Параградуированные кольца и их идеалы

М. ВУКОВИЧ
Сараевский университет, Босния и Герцеговина
e-mail: mirvuk48@gmail.com

Э. ИЛИЧ-ГЕОРГИЕВИЧ
Сараевский университет, Босния и Герцеговина
e-mail: emil.ilic.georgijevic@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: параградуированное кольцо, квазиоднородный гомоморфизм, однородный идеал, минимальное умножение.

Аннотация

Понятия параградуированного кольца и однородного идеала, являющиеся обобщением классической градуировки, определённой Бурбаки, и развивающие идеи М. Краснера, были введены М. Краснером и М. Вукович. Мы напоминаем определение параградуированного кольца и затем формулируем и доказываем некоторые факты о таких кольцах. Одно из наиболее важных свойств состоит в том, что однородная часть прямого произведения и прямой суммы параградуированных колец является прямым произведением и прямой суммой однородных частей соответствующих множителей. Мы вводим понятие однородного идеала параградуированного кольца и доказываем, что фактор-кольцо параградуированного кольца по однородному идеалу также является параградуированным. Мы устанавливаем основные факты, касающиеся однородных идеалов.

Abstract

M. Vuković, E. Ilić-Georgijević, Paragraded rings and their ideals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 83—93.

The notions of a paragraded ring and a homogeneous ideal, which are at the same time a generalization of the classical graduation, as defined by Bourbaki, and an extension of the earlier work done by M. Krasner, were introduced by M. Krasner and M. Vuković. After recalling the notion of paragraded rings, we list out and prove several facts about them. One of the most important properties is that the homogeneous part of the direct product and the direct sum of paragraded rings are the direct product and the direct sum of the corresponding homogeneous parts, respectively. Next we give the notion of a homogeneous ideal of a paragraded ring and prove that the factor ring obtained from a paragraded ring and its homogeneous ideal is also a paragraded ring. After that, we deal with basic facts about homogeneous ideals.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 83—93.

Эта статья посвящается
70-летию дорогого и глубокоуважаемого профессора
Александра Васильевича Михалёва

1. Параградуированные кольца

Пусть R — кольцо, $\mathrm{Sg}(R,+)$ — множество подгрупп в $(R,+)$, $(\Delta,<)$ — частично упорядоченное множество, являющееся полной полурешёткой снизу и индуктивным упорядоченным множеством сверху.

Определение 1.1. Отображение $\pi\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(R,+)$, $\pi(\delta) = R_\delta$ $(\delta \in \Delta)$, называется *параградуировкой*, если оно удовлетворяет следующим семи аксиомам.

1. $\pi(0) = R_0 = \{0\}$, где $0 = \inf \Delta$, и из того, что $\delta < \delta'$, следует, что $R_\delta \subseteq R_{\delta'}$.

Замечание 1.2. $H = \bigcup\limits_{\delta\in\Delta} R_\delta$ называется *однородной частью* кольца R относительно π, а элементы из H называются однородными.

Замечание 1.3. Если $x \in H$, то мы скажем, что $\delta(x) = \inf\{\delta \in \Delta \mid x \in R_\delta\}$ — степень x. Равенство $\delta(x) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = 0$. Элементы $\delta(x)$, $x \in H$, называются *главными степенями*. Они образуют множество, которое мы обозначим через Δ_p.

2. Из того, что $\theta \subseteq \Delta$, следует, что $\bigcap\limits_{\delta\in\theta} R_\delta = R_{\inf\theta}$.
3. Если $x, y \in H$ и $y + x = z + x + y$, то $z \in H$ и $\delta(z) \leqslant \inf\bigl(\delta(x), \delta(y)\bigr)$.
4. Однородная часть H порождает $(R,+)$.
5. Если $A \subseteq H$ — такое подмножество, что $x + y \in H$ для всех $x, y \in A$, то найдётся такое $\delta \in \Delta$, что $A \subseteq R_\delta$.
6. Группа $(R,+)$ порождается H и множеством H-внешних отношений $x + y = z$ и левых коммутаторных отношений $y + x = z(x,y) + x + y$ для $x, y, z \in H$.
7. Для любых $\xi, \eta \in \Delta$ найдётся $\zeta \in \Delta$, такое что $R_\xi R_\eta \subseteq R_\zeta$.

Кольцо является *параградуированным*, если оно имеет параградуировку.

Если заменить аксиому 6 на следующую аксиому $6'$, то мы приходим к понятию *экстраградуированного кольца*.

