1}{3}\right) \vee \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \alpha\left(1, \frac{1}{3}\right) \vee \alpha\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Лемма 14. *Если $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ — мультипликативный эпиморфизм, для которого найдётся такая константа $s \in C(X,\mathbf{I})$, что $\alpha(s) \notin \{0,1\}$, то существует такое положительное число r, что $\alpha(c) = c^r$ для любой константы $c \in C(X,\mathbf{I})$.*

Доказательство. Предположим, что в $C(X,\mathbf{I})$ нашлась такая константа s, что $\alpha(s) \notin \{0,1\}$. Заметим, что $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(1) = 1$. Действительно, для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ $\alpha(0) = \alpha(0) \cdot \alpha(f)$ ($\alpha(f) = \alpha(f) \cdot \alpha(1)$). Тогда $\alpha(0) = 0$ или $\alpha(f) = 1$ ($\alpha(1) = 1$ или $\alpha(f) = 0$). Второй случай не реализуется, так как $\alpha(s) \neq 1$ ($\alpha(s) \neq 0$). Тогда $s \notin \{0,1\}$. Для s найдётся такое положительное число $r \in \mathbb{R}$, что $\alpha(s) = s^r$. Для любой константы $c \notin \{0,1\}$ в $C(X,\mathbf{I})$ найдётся такое положительное число $k \in \mathbb{R}$, что $c = s^k$. По предложению 14 получаем, что $\alpha(c) = \alpha(s^k) = \big(\alpha(s)\big)^k = s^{kr} = c^r$. Таким образом, $\alpha(c) = c^r$. $\square$

Следствие 5 (см. [17]). *Любой мультипликативной гомоморфизм $\alpha\colon \mathbf{I} \to \mathbf{I}$, принимающий не только значения 0 и 1, является полукольцевым изоморфизмом. Точнее, существует такое положительное число r, что $\alpha(c) = c^r$ для любого $c \in \mathbf{I}$.*

Покажем, что даже при условии сохранения констант мультипликативный эпиморфизм α не обязательно является полукольцевым.

Пример 4. Пусть $X = \{1,2\}$ — дискретное двоеточие. Определим отображение $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ следующим образом: $\alpha(f) = \sqrt{x_1 x_2}$ для любой функции $f = (x_1, x_2) \in C(X,\mathbf{I})$. Отображение α сюръективно, переводит константы в их значения, изотонно и мультипликативно:

$$\alpha\big((x_1,x_2)\big) = \sqrt{x_1 x_1' x_2 x_2'} = \alpha(x_1,x_2)\alpha(x_1',x_2').$$

При этом $\alpha(O_1) = \alpha(O_2) = 0$ и $\alpha(E_1) = \alpha(E_2) = \mathbf{I}$. Покажем, что α не сохраняет $\vee$:

$$\alpha\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \vee \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\right) = \alpha\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq \sqrt{\frac{1}{6}} = \alpha\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \vee \alpha\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Будем рассматривать далее полукольцевые эпиморфизмы

$$\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I}).$$

Из леммы 14 и предложения 7 получаем следующее утверждение.

Следствие 6. *Если $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ — полукольцевой эпиморфизм, то возможны следующие случаи:*

1) *существует такое положительное число r, что $\alpha(c) = c^r$ для любой константы $c \in C(X,\mathbf{I})$;*
2) $\alpha(M_x) = [0,1]$, $\alpha(C(X,\mathbf{I}) \setminus M_x) = \{1\}$;
3) $\alpha(1 - M_x) = [0,1]$, $\alpha\big(C(X,\mathbf{I}) \setminus (1 - M_x)\big) = \{0\}$.

Отметим, что при полукольцевом эпиморфизме $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ каждой точке $y \in Y$ соответствует такая точка x_y, что $\alpha(O_{x_y})(y) = 0$. Тогда для любого конечного пространства X (все точки — P-точки) полукольцевой эпиморфизм α будет стандартным. Для полукольцевого гомоморфизма α, как легко убедиться, следующие условия эквивалентны:

1) найдётся такая константа $c \in C(X,\mathbf{I})$, что $0 < \alpha(c) < 1$;
2) найдётся такая функция $f \in C(X,\mathbf{I})$, что $0 < f(x) < 1$ и $0 < \alpha(f)(y) < 1$ для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$;
3) $Y = R_1(\alpha)$.

