О T-пространствах в относительно свободной двупорождённой лиевски нильпотентной алгебре индекса 4

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: лиевская нильпотентность, коммутаторные соотношения, соотношения Фробениуса, T-пространство, T_2-пространство.

Аннотация

В настоящей работе продолжается изучение T-пространств в лиевски нильпотентных алгебрах индекса $l > 3$. Основное внимание сконцентрировано на случае двупорождённой алгебры индекса 4, для которого указаны простые конечные системы порождающих для широкого класса T-пространств в $T^{(3)}/T^{(4)}$.

Abstract

A. V. Grishin, On T-spaces in a relatively free two-generated Lie nilpotent associative algebra of index 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 133—139.

In this work, we continue to study T-spaces in Lie nilpotent algebras of index $l > 3$. The focus is on the two-generated algebra of index 4, where simple finite systems of generators are specified for a broad class of T-spaces in $T^{(3)}/T^{(4)}$.

1. Введение

Для получения отрицательного решения аналога проблемы Шпехта в характеристике $p > 0$ и проблемы Мальцева использовались бесконечные возрастающие цепочки T-пространств в относительно свободной алгебре Грассмана $F^{(3)} = F/T^{(3)}$, где $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная счётно порождённая алгебра с единицей над бесконечным полем k характеристики $p > 0$, $T^{(l)} = ([x_1, \ldots, x_l])^T$ — T-идеал алгебры F, порождённый коммутатором длины l. Конструкции этих цепочек достаточно разнообразны (см. [2—4, 7]), и в целом T-пространства в $F^{(3)}$ хорошо изучены. Естественно возникает вопрос о строении T-пространств на следующих ступенях: $T^{(3)}/T^{(4)}, \ldots, T^{(l-1)}/T^{(l)}, \ldots$.

Ситуация с T-пространствами в $T^{(l-1)}/T^{(l)}$ при $l > 3$ заметно отличается от случая $l = 3$ и представляется весьма загадочной. Наша цель — показать это на примере $l = 4$. Всюду ниже образы переменных x_i в фактор-алгебре $F^{(l)} = F/T^{(l)}$ (*лиевски нильпотентной алгебре индекса* l) для простоты обозначаются теми же буквами. Иногда переменные обозначаются другими буквами: $y, t, \ldots$.

2. Основные соотношения в алгебре $F^{(l)}$

В [5] доказаны следующие факты.

Теорема 1 (соотношения Фробениуса). *Если $p^s \geqslant l$ и $p > 2$, то в алгебре $F^{(l)}$ справедливы следующие соотношения*:

1) $[x_1^{p^s}, x_2] = 0$;
2) $(x_1 + x_2)^{p^s} = x_1^{p^s} + x_2^{p^s}$;
3) $(x_1 x_2)^{p^s} = x_1^{p^s} x_2^{p^s}$.

Отметим, что приведённые в теореме 1 соотношения зависят от двух переменных и, следовательно, имеют место также и в относительно свободной альтернативной лиевски нильпотентной алгебре.

В теории *T-пространств* (линейных подпространств относительно свободных алгебр, замкнутых относительно эндоморфизмов этих алгебр) важную роль играет T-пространство W_p в алгебре $F^{(l)}$, порождённое всеми p-словами, т. е. одночленами, в которые каждая переменная входит с кратностью p. Отметим, что T-пространство W_p является подалгеброй в алгебре $F^{(l)}$. Одним из важных применений теоремы 1 является следующий результат (см. [5]).

Теорема 2. *Если $p \geqslant l > 2$, то W_p раскладывается в прямую сумму T-пространств*

$$W_p = D_p \oplus CD_p,$$

где $D_p = \{x_1^p\}^T$ — T-пространство, порождённое p-й степенью переменной (подалгебра, изоморфная алгебре коммутативных многочленов от счётного набора переменных), а CD_p — пересечение W_p с коммутатором алгебры $F^{(l)}$, являющееся ненильпотентным ниль-радикалом W_p, на котором выполнено тождество $x_1^p = 0$.