$6'$. Если $\delta_1, \ldots, \delta_s \in \Delta_p$ попарно несравнимы и семейства $x_i, x_i' \in H$ $(i = 1, \ldots, s)$ таковы, что $x_1 + \ldots + x_s = x_1' + \ldots + x_s'$ и $x_i, x_i' \in R_{\delta_i}$ для всех $i = 1, \ldots, s$, то $\delta(-x_i + x_i') < \delta_i$.

Лемма 1.4. *Если H — однородная часть параградуированного кольца R и $\delta(x)$ — степень элемента $x \in H$, то заключение аксиомы 7 выполняется тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия*:

1) *из того, что $x, y \in H$, следует, что $xy \in H$ $(H^2 \subseteq H)$*;
2) *если $\xi, \eta \in \Delta$, то для $x, x', y, y' \in H$, для которых выполнено $\delta(x) \leqslant \xi$, $\delta(x') \leqslant \xi$, $\delta(y) \leqslant \eta$ и $\delta(y') \leqslant \eta$, имеем, что $xy + x'y' \in H$.*

Доказательство. Очевидно, что заключение аксиомы 7 верно, если 1) и 2) имеют место.

Если 1) и 2) выполняются, то мы получаем, что $R_\xi R_\eta \subseteq H$, и для всех $z, z' \in R_\xi R_\eta$ имеем, что $z + z' \in H$. Следовательно, согласно аксиоме 5 существует такое $\zeta \in \Delta$, что $R_\xi R_\eta \subseteq R_\zeta$. □

Замечание 1.5. В случае градуированных колец аналоги условий 1) и 2) не эквивалентны. Можно утверждать только, то из 1) следует 2) (см. [2]).

Пусть $\pi\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(R,+)$ — параградуировка кольца $(R,+,\cdot)$. Тогда мы можем определить некоторым образом умножение степеней из Δ.

Определение 1.6. Отображение $(\xi,\eta) \to \xi\eta$ из $\Delta\times\Delta$ в Δ называется π-*умножением*, если выполняются следующие условия:

1) $R_\xi R_\eta \subseteq R_{\xi\eta}$;
2) для всех $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \Delta$ из того, что $\xi \leqslant \xi'$ и $\eta \leqslant \eta'$, следует, что $\xi\eta \leqslant \xi'\eta'$.

Замечание 1.7. Согласно определению параградуированного кольца элементы $\delta(x)$, $x \in R_\xi R_\eta$, имеют общую верхнюю границу. Следовательно, существует $\sup\{\delta(x) \mid x \in R_\xi R_\eta\}$.

Лемма 1.8. *Пусть отображение $m\colon \Delta\times\Delta \to \Delta$ определено равенством*

$$m(\xi,\eta) = \xi\eta = \sup\{\delta(x) \mid x \in R_\xi R_\eta\}, \quad (\xi,\eta) \in \Delta\times\Delta.$$

Тогда m удовлетворяет условиям 1) *и* 2) *определения* 1.6*, т. е. отображение m является π-умножением.*

Доказательство. Сначала докажем, что выполнено условие 1) определения 1.6. Пусть $(\xi,\eta) \in \Delta\times\Delta$. По определению

$$\xi\eta = \sup\{\delta(x) \mid x \in R_\xi R_\eta\},$$

следовательно, для любого $x \in R_\xi R_\eta$ имеем, что $\delta(x) < \xi\eta$. Значит, в соответствии с аксиомой 1 $R_{\delta(x)} \subseteq R_{\xi\eta}$, поэтому $x \in R_{\delta(x)} \subseteq R_{\xi\eta}$. Таким образом, $R_\xi R_\eta \subseteq R_{\xi\eta}$, и условие 1) определения 1.6 выполнено.

Теперь пусть $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \Delta$ и $\xi \leqslant \xi'$, $\eta \leqslant \eta'$. Так как $\xi \leqslant \xi'$, согласно аксиоме 1 получаем, что $R_\xi \subseteq R_{\xi'}$. Аналогично $R_\eta \subseteq R_{\eta'}$. Таким образом, имеем включение $R_\xi R_\eta \subseteq R_{\xi'} R_{\eta'}$. Так как

$$\sup\{\delta(x) \mid x \in R_{\xi\eta}\} \leqslant \sup\{\delta(x) \mid x \in R_{\xi'\eta'}\},$$

лемма доказана. □

Определение 1.9. Отображение m из предыдущей леммы называется *минимальным умножением*.