Предложение 15. *Пусть $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ — полукольцевой эпиморфизм, для которого найдётся такая константа $c \in C(X,\mathbf{I})$, что $0 < \alpha(c) < 1$. Тогда найдётся число $r > 0$, такое что $\alpha(f) = f(x)^r$ при всех $f \in C(X,\mathbf{I})$.*

Доказательство. По лемме 14 найдётся число $r > 0$, такое что $\alpha(s) = s^r$ для любой константы $s \in C(X,\mathbf{I})$.

По предложению 7 $\alpha(O_x) = \{0\}$ и $\alpha(1 - O_x) = \{1\}$ для некоторой точки $x \in X$.

Докажем, что для любых функций $f, g \in C(X,\mathbf{I})$ если $f(x) = g(x) \notin \{0,1\}$, то $\alpha(f) = \alpha(g)$. Обозначим $g(x) = f(x) = z$, $\alpha(f) = s_1$, $\alpha(g) = s_2$. Предположим, что $s_1 < s_2$. По предложению 7 для любого числа $g \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ получаем, что $\alpha(z)^q \leqslant s_i$ (если $z^q < z$) или $\alpha(z)^q \geqslant s_i$ (если $z^q > z$). Это противоречит существованию такого числа $q \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, что $s_1 < \alpha(z^q) < s_2$. Значит, $s_1 = s_2$, или $\alpha(f) = \alpha(g)$.

Получаем, что если $0 < f(x) < 1$, $f \in C(X,\mathbf{I})$, то $\alpha(f) = \alpha(\mathbf{c}) = f(x)^r$, где $\mathbf{c} \equiv f(x)$.

Пусть $f(x) = 0$ ($f(x) = 1$). Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такая константа $s \in C(X,\mathbf{I})$, $0 < s < 1$, что $\alpha(0) \leqslant \alpha(s) \leqslant \varepsilon$ ($\alpha(1) \geqslant \alpha(s) \geqslant 1 - \varepsilon$). Значит, $\alpha(f) = 0$ ($\alpha(f) = 1$). □

Предложение 16. *Полукольцевой эпиморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ будет стандартным тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий перед предложением 15. При этом если α — изоморфизм, то соответствующее отображение φ будет гомеоморфизмом.*

Доказательство. Для стандартного эпиморфизма условия перед предложением 15 очевидно выполняются.

Для каждого $y \in Y$ рассмотрим отображение $\pi_y\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$, $\pi_y(f) = \alpha(f)(y)$. Для π_y выполняется предложение 15. Значит, найдутся единственные точка $x_y \in X$ и число $r_y > 0$, такие что $\pi_y(f) = f(x_y)^{r_y}$ для любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$. Получим отображение $\varphi\colon Y \to X$, $\varphi(y) = x_y$, и функцию $r\colon Y \to (0,\infty)$, $r(y) = r_y$. Тогда $\alpha(f)(y) = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)} = \alpha[\varphi, r]$ для всех функций $f \in C(X,\mathbf{I})$.

Покажем, что φ непрерывна в каждой точке $y \in Y$, т. е. покажем, что для любой окрестности U точки $\varphi(y) \in X$ существует такая окрестность W точки

$y \in Y$, что $\varphi(W) \in U$. В U найдётся окрестность V точки $\varphi(y)$, такая что $\bar{V} \subseteq U$. По лемме 4 найдётся функция $f \in C(X, \mathbf{I})$, равная 1 на $\bar{V}$ и 0 на $X \setminus U$. Обозначим $(1/2)f = f_1 \in C(X, \mathbf{I})$. Функция f_1 равна $1/2$ на $\bar{V}$ и 0 на $X \setminus U$. Тогда $\alpha(f_1)(y) = f_1\big(\varphi(y)\big)^{r(y)} = (1/2)^{r(y)}$. Получаем окрестность $W = \{y\colon 0 < \alpha(f_1) < 1\}$ точки y, такую что для любого $y' \in W$ $f_1\big(\varphi(y')\big) \neq 0$, т. е. $\varphi(y') \in U$. Значит, φ непрерывна в каждой точке $y \in Y$, следовательно, непрерывна на Y.

По лемме 12 отображение φ единственно. Отображение $r(y)$ непрерывно, так как $r = \big(\ln \alpha(f)\big)/\big(\ln f(\varphi)\big)$ — непрерывная функция.