Обозначим через $\bar{T}^{(r)}$ образ T-идеала $T^{(r)}$ в алгебре $F^{(l)}$. Имеют место следующие *коммутаторные соотношения*.

Лемма Латышева (см. [6]). *$\bar{T}^{(r)}\bar{T}^{(s)} = 0$ при $r + s - 2 \geqslant l$.*

Лемма Воличенко (см. [1]). *Если характеристика поля k больше 3, то $\bar{T}^{(3)}\bar{T}^{(2)} = 0$ при $l = 4$.*

$\bar{T}^{(l-1)} \underbrace{\bar{T}^{(2)} \ldots \bar{T}^{(2)}}_{n} \neq 0$ *при нечётном l и при любом n, что следует из свойств сверхграссмановой алгебры* (*см.* [5]).

Замечание. Из леммы Воличенко следует, что при $l = 4$ $\bar{T}^{(3)}$ лежит в центре алгебры $F^{(4)}$. Представляет интерес вопрос о полном описании центра алгебры $F^{(4)}$.

3. Порождающие элементы T-пространства $T^{(3)}/T^{(4)}$

В этом разделе мы рассмотрим удобную для дальнейшего систему порождающих T-пространства $T^{(3)}/T^{(4)}$. Для этого заметим сначала, что по модулю $T^{(3)}$ все элементы из алгебры F записываются через следующий *канонический* базис (см. [3]):

$$x_{j_1}^{n_{j_1}-1} x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \ldots x_{j_{2t-1}}^{n_{j_{2t-1}}-1} x_{j_{2t}}^{n_{j_{2t}}-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \ldots [x_{j_{2t-1}}, x_{j_{2t}}] x_i^{m_{i_1}} \ldots x_s^{m_{i_s}},$$

где $j_1 < \ldots < j_{2t}$, $i_1 < \ldots < i_s$, n_{j_β}, m_{i_α} — произвольные натуральные числа, причём множества индексов $\{j_\beta \in \mathbb{N} \mid \beta = \overline{1, 2t}\}$ и $\{i_\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha = \overline{1, s}\}$ не пересекаются, $t, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При $t = s = 0$ базисный элемент равен 1. Для приведения произвольного элемента из алгебры F к линейной комбинации указанных базисных элементов достаточно использовать следующие соотношения в алгебре $F^{(3)}$:

$$[x_i, x_j][x_i, x_r] = 0, \quad [x_i, x_j, x_r] = 0, \quad [x_i, x_j][x_r, x_s] = -[x_r, x_j][x_i, x_s].$$

Таким образом, любой многочлен f из $T^{(3)}/T^{(4)}$ может быть записан как линейная комбинация многочленов вида

$$[x_i, x_j][x_i, x_r]u, \quad [x_i, x_j, x_r]v, \quad ([x_i, x_j][x_r, x_s] + [x_r, x_j][x_i, x_s])w, \tag{1}$$

где u, v, w — некоторые одночлены. Так как $T^{(3)}/T^{(4)}$ как линейное пространство порождается многочленами (1), то в качестве линейных порождающих, с точностью до переобозначения переменных и линеаризации, можно взять многочлены из идеала $([x_1, x_2][x_1, x_3], [x_1, x_2, x_3])$. Отсюда, очевидно, вытекает следующий результат.

Предложение. *Любой многочлен от переменных x_1 и x_2 из $T^{(3)}/T^{(4)}$ является линейной комбинацией многочленов вида*

$$[x_1, x_2]^2 x_1^r x_2^s, \quad [x_1, x_2, x_2] x_1^r x_2^s, \quad [x_2, x_1, x_1] x_1^r x_2^s.$$

Любой многочлен от переменных x_1, x_2, x_3 из $T^{(3)}/T^{(4)}$ является линейной комбинацией многочленов вида

$$[x_1, x_2][x_1, x_3] x_1^r x_2^s x_3^t, \quad [x_1, x_2, x_3] x_1^r x_2^s x_3^t$$

и элементов, получаемых из них переобозначением переменных.