Определение 1.10. Пусть R — параградуированное кольцо с параградуировкой π. Параградуировка π называется *собственной*, если она инъективна, т. е. если из того, что $R_\delta = R_{\delta'}$, где $\delta, \delta' \in \Delta$, следует, что $\delta = \delta'$.

Лемма 1.11. *Если π — собственная параградуировка, то $\delta < \delta'$ тогда и только тогда, когда $R_\delta \subset R_{\delta'}$.*

Доказательство. Если $R_\delta \subset R_{\delta'}$, то по аксиоме 2 $R_{\inf(\delta,\delta')} = R_\delta \cap R_{\delta'} = R_\delta$. Следовательно, $\inf(\delta,\delta') = \delta$ и $\delta \leqslant \delta'$. Обратное утверждение вытекает из аксиомы 1. □

Теорема 1.12. *Если R — параградуированное кольцо с параградуировкой π, то существует собственная параградуировка $\tilde{\pi}$ на R.*

Доказательство. Пусть $\pi(\Delta) = \{R_\delta \mid \delta \in \Delta\} \subseteq \mathrm{Sg}(R,+)$. Если $I \in \pi(\Delta)$, то определим

$$\delta_I = \inf\{\delta \in \Delta \mid R_\delta = I\}, \quad \tilde{\Delta} = \{\delta_I \mid I \in \pi(\Delta)\}.$$

Очевидно, что $\tilde{\Delta} \supseteq \Delta_p$. Тогда согласно аксиоме 2

$$\pi(\delta_I) = \pi(\inf\{\delta \in \Delta \mid R_\delta = I\}) = \bigcap_{R_\delta = I} R_\delta = I,$$

откуда получаем, что $\pi(\tilde{\Delta}) = \pi(\Delta)$. Пусть $\tilde{\pi}$ — ограничение отображения π на $\tilde{\Delta}$. Так как $\tilde{\Delta}$, также как и Δ, — упорядоченное множество, то $\tilde{\pi}$ — параградуировка. Она собственная, так как отображение $\tilde{\pi}\colon \tilde{\Delta} \to \pi(\Delta)$, $\tilde{\pi}(\delta_I) = I$, инъективно. Действительно, если $I = J$, $I, J \in \pi(\Delta)$, то $\delta_I = \inf\{\delta \mid R_\delta = I\} = \inf\{\delta \mid R_\delta = J\} = \delta_J$. □

Замечание 1.13. Заметим, что однородные части π и $\tilde{\pi}$ совпадают.

Определение 1.14. Собственная параградуировка $\tilde{\pi}$, построенная по параградуировке π, называется *собственным ядром*.

Лемма 1.15. *Если $\pi\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(R,+)$ — собственная параградуировка и $\Theta \subseteq \Delta$ — такое подмножество, что для любых $\xi, \eta \in \Theta$ существует общая верхняя граница, то существует общая верхняя граница для всех $\xi \in \Theta$.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{\xi \in \Theta} R_\xi$ и $x, y \in A$. Togda $\delta(x)$ и $\delta(y)$ имеют общую верхнюю границу. Следовательно, существует элемент $\delta \in \Delta$, такой что $A \subseteq R_\delta$. Поэтому для любого $\xi \in \Theta$ имеем, что $R_\xi \subseteq R_\delta$. Тогда $\xi \leqslant \delta$, так как π — собственная параградуировка. □

Предложение 1.16. *Если π — параградуировка из $(R,+)$, то следующие свойства эквивалентны*:

1) *для любых $\xi, \xi', \eta, \eta' \in \Delta$ из того, что $\xi \leqslant \xi'$ и $\eta \leqslant \eta'$, следует, что $\xi\eta \leqslant \xi'\eta'$*;
2) *для любых $x, x', y, y' \in H$ из того, что $x + x' \in H$ и $y + y' \in H$, следует, что $xy + x'y' \in H$.*

Доказательство. Ясно, что свойство 2) следует из 1). Предположим, что 1) выполняется и $x + x', y + y' \in H$ для $x, x', y, y' \in H$. Согласно аксиоме 5 существуют такие $\xi, \eta \in \Delta$, что $\{x, x'\} \subseteq R_\xi$ и $\{y, y'\} \subseteq R_\eta$. Следовательно, $xy + x'y' \in H$ в силу свойства 1). □

Пусть $(R_j)_{j \in J}$ — семейство параградуированных колец с параградуировками $\pi_j\colon \Delta_j \to \mathrm{Sg}(R_j,+)$. Рассмотрим прямое произведение $\prod_{j \in J} R_j$ и прямую сумму

$\bigoplus\limits_{j\in J} R_j$ колец этого семейства. Если $x = (x_j \mid j \in J)$ и $y = (y_j \mid j \in J)$, то положим

$$x + y = (x_j + y_j \mid j \in J), \quad xy = (x_j y_j \mid j \in J).$$

В итоге получаем, что оба объекта — прямое произведение и прямая сумма — кольца. Следующая теорема утверждает, что эти кольца являются параградуированными.