Пусть теперь $\alpha = \alpha[\varphi, r]$ — изоморфизм. Покажем сначала, что φ инъективно. Пусть это не так. Тогда найдутся точки $y_1 \neq y_2$, для которых $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$. Значит, $\alpha(f)(y_1) = f\big(\varphi(y_1)\big)^{r(y_1)}$ и $\alpha(f)(y_2) = f\big(\varphi(y_2)\big)^{r(y_2)}$ для любых функций $f \in C(X, \mathbf{I})$. Получаем, что или $r(y_1) \geqslant r(y_2)$ и $\alpha(f)(y_1) \leqslant \alpha(f)(y_2)$, или $r(y_1) < r(y_2)$ и $\alpha(f)(y_1) \geqslant \alpha(f)(y_2)$. Но тогда не каждая функция из $C(Y, \mathbf{I})$ будет иметь прообраз. Для первого случая функцией, не имеющей прообраза, будет функция h, которая равна 1 на $\{y_1\}$ и 0 на $\{y_2\}$. Для второго случая это функция $1 - h$. Получили противоречие с сюръективностью α. Значит, φ — инъекция.

Покажем, что φ сюръективно. Пусть это не так. Тогда в X найдётся точка $x \neq \varphi(Y)$. Существует функция $f \in C(X, \mathbf{I})$, равная 1 на $\{x\}$ и 0 на $\varphi(Y)$. Тогда $f \neq (1/2)f$ и

$$\alpha\left(\frac{1}{2}f\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r(y)} f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)} = 0 = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)} = \alpha(f)(y).$$

Получили противоречие с инъективностью α. Значит, φ сюръективно.

Таким образом, φ — непрерывная биекция компактов, т. е. φ — гомеоморфизм. □

Гомоморфизм идемпотентных полуколец $C(X, \mathbf{I}) \to C(Y, \mathbf{I})$, сохраняющий функцию-константу $1/2$, назовём $(1/2)$-*гомоморфизмом*.

Следствие 7. *Любой $(1/2)$-гомоморфизм $\alpha\colon C(X, \mathbf{I}) \to C(Y, \mathbf{I})$ имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi\colon Y \to X$. Если же $Y = \{y\}$, то α — вычисление в точке $\varphi(y)$. При этом если α — изоморфизм, то φ будет гомеоморфизмом.*

Обозначим через $\mathbf{K}$ категорию всех компактов X и их непрерывных отображений φ, а через $\mathbf{C}$ — категорию всех идемпотентных полуколец $C(X, \mathbf{I})$ и их $(1/2)$-гомоморфизмов α, $\alpha(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Для любых непрерывных отображений $\psi\colon Z \to Y$ и $\varphi\colon Y \to X$ имеем, что $\alpha_{\varphi\circ\psi} = \alpha_\psi \circ \alpha_\varphi$. Поэтому соответствие $\mathbf{F}$, такое что $\mathbf{F}(X) = C(X, \mathbf{I})$ и $\mathbf{F}(\varphi) = \alpha_\varphi$ для любых компактов X и непрерывных отображений $\varphi\colon Y \to X$, является контравариантным функтором из категории $\mathbf{K}$ в категорию $\mathbf{C}$. По следствию 7 функтор $\mathbf{F}$ устанавливает антиэквивалентность между категориями $\mathbf{K}$ и $\mathbf{C}$; говорят также, что эти категории двойственны друг другу.

Теорема 4. *Категория идемпотентных полуколец $C(X,\mathbf{I})$ с $(1/2)$-гомоморфизмами антиэквивалентна категории всех компактов и их непрерывных отображений.*

4. Полукольцевая характеризация топологических свойств компактов

Кольцевые характеризации свойств топологических пространств рассматривались в [4, 16], а полукольцевые — в [1, 6, 7].

Каждому простому идеалу P полукольца $C(X,\mathbf{I})$ соответствует единственная точка $x_P \in X$, для которой $O_{x_P} \subseteq P$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \operatorname{Spec} C(X,\mathbf{I}) \to X$, $\varphi(P) = x_P$ для любого простого идеала P полукольца $C(X,\mathbf{I})$.