Теорема 1.17. *Кольца* $\prod\limits_{j\in J} R_j$ *и* $\bigoplus\limits_{j\in J} R_j$ *являются параградуированными относительно отображения*

$$\pi\colon \Delta = \prod_{j\in J} \Delta_j \to \mathrm{Sg}\Big(\prod_{j\in J} R_j, +\Big), \quad \pi(\delta) = (\pi_j(\delta_j) \mid j \in J), \quad \delta = (\delta_j \mid j \in J),$$

в качестве их параградуировки.

Доказательство. Легко доказать, что аксиомы определения 1.1 выполняются для отображения π. □

Замечание 1.18. Как мы отметили в аннотации, одно из основных свойств параградуированных колец состоит в том, что однородные части H прямого произведения и прямой суммы параградуированных колец — это прямое произведение и прямая сумма соответствующих однородных частей, в отличие от категории градуированных колец, где это не выполняется [8]. Действительно, пусть H_j — однородная часть R_j, $j \in J$. Тогда

$$H = \bigcup_{\delta\in\Delta} \pi(\delta) = \bigcup_{\delta\in\Delta} (\pi_j(\delta_j) \mid j \in J) = \\ = \bigcup_{\delta\in \prod\limits_{j\in J}\Delta_j} (\pi_j(\delta_j) \mid j \in J) = \prod_{j\in J} \bigcup_{\delta_j\in\Delta_j} \pi_j(\delta_j) = \prod_{j\in J} H_j.$$

Замечание 1.19. Заметим, что мы можем определить π-умножение на $\Delta = \prod\limits_{j\in J} \Delta_j$, если положим

$$\xi\eta = (\xi_j\eta_j \in \Delta_j \mid j \in J) \ \text{ для } \ \xi = (\xi_j \in \Delta_j \mid j \in J),\ \eta = (\eta_j \in \Delta_j \mid j \in J) \in \Delta.$$

Кроме того, если умножение на Δ_j является минимальным для любого $j \in J$, то π-умножение, определённое выше, также будет минимальным.

2. Однородные идеалы

Определение 2.1. Подкольцо (идеал) I параградуированного кольца R называется *однородным*, если группа $(I, +)$ порождена $I \cap H$.

Предложение 2.2. *Пусть I — однородный идеал параградуированного кольца R. Тогда R/I также является параградуированным кольцом.*

Доказательство. Пусть Δ — множество степеней R. Если определить $\pi_I\colon \Delta \to \mathrm{Sg}(R/I,+)$ посредством равенств

$$\pi_I(\delta) = (R/I)_\delta = (R_\delta + I)/I, \quad \delta \in \Delta,$$

то легко проверить, что π_I — параградуировка фактор-кольца R/I. Сначала рассмотрим $(R/I)_0$. Согласно определениям π_I и π имеем, что

$$(R/I)_0 = (R_0 + I)/I = (\{0\} + I)/I = I/I = 0 + I.$$

Если $\delta < \delta'$ для $\delta, \delta' \in \Delta$, то $R_\delta \subseteq R_{\delta'}$ по аксиоме 1. Следовательно,

$$(R/I)_\delta = (R_\delta + I)/I \subseteq (R_{\delta'} + I)/I = (R/I)_{\delta'}.$$

Если $\theta \subseteq \Delta$, то

$$\bigcap_{\delta\in\theta}(R/I)_\delta = \bigcap_{\delta\in\theta}(R_\delta + I)/I = \Bigl(\bigcap_{\delta\in\theta} R_\delta + I\Bigr)/I = (R_{\inf\theta} + I)/I = (R/I)_{\inf\theta}.$$

Мы уже проверили, что для параградуировки π_I выполняются аксиомы 1 и 2. Аксиомы 3 и 5 можно проверить аналогично. Очевидно, что аксиома 4 также выполняется для π_I. Группа $(R/I,+)$ порождена $\bigcup\limits_{\delta\in\Delta}(R/I)_\delta$, теми же самыми соотношениями, что и группа $(R,+)$. Следовательно, аксиома 6 выполняется для π_I. Наконец, докажем, что верна также аксиома 7. Пусть $x + I \in (R/I)_\xi$ и $y + I \in (R/I)_\eta$. Так как $x \in R_\xi + I$, то существуют такие $r_\xi \in R_\xi$ и $a \in I$, что $x = r_\xi + a$. Аналогично существуют такие $r_\eta \in R_\eta$ и $a' \in I$, что $y = r_\eta + a'$. Тогда мы получаем, что

$$xy = (r_\xi + a)(r_\eta + a') = r_\xi r_\eta + r_\xi a' + a r_\eta + aa'.$$

Так как существует элемент $\zeta \in \Delta$, такой что $R_\xi R_\eta \subseteq R_\zeta$, мы получаем, что $r_\xi r_\eta \in R_\zeta$. Идеал I однородный по предположению, следовательно, $r_\xi a'$, $a r_\eta$ и aa' принадлежат I. Таким образом, $xy \in R_\zeta + I$, т. е. $xy + I \in (R/I)_\zeta$. $\square$

Замечание 2.3. Ясно, что однородная часть $H(R/I)$ кольца R/I равна $(H+I)/I$ и если $x \in H$, то $\delta(x+I) = \inf\limits_{y\in(x+I)\cap H} \delta(y)$.

Предложение 2.4. *Если $I \subseteq R$ и $h(I) = I \cap H$, то I — однородное подкольцо параградуированного кольца R тогда и только тогда, когда $h = h(I)$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) *если $x \in h$, то $-x \in h$;*
2) *из того, что $x, y \in h$ и $x + y \in H$, следует, что $x + y \in h$;*
3) *если $x, y \in h$, то $xy \in h$.*

Доказательство. Пусть I — однородное подкольцо. Если $x \in h$, то $x \in I$ и $x \in H$. Так как $x \in I$ и $(I,+)$ — подгруппа в $(R,+)$, то $-x \in I$. Так как $x \in H$, существует $\delta \in \Delta$, такой что $x \in R_\delta$. Следовательно, $-x \in R_\delta \subseteq H$. Таким образом, $-x \in h$ и выполнено условие 1). Аналогично можно доказать справедливость условий 2) и 3).

Теперь предположим, что выполнены условия 1), 2) и 3). Так как верны 1) и 2), то $(I,+)$ — однородная подгруппа в $(R,+)$, порождённая h. Так как H порождает группу $(R,+)$, то умножение, определённое на $h \times h$, может быть продолжено по дистрибутивности на $I \times I$. Соответствующее произведение принадлежит I, и оно совпадает с произведением в R. Следовательно, I — однородное подкольцо. □

Лемма 2.5. *Подмножество $I \subseteq R$ является левым* (*правым*) *однородным идеалом в R тогда и только тогда, когда I удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *предложения* 2.4 *и условию*

3′) (3″)) *если $x \in H$ и $y \in h$, то $xy \in h$* (*если $x \in h$ и $y \in H$, то $xy \in h$*).

Доказательство. Ясно, что перечисленные условия необходимы. Теперь предположим, что условия 1), 2) и 3′) (3″)) выполнены. Согласно предложению 2.4 I — аддитивная подгруппа в $(R,+)$, порождённая h. Так как H порождает группу $(R,+)$, то умножение, определённое на $H \times h$ ($h \times H$), может быть продолжено по дистрибутивности на $R \times I$ ($I \times R$), так как верно 3′) (3″)). Соответствующее произведение есть элемент из I, и это произведение совпадает с произведением в R. Следовательно, I будет левым (правым) однородным идеалом в R. □

Определение 2.6. Гомоморфизм $f\colon R \to R'$ параградуированных колец R и R' назовём *квазиоднородным*, если $f(x)$ — однородный элемент для любого однородного элемента x в R. Квазиоднородный гомоморфизм $f\colon R \to R'$ назовём сюръективным, если f сюръективен и $f^{-1}(H') \subseteq H$.