Предложение 17. *Отображение $\varphi\colon \operatorname{Spec} C(X,\mathbf{I}) \to X$ непрерывно.*

Доказательство. Покажем, что отображение φ непрерывно в произвольной точке $Q \in \operatorname{Spec} C(X,\mathbf{I})$. Для этого возьмём окрестность U точки $x_Q = \varphi(Q)$ в пространстве X. Поскольку компакт X тихоновский, согласно лемме 4 существует такая функция $f \in E_{x_Q}$, что $f(X \setminus W) = \{0\}$ и $f(V) = \{1\}$ для некоторых окрестностей $V \subseteq W$ точки x_Q, $\bar{W} \subseteq U$. Рассмотрим открытое множество $D(f)$ простого спектра $\operatorname{Spec} C(X,\mathbf{I})$. По второму утверждению теоремы 1 $f \notin Q$, т. е. $Q \in D(f)$. Покажем, что $\varphi\big(D(f)\big) \subseteq U$. Пусть это не так. Тогда найдётся точка $y \in \varphi\big(D(f)\big) \setminus U$. Это значит, что $O_y \subseteq P \in D(f)$ для некоторого P. Поскольку $f = 0$ в некоторой окрестности множества $X \setminus U$, то $f \in O_y$, противоречие. Значит, $\varphi\big(D(f)\big) \subseteq U$. Таким образом, φ непрерывна в любой точке простого спектра, т. е. непрерывна. □

Топологическое пространство X называется *F-пространством* (*P-пространством*), если все его точки являются F-точками (P-точками) [16].

Полукольцо S называется *слабо риккартовым*, если для любого $a \in S$ идеал $\operatorname{Ann} a$ чистый.

Теорема 5. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения*:

1) *X — F-пространство*;
2) *все идеалы O_x, $x \in X$, простые*;
3) *максимальные идеалы полукольца $C(X,\mathbf{I})$ имеют вид $C(X,\mathbf{I}) \setminus E_x$ по всем $x \in X$*;
4) *пространство $\operatorname{Max} C(X,\mathbf{I})$ хаусдорфово*;
5) *отображение φ осуществляет гомеоморфизм пространств $\operatorname{Max} C(X,\mathbf{I})$ и X*;
6) *каждый простой идеал полукольца $C(X,\mathbf{I})$ содержится в единственном максимальном идеале*;

7) *каждый простой идеал полукольца* $C(X,\mathbf{I})$ *содержит единственный минимальный простой идеал*;
8) *все простые идеалы полукольца* $C(X,\mathbf{I})$, *содержащие данный простой идеал, образуют цепь*;
9) *для любой точки* $x \in X$ *найдётся такой простой идеал* $M_x \supseteq P$ *в* $C(X,\mathbf{I})$, *что все содержащие* P *простые идеалы образуют цепь*;
10) *полукольцо* $C(X,\mathbf{I})$ *слабо риккартово.*

Доказательство. Очевидно, что справедливы импликации $5) \Longrightarrow 4)$ и $8) \Longrightarrow 9) \Longrightarrow 6)$.

По теореме 3 получаем эквивалентность условий 1), 2), 3). В [12, предложение 4] показана эквивалентность утверждений 2), 7) и 10). Из теорем 1 и 3 следует импликация $2) \Longrightarrow 8)$. По предложению 17 справедлива импликация $4) \Longrightarrow 5)$. По предложению 3 получаем эквивалентность $4) \Longleftrightarrow 6)$.

Теперь достаточно показать справедливость импликации $6) \Longrightarrow 7)$. Пусть простой идеал P содержит различные минимальные простые идеалы Q_1, Q_2. По теореме 1 $P \supseteq O_x$ для некоторой точки $x \in X$. Тогда по замечанию 1 $Q_1 \subseteq M_x$ и $Q_2 \subseteq M_x$. Поэтому простой идеал M_x содержится в различных максимальных идеалах $C(X,\mathbf{I}) \setminus (1 - Q_1)$ и $C(X,\mathbf{I}) \setminus (1 - Q_2)$ (теорема 2), что противоречит условию 6). □

Замечание 2. В [1, теорема 1.1] получены следующие характеризации F-пространств X:

1) в полукольце $C(X,\mathbf{I})$ любые две функции имеют НОД;
2) в полукольце $C(X,\mathbf{I})$ любые две функции обладают НОК;
3) всякий конечно порождённый идеал полукольца $C(X,\mathbf{I})$ является главным.

В дополнение к [1, теорема 2.1] заметим, что свойству топологического пространства X быть F-пространством равносильна как модулярность, так и дистрибутивность решётки всех идеалов полукольца $C(X,\mathbf{I})$.

Замечание 3. Теорема 5 показывает существенное отличие теории идеалов в полукольцах $C(X,\mathbf{I})$ от классического случая колец $C(X,\mathbb{R})$. В кольцах $C(X,\mathbb{R})$ и полукольцах $C(X,\mathbb{R}^+)$ простые идеалы, содержащие данный простой идеал, образуют цепь [1, 16].

Предложение 18. *Идеалы* N_x *максимальны по всем* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда* X — *конечное пространство.*

Доказательство. Если для всех $x \in X$ идеалы N_x максимальны, то из предложения 10 следует, что X — P-пространство, а компактное P-пространство конечно. □

Говорят, что идеал I *выделяется прямым слагаемым* в полукольце S, если в S существует такой идеал J, что любой элемент $s \in S$ однозначно представим в виде $s = a + b$, $a \in I$, $b \in J$; при этом пишут $S = I \oplus J$. Заметим, что прямое слагаемое I полукольца S является чистым идеалом. Действительно,

если $S = I \oplus J$, то $1 = e + e_1$ для некоторых элементов $e \in I$, $e_1 \in J$. Тогда $a = a + 0 = ae + ae_1 = ae$ для любого $a \in I$.

Коммутативное полукольцо S с 1 называется *риккартовым* (*бэровским*), если аннулятор всякого его элемента (идеала) выделяется в S прямым слагаемым.

Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным* (*базисно несвязным*), если замыкание любого открытого в X множества (любого конуль-множества на X) открыто. Ясно, что экстремально несвязные пространства базисно несвязны, стало быть, являются F-пространствами.

Далее нам понадобятся следующие две леммы, являющиеся аналогами соответствующих утверждений о кольцах непрерывных функций [4].

Лемма 15. *Идеал I выделяется прямым слагаемым в полукольце $C(X, \mathbf{I})$ тогда и только тогда, когда $I = eC(X, \mathbf{I})$ для идемпотента $e \in C(X, \mathbf{I})$.*

Доказательство. Пусть $C(X, \mathbf{I}) = I \oplus J$. Тогда найдутся такие $e \in I$, $h \in J$, что $e \vee h = 1$. Для любого $f \in I$ получаем, что $f \vee 0 = f = ef \vee hf$. Следовательно, $f = ef$ и $I \subseteq eC(X, \mathbf{I})$. Ясно, что $eC(X, \mathbf{I}) \subseteq I$. Таким образом, $I = eC(X, \mathbf{I})$.

Пусть $I = eC(X, \mathbf{I})$ для функции $e \in C(X, \mathbf{I})$, $e^2 = e$. Тогда $e(1 - e) = 0$, т. е. функция e принимает только значения 0 или 1. Поэтому $e \vee (1 - e) = 1$. Значит, $eC(X, \mathbf{I}) \oplus (1 - e)C(X, \mathbf{I}) = C(X, \mathbf{I})$. □

Для $B \subseteq X$ и $J \subseteq C(X, \mathbf{I})$ обозначим

$$M_B = \{f \in C(X, \mathbf{I}) \colon f(B) = \{0\}\}, \quad \Delta J = \bigcap_{f \in J} Z(f).$$

Лемма 16. *Аннуляторные идеалы J полукольца $C(X, \mathbf{I})$ совпадают с идеалами $M_{\bar{U}}$ для открытых множеств $U \subseteq X$.*

Доказательство. Пусть $J \subseteq C(X, \mathbf{I})$. Тогда $\operatorname{Ann} J = M_{\bar{U}}$, $U = X \setminus \Delta J$. Действительно, пусть $f \in \operatorname{Ann} J$ и $x \in U$. Найдётся такая функция $g \in J$, что $g(x) \neq 0$ и $fg = 0$. Поэтому $f(x) = 0$. Значит, $U \subseteq Z(f)$ и $\bar{U} \subseteq Z(f)$. С другой стороны, пусть $f \in M_{\bar{U}}$. Если $g \in J$, то $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g) \supseteq U \cup \Delta J = X$, т. е. $fg = 0$ и $f \in \operatorname{Ann} J$.