Теорема 2.7. *Пусть $(I_j)_{j \in J}$ — семейство однородных идеалов параградуированного кольца R. Тогда $\bigcap\limits_{j \in J} I_j$ — однородный идеал в R.*

Доказательство. Пусть $I = \bigcap\limits_{j \in J} I_j$ и $h = h(I) = I \cap H$. Возьмём $x \in h$. Тогда $x \in I$, следовательно, $x \in I_j$ для всех $j \in J$. Так как I_j — однородный идеал в R для любого $j \in J$, то $-x \in I_j \cap H$ для всех $j \in J$. Следовательно, $-x \in I \cap H$, и выполнено условие 1) предложения 2.4. Пусть $x \in h$, $y \in h$ і $x+y \in H$. Так как $h = I \cap H$, то имеем, что $x, y \in I$ и $x, y \in H$. Поскольку $x, y \in I$, то $x, y \in I_j$ для всех $j \in J$. Следовательно, $x, y \in I_j \cap H$ для всех $j \in J$. Так как $x + y \in H$, то, поскольку I_j — однородный идеал в R, получаем, что $x + y \in I_j \cap H$ для всех $j \in J$. Тогда

$$x + y \in \bigcap_{j \in J} (I_j \cap H) = \left(\bigcap_{j \in J} I_j \right) \cap H = I \cap H = h,$$

и выполнено условие 2) предложения 2.4. Если $x \in H$ и $y \in h$, то получаем, что $y \in H$ и $y \in I = \bigcap\limits_{j \in J} I_j$. Следовательно, $y \in I_j \cap H$ для всех $j \in J$. Так как I_j — однородный идеал, то $xy \in I_j \cap H$ ($j \in J$), так как $xy \in h$. Поэтому выполнено условие 3′) леммы 2.5. □

Пусть A — подмножество параградуированного кольца R и Q — множество всех однородных идеалов в R, которые содержат A. Множество Q непусто потому, что $R \in Q$, а последнее верно, так как R — однородный идеал, порождённый H. Пусть $K = \bigcap\limits_{I \in Q} I$. Тогда K — наименьший однородный идеал, который содержит A. Обозначим его через (A) и назовём *однородным идеалом, порождённым множеством* A. Если $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, т. е. если A конечно, то будем писать $(a_1, \ldots, a_n)$ вместо (A).

Определение 2.8. Однородный идеал I параградуированного кольца R называется *конечно порождённым*, если $I = (a_1, \ldots, a_n)$ для некоторых $a_j \in R$.

Определение 2.9. Однородный идеал I параградуированного кольца R называется *главным*, если $I = (a)$ для некоторого $a \in R$.

Теорема 2.10. *Пусть $\varphi\colon R \to R'$ — сюръективный квазиоднородный гомоморфизм параградуированных колец R и R', и пусть $\varkappa = \ker\varphi$. Тогда отображение $\varphi\colon I \to \varphi(I)$ задаёт взаимно-однозначное соответствие между совокупностью всех однородных идеалов в R, которые содержат $\varkappa$, и множеством всех однородных идеалов в R'. Это отображение сохраняет включение, т. е. если $I \subset I'$, то $\varphi(I) \subset \varphi(I')$, и наоборот.*

Доказательство. Пусть I' — однородный идеал кольца R', и пусть $I = \varphi^{-1}(I')$. Тогда I — однородный идеал в R. Действительно, пусть $h = I \cap H$, где H — однородная часть кольца R. Если $x \in h$, то $x \in I$ и $x \in H$. Так как $x \in I$, получаем, что $\varphi(x) \in I'$. С другой стороны, φ квазиоднороден, и следовательно, $\varphi(x) \in H'$, где H' — однородная часть кольца R'. Таким образом, $\varphi(x) \in I' \cap H' = h'$. По условию I' — однородный идеал в R', поэтому $-\varphi(x) \in h'$, т. е. $\varphi(-x) \in h'$. Это означает, что

$$-x \in \varphi^{-1}(h') = \varphi^{-1}(I' \cap H') = \varphi^{-1}(I') \cap \varphi^{-1}(H') = I \cap H = h,$$

т. е. условие 1) предложения 2.4 выполнено. Теперь пусть $x, y \in h$ и $x + y \in H$. Тогда $\varphi(x), \varphi(y) \in h'$ и $\varphi(x+y) \in H'$. Так как I' — однородный идеал в R', то $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \in h'$, поэтому $x + y \in \varphi^{-1}(h') = h$. Следовательно, выполнено условие 2) предложения 2.4. Наконец, пусть $x \in h$ и $y \in H$. Тогда $\varphi(x) \in h'$ и $\varphi(y) \in H'$, поэтому $\varphi(x)\varphi(y) \in h'$, т. е. $\varphi(xy) \in h'$. Значит, $xy \in h$, и выполнено условие 3$'$) леммы 2.5. Отсюда следует, что I — однородный идеал в R.