Обратно, рассмотрим в X открытое множество U. Тогда $M_{\bar{U}} = \operatorname{Ann} M_{X \setminus \bar{U}}$. Очевидно, $M_{\bar{U}} \subseteq \operatorname{Ann} M_{X \setminus \bar{U}}$. Для любой функции $f \in C(X, \mathbf{I}) \setminus M_{\bar{U}}$ найдётся такая точка $x \in U$, что $f(x) \neq 0$. Поэтому найдётся функция $g \in C(X, \mathbf{I})$, для которой $g(x) \neq 0$ и $g = 0$ на $X \setminus U$. Значит, $g \in M_{X \setminus \bar{U}}$ и $fg \neq 0$. Следовательно, $f \notin \operatorname{Ann} M_{X \setminus \bar{U}}$. □

Подпространство Y топологического пространства X называется *ретрактом* в X, если существует такое непрерывное отображение $\psi \colon X \to Y$, что $\psi(y) = y$ для любого $y \in Y$.

Предложение 19. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения*:

1) *полукольцо $C(X, \mathbf{I})$ риккартово*;
2) *пространство X базисно несвязно*;

3) *полукольцо* $C(X,\mathbf{I})$ *слабо риккартово и* $\operatorname{Min} C(X,\mathbf{I})$ *компактно*;
4) $\operatorname{Min} C(X,\mathbf{I})$ — *ретракт* $\operatorname{Spec} C(X,\mathbf{I})$;
5) *отображение* $\varphi/\operatorname{Min} C(X,\mathbf{I})$ — *гомеоморфизм.*

Доказательство. В [12, предложение 7] доказана эквивалентность условий 1), 3) и 4). Условия 1) и 2) эквивалентны по леммам 15 и 16. По предложению 17 и теореме 5 получаем эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 5). □

Предложение 20. *Для произвольного компакта* X *полукольцо* $C(X,\mathbf{I})$ *бэровское тогда и только тогда, когда пространство* X *экстремально несвязно.*

Доказательство. Утверждение вытекает из лемм 15 и 16. □

Заметим, что предложения 19 и 20 распространяют соответствующие результаты о кольцах $C(X,\mathbb{R})$ [4] на полукольца $C(X,\mathbf{I})$.

5. Дополнения

1. Частичное полукольцо $C(X,\mathbf{I})$ по свойствам похоже на полукольцо $C(X,\mathbb{R}^+)$.

Поскольку на компакте непрерывные действительнозначные функции являются ограниченными и принимают свои наибольшие и наименьшие значения (теорема Вейерштрасса), то любой положительной функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ можно поставить в соответствие натуральное число $n_f = \inf\{n_i \in \mathbb{N}\colon f \geqslant 1/n_i\}$. Имеем $(1/n_f)f^{-1} \in C(X,\mathbf{I})$ и $f \cdot \big((1/n_f)f^{-1}\big) = 1/n_f$.

Если J — идеал в частичном полукольце $C(X,\mathbf{I})$, $f \in J$ и $f(x) > 0$ для всех $x \in X$, то $J = C(X,\mathbf{I})$. Действительно, если $f \in J$ и $f > 0$ на X, то $f \cdot \big((1/n_f)f^{-1}\big) = 1/n_f \in J$ и $\sum\limits_{1}^{n_f}(1/n_f) = 1 \in J$.

Заметим, что если вместо $\mathbf{I}$ взять отрезок $[-1,1]$ с операцией умножения и частичной операцией сложения, то получим частичное кольцо, похожее по своим свойствам на кольцо $C(X,\mathbb{R})$. В частичных полукольцах $C(X,\mathbf{I})$, как в кольцах $C(X,\mathbb{R})$ и в полукольцах $C(X,\mathbb{R}^+)$, верно следующее утверждение.

Предложение 21. *Максимальными идеалами частичного полукольца* $C(X,\mathbf{I})$ *являются в точности идеалы* M_x *для различных точек* $x \in X$.

Доказательство. Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим идеал M_x частичного полукольца $C(X,\mathbf{I})$. Пусть найдётся такой идеал J, что $M_x \subset J$ и $g \in J \setminus M_x$. Покажем, что $J = C(X,\mathbf{I})$. Обозначим $g(x) = a \neq 0$.

Если $a = 1$, то $1 - g \in M_x$ и $1 = g + (1-g) \in J$, а значит, $J = C(X,\mathbf{I})$.

Если $1 > a > 0$, то $1 > g > 0$ на некоторой окрестности U точки x. Так как пространство X тихоновское, то существует функция $f \in C(X,\mathbf{I})$, для которой $x \subseteq Z(f)$ и $X \setminus U \subseteq Z(1-f)$. Тогда $f \in M_x$, $f + g \in J$ и $f + g > 0$ на X. Значит, $J = C(X,\mathbf{I})$.

Покажем, что любой собственный идеал J содержится в M_x для некоторой точки $x \in X$. Пусть это не так. Тогда для любой точки $x \in X$ найдётся функция $f_x \in J$, $f_x(x) > 0$. Тогда $f_x(x) > 0$ на некоторой окрестности U_x точки x. Из открытого покрытия U_x, $x \in X$, компакта X можно выбрать конечное подпокрытие $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_k}$. Получаем, что $f_{x_1} + f_{x_2} + \ldots + f_{x_k} = f \in J$, причём $f > 0$ на X. Значит, $J = C(X, \mathbf{I})$, противоречие. Поэтому если J — максимальный идеал, то $J \subseteq M_x$, т. е. $J = M_x$. □

В частности, единственным собственным идеалом частичного полукольца $\mathbf{I}$ является нулевой идеал.

Рассмотрим гомоморфизмы частичных полуколец $C(X, \mathbf{I})$.

Предложение 22. *Любой ненулевой гомоморфизм частичных полуколец $\alpha\colon C(X, \mathbf{I}) \to C(Y, \mathbf{I})$ сохраняет константы, разность (там, где она определена), модуль разности, операции $\vee$, $\wedge$, и $\alpha(1 - f) = 1 - \alpha(f)$ для любых функций $f, g \in C(X, \mathbf{I})$.*

Доказательство. Имеем, что $\alpha(1) = 1$. Пусть $f \geqslant g$ и $h = f - g \in C(X, \mathbf{I})$. Тогда $f = h + g$. Из того, что $\alpha(f) = \alpha(f - g) + \alpha(g)$ следует, что $\alpha(f - g) = \alpha(f) - \alpha(g)$. Значит,

$$\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \alpha(1) - \alpha\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \alpha\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

и $\alpha(1 - f) = 1 - \alpha(f)$.

Для модуля разности получаем, что

$$\frac{1}{2}(|\alpha(f) - \alpha(g)|)^2 = \frac{\alpha(f)^2 + \alpha(g)^2}{2} - \alpha(f)\alpha(g) =$$
$$= \alpha\left(\frac{f^2 + g^2}{2}\right) - \alpha(fg) = \alpha\left(\frac{f^2 + g^2}{2} - fg\right) = \alpha\left(\frac{|f - g|^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\alpha(|f - g|)^2.$$

Следовательно, $\alpha(|f - g|) = |\alpha(f) - \alpha(g)|$.

Для min по доказанному выше получаем, что

$$\alpha(f \wedge g) = \alpha\left(\left(\frac{f}{2} + \frac{g}{2}\right) - \frac{|f - g|}{2}\right) = \alpha(f) \wedge \alpha(g).$$

Аналогично для max получаем, что

$$\alpha(f \vee g) = \alpha\left(\left(\frac{f}{2} + \frac{g}{2}\right) + \frac{|f - g|}{2}\right) = \alpha(f) \vee \alpha(g).$$

Из сохранения $1/2$ в обозначениях леммы 14 получаем, что $r = 1$ и $\alpha(c) = c$. □

Как следствие получаем, что любой ненулевой гомоморфизм частичных полуколец $\alpha\colon C(X, \mathbf{I}) \to C(Y, \mathbf{I})$ является стандартным гомоморфизмом идемпотентных полуколец с функцией $r = 1$, т. е. справедливо следующее утверждение.

Предложение 23. *Любой ненулевой гомоморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to C(Y,\mathbf{I})$ частичных полуколец имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi\colon Y \to X$. В частности, если $\mathbf{I} = \{y\}$, то $\alpha\colon C(X,\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ является вычислением в некоторой точке $\varphi(y) \in X$. Если α — изоморфизм, то φ будет гомеоморфизмом.*

Теорема 6. *Категория частичных полуколец $C(X,\mathbf{I})$ по всевозможным компактам X и их гомоморфизмам двойственна категории всех компактов и их непрерывных отображений.*

2. Решётки $C(X,\mathbf{I})$ по некоторым свойствам близки к идемпотентным полукольцам $C(X,\mathbf{I})$ (см. [5]). Для решёток $C(X,\mathbf{I})$ выполняется следующее утверждение.