Докажем теперь, что отображение φ сюръективно. Пусть снова I' — однородный идеал в R'. Тогда $\varphi^{-1}(I')$ — однородный идеал в R, как мы только что доказали. Отсюда следует, что $\varphi\big(\varphi^{-1}(I')\big)$ — однородный идеал в R' и $\varphi\big(\varphi^{-1}(I')\big) \subseteq I'$. Пусть $x \in I'$. Тогда существует элемент $a \in R$, такой что $x = \varphi(a)$. Получаем, что $a \in \varphi^{-1}(I')$, следовательно, $x = \varphi(a) \in \varphi\big(\varphi^{-1}(I')\big)$, и в итоге $\varphi\big(\varphi^{-1}(I')\big) = I'$.

Теперь докажем, что отображение φ инъективно. Сначала докажем, что $\varphi^{-1}\big(\varphi(I)\big) = I$ для любого однородного идеала кольца R. Если $a \in I$, то $\varphi(a) \in \varphi(I)$, поэтому $a \in \varphi^{-1}\big(\varphi(I)\big)$. Отсюда следует включение $I \subseteq \varphi^{-1}\big(\varphi(I)\big)$.

Пусть $a \in \varphi^{-1}\bigl(\varphi(I)\bigr)$. Тогда $\varphi(a) \in \varphi(I)$, поэтому существует элемент $x \in I$, такой что $\varphi(a) = \varphi(x)$. Значит, $x - a \in \varkappa \subseteq I$, и, таким образом, $a \in I$. Следовательно, $\varphi^{-1}\bigl(\varphi(I)\bigr) \subseteq I$. Это означает, что $I = \varphi^{-1}\bigl(\varphi(I)\bigr)$. Пусть $\varphi(I_1) = \varphi(I_2)$, т. е. выполняется равенство $\varphi(I_1) = \varphi(I_2)$ для некоторых однородных идеалов I_1 и I_2 кольца R, которые содержат $\varkappa$. Тогда мы получаем, что

$$I_1 = \varphi^{-1}\bigl(\varphi(I_1)\bigr) = \varphi^{-1}\bigl(\varphi(I_2)\bigr) = I_2.$$

Нам осталось доказать, что φ сохраняет включение. Если $I_1 \subset I_2$, то $\varphi(I_1) \subseteq \subseteq \varphi(I_2)$. Если $\varphi(I_1) = \varphi(I_2)$, то получаем равенство $I_1 = I_2$ — противоречие. Если $\varphi(I_1) \subset \varphi(I_2)$, то

$$I_1 = \varphi^{-1}\bigl(\varphi(I_1)\bigr) \subseteq \varphi^{-1}\bigl(\varphi(I_2)\bigr) = I_2.$$

Если $I_1 = I_2$, то $\varphi(I_1) = \varphi(I_2)$, что противоречит предположению. Это завершает доказательство. □

Теорема 2.11. *Если I — однородный идеал параградуированного кольца R, то каждый однородный идеал фактор-кольца R/I имеет вид I'/I для некоторого однородного идеала I' кольца R, который содержит I.*

Доказательство. Пусть $\eta\colon R \to R/I$ — естественный квазиоднородный эпиморфизм. Согласно предыдущей теореме каждый однородный идеал в R/I имеет вид $\eta(I')$ для некоторого однородного идеала I' в R, содержащего ядро морфизма η, т. е. содержащего I. Следовательно,

$$\eta(I') = \{\eta(a) \mid a \in I'\} = \{a + I \mid a \in I'\} = I'/I. \qquad \square$$

Определение 2.12. Пусть $I_1, \ldots, I_n$ — однородные идеалы параградуированного кольца R. Наименьший однородный идеал, содержащий каждый из идеалов I_j, называется *суммой* однородных идеалов $I_1, \ldots, I_n$.

Теорема 2.13. *Если $I_1, \ldots, I_n$ — однородные идеалы параградуированного кольца R, то $S = \{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \mid \alpha_j \in I_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ — сумма однородных идеалов $I_1, \ldots, I_n$.*

Доказательство. Докажем, что S — однородный идеал кольца R. Если $x \in h(S)$, то найдутся элементы $\alpha_j \in I_j$, такие что $x = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Так как $x \in H$, отсюда следует, что $-x \in H$. Тогда из того, что $-x = -\alpha_1 + \ldots + (-\alpha_n)$ и $x \in H$, следует, что $\alpha_j \in H$ для любого j. Поэтому $\alpha_j \in h(I_j)$ для всех j и, так как I_j — однородный идеал, $-\alpha_j \in h(I_j)$. Иначе говоря, $-x \in h(S)$. Пусть теперь $x, y \in h(S)$ такие, что $x + y \in H$. Очевидно, что $x + y \in h(S)$. Если $x \in H$ и $y \in h(S)$, то $xy = x(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$ для некоторых $\alpha_j \in h(I_j)$. Отсюда вытекает, что $x\alpha_j \in h(I_j)$ для всех j, поэтому $xy \in h(S)$. Следовательно, S — однородный идеал в R.