Предложение 24. *Подмножество P решётки $C(X,\mathbf{I})$ — (простой) идеал тогда и только тогда, когда $1-P$ — (простой) фильтр. P — минимальный простой идеал тогда и только тогда, когда $1-P$ — минимальный простой фильтр. Максимальные идеалы решётки $C(X,\mathbf{I})$ — это в точности идеалы вида $C(X,\mathbf{I})\setminus(1-P)$ по всем простым идеалам P, совпадающим с O_P.*

Доказательство. Имеем, что $0 \in P \neq \varnothing$, $1 \in 1-P \neq \varnothing$. Заметим, что $(1-f)\vee(1-g) = 1-(f\wedge g)$ и $(1-f)\wedge(1-s) = 1-(f\vee s) \in 1-F$. Если $f,g \in P$, $s \in S$, то имеем эквивалентности

$$f\wedge s \in P \Longleftrightarrow (1-f)\vee(1-s) \in 1-P, \quad f\vee g \in P \Longleftrightarrow (1-f)\wedge(1-g) \in 1-P.$$

Значит P — идеал тогда и только тогда, когда $1-P$ — фильтр. Пусть P — простой идеал ($1-P$ — простой фильтр). Если $f,g \notin P$, то $(1-f)\vee(1-g) = 1-f\wedge g \notin 1-P$, значит, $1-F$ — простой фильтр (F — простой идеал).

Далее доказательство вполне аналогично доказательству соответствующих утверждений для идемпотентного полукольца $C(X,\mathbf{I})$. □

Собственные идеалы решётки $\mathbf{I}$ и идемпотентного полукольца $\mathbf{I}$ имеют вид $\{0\}$, $[0,1)$, $[0,r)$ и $[0,r]$ при $0 < r < 1$. Все они будут и простыми идеалами решётки $\mathbf{I}$. Простыми идеалами идемпотентного полукольца $\mathbf{I}$ служат только $\{0\}$ и $[0,1)$.

Литература

[1] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семёнова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы конгруэнции // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 493—510.

[2] Вечтомов Е. М. Изоморфизмы мультипликативных полугрупп колец непрерывных функций // Сиб. мат. журн. — 1978. — Т. 19, № 4. — С. 759—771.

[3] Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1990. — Т. 28. — С. 3—46.

[4] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы: уч. пособие. — М.: МПГУ, 1992.

[5] Вечтомов Е. М. Дистрибутивные решётки, функционально представимые цепями // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 93—102.

[6] Вечтомов Е. М. Полукольца непрерывных отображений // Вестн. Вятск. гос. гуман. ун-та. — 2004. — № 10. — С. 57—64.

[7] Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Главные ядра полуполей непрерывных положительных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 87—107.

[8] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[9] Лубягина Е. Н. Полукольца непрерывных функций со значениями в единичном отрезке // Междунар. конф. «Мальцевские чтения». — Новосибирск, 2009. — С. 127.

[10] Лубягина Е. Н. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций со значениями в единичном отрезке // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского: Материалы Девятой молодёжной научной школы-конференции «Лобачевские чтения — 2010». — 2010. — Т. 40. – С. 206—211.

[11] Чермных В. В. Полукольца: уч. пособие. — Киров.: Изд-во ВятГГУ, 1997.

[12] Чермных В. В. Редуцированные риккартовы полукольца и их функциональные представления // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 205—215.

[13] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[14] Araujo J. Multiplicative bijections of semigroups of interval-valued continuous functions // UC Davis Math. — 2007. — P. 1—11. — `http://trefoil.math.ucdavis.edu/0710.4347`.

[15] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[16] Jerison M., Gilman L. Rings of Continuous Functions. — Princeton: Van Nostrand, 1976.

[17] Marovt J. Multiplicative bijections of $C(X, \mathbf{I})$ // Proc. Am. Math. Soc. — 2006. — P. 1065—1075.

[18] Milgram A. N. Multiplicative semigroups of continuous functions // Duke Math. J. — 1949. — Vol. 16, no. 2. — P. 377—383.