Если $\alpha_j \in I_j$, то $\alpha_j = 0 + \ldots + 0 + \alpha_j + 0 + \ldots + 0 \in S$. Поэтому $I_j \subseteq S$ для всех j. Если T — однородный идеал, который содержит каждый идеал I_j, то $S \subseteq T$. Следовательно, S — наименьший однородный идеал, содержащий все однородные идеалы $I_1, \ldots, I_n$. □

Определение 2.14. Пусть R — коммутативное параградуированное кольцо и I — однородный идеал в R. Множество

$$r(I) = \{a \in R \mid a^n \in h(I) \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}$$

называется *радикалом* однородного идеала I.

Определение 2.15. Пусть R — коммутативное параградуированное кольцо с единицей и I — однородный идеал в R. Однородный идеал I называется *примарным*, если для любых $a, b \in R$, таких что $ab \in h(I)$ и $a \notin h(I)$, справедливо, что $b^n \in h(I)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.16. *Если I — однородный идеал коммутативного параградуированного кольца R с единицей, то $r(I)$ будет однородным идеалом в R и $h(I) \subseteq r(I)$.*

Доказательство. Если $x \in h\bigl(r(I)\bigr)$, то $x \in H$ и $x \in r(I)$. Так как $x \in r(I)$, то существует $n \in \mathbb{N}$, при котором $x^n \in h(I)$. Следовательно, $x^n \in H$ и $x^n \in I$. Так как $-x^n \in H \cap I$, также получаем, что $(-1)^n x^n \in H \cap I$, т. е. $(-x)^n \in h(I)$. Следовательно, $-x \in h\bigl(r(I)\bigr)$. Если $x, y \in h\bigl(r(I)\bigr)$ и $x + y \in H$, то найдутся натуральные числа m и n, такие что $x^m \in h(I)$ и $y^n \in h(I)$. Тогда мы получим, что

$$(x+y)^{m+n-1} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} x^{m+n-1-k} y^k.$$

Отсюда следует, что $x + y \in r(I)$. Если $x \in H$ и $y \in h\bigl(r(I)\bigr)$, то $y^n \in h(I)$ для некоторого натурального числа n и $(xy)^n = x^n y^n \in h(I)$, так как $x^n \in H$ и I — однородный идеал. Следовательно, $xy \in h\bigl(r(I)\bigr)$. Теорема доказана. □

Литература

[1] Bourbaki N. Algèbre. Chap. II. — Paris: Hermann, 1962.

[2] Chadeyras M. Essai d'une théorie noetherienne pour les anneaux commutatifs, dont la graduation est aussi générale que possible // Suppl. Bull. Soc. Math. Fr. Mémoire. — 1970. — Vol. 22. — P. 1—143.

[3] Ilić-Georgijević E. Paragraduirane strukture (grupe, prsteni i moduli): magistarski rad. — Univerzitet u Istočnom Sarajevu, 2009.

[4] Krasner M. Anneaux gradués généraux // Colloque d'Algébre Rennes. — 1980. — P. 209—308.

[5] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). I // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 9. — P. 350—352.

[6] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). II // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1986. — Vol. 62, no. 10. — P. 389—391.

[7] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules). III // Proc. Japan Acad. Ser. A. — 1987. — Vol. 63, no. 1. — P. 10—12.

[8] Krasner M., Vuković M. Structures paragraduées (groupes, anneaux, modules) // Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics. No. 77. — Kingston, Ontario, Canada: Queen's University, 1987.

[9] Năstăsescu C., Van Oystaeyen F. Methods of Graded Rings. — Berlin: Springer, 2004.

[10] Perić V. Algebra. I. — Sarajevo: Svjetlost, 1991.

[11] Rotman J. J. An Introduction to Homological Algebra. — Berlin: Springer, 2009.

[12] Vuković M. Structures graduées et paragraduées: Prepublication de l'Institut Fourier. Université de Grenoble I. No. 536. — 2001.