4. Случай двупорождённой алгебры

Пусть

$$T^{(l)}\langle x_1, x_2\rangle = k\langle 1, x_1, x_2\rangle \cap T^{(l)}$$

и

$$F^{(l)}\langle x_1, x_2\rangle = k\langle 1, x_1, x_2\rangle / T^{(l)}\langle x_1, x_2\rangle \,—$$

относительно свободная двупорождённая лиевски нильпотентная алгебра индекса l. Пусть T_2 — полугруппа эндоморфизмов алгебры $k\langle 1, x_1, x_2\rangle$ и kT_2 — соответствующая полугрупповая алгебра. Тогда $k\langle 1, x_1, x_2\rangle$ естественным образом наделяется структурой правого унитарного (kT_2)-модуля. Назовём T_2-*пространством* любой (kT_2)-подмодуль алгебры $k\langle 1, x_1, x_2\rangle$ и её факторов по T-идеалам. Как обычно, через S^{T_2} обозначается T_2-пространство, порождённое множеством S.

В [4, 7] в T_2-пространстве $T^{(2)}\langle x_1, x_2\rangle / T^{(3)}\langle x_1, x_2\rangle$ рассматривается следующая бесконечная строго возрастающая цепочка T_2-пространств:

$$\{x_1^{p-1}x_2^{p-1}[x_1, x_2]\}^{T_2} \subset \ldots \subset \{x_1^{p^s-1}x_2^{p^s-1}[x_1, x_2]\}^{T_2} \subset \ldots .$$

По этой цепочке, в частности, можно построить бесконечную возрастающую цепочку T-идеалов. Как уже отмечалось, в T_2-пространстве $M = T^{(3)}\langle x_1, x_2\rangle / T^{(4)}\langle x_1, x_2\rangle$ ситуация совсем другая. В предыдущем разделе показано, что

$$M = \bigl\{[x_1, x_2]^2 x_1^r x_2^s,\ [x_1, x_2, x_2] x_1^r x_2^s \mid r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\bigr\}^{T_2}.$$

Теорема 3. *Пусть* $L = \bigl\{[x_1, x_2]^2 x_1^r x_2^s \mid r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}\bigr\}$, k — *поле характеристики* $p > 2$. *Тогда*

1) $L = \{[x_1, x_2]^2\}^{T_2}$ — *простой* (kT_2)-*подмодуль в* M;
2) $M = \{[x_1, x_2]^2,\ [x_1, x_2, x_2]\}^{T_2}$ *и фактор-модуль* M/L *прост.*

Доказательство. Заметим, что если некоторый полиоднородный многочлен из M нетривиальным образом содержит $[x_1, x_2, x_2]x_1^r x_2^s$ или $[x_2, x_1, x_1]x_1^r x_2^s$, то из него с помощью подстановок и линейных действий можно получить или $[x_1, x_2, x_2]$, или $[x_2, x_1, x_1]$. В самом деле, достаточно рассмотреть подстановку $x_i \mapsto 1 + x_i$ и выделить (что всегда возможно в силу бесконечности основного поля) компоненту типа $(1, 2)$ или $(2, 1)$. Аналогично из многочлена $[x_1, x_2]^2 x_1^r x_2^s$ можно получить многочлен $[x_1, x_2]^2$.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить следующие два факта.

I. Любой многочлен вида $[x_1, x_2]^2 x_1^r x_2^s$ можно получить из $[x_1, x_2]^2$ с помощью подстановок и линейных действий.

II. По модулю L любой элемент вида $[x_1, x_2, x_2]x_1^r x_2^s$ можно получить из $[x_1, x_2, x_2]$ с помощью подстановок и линейных действий.

Доказательство утверждения I. Достаточно доказать, что для любого натурального N из $[x_1, x_2]^2$ можно получить $x_1^N[x_1, x_2]^2$ с помощью подстановок только в x_1. Сделав подстановку $x_1 \mapsto x_1(1+t)$ и линеаризуя по t, из многочлена $[x_1, x_2]^2$ получаем многочлен $2[x_1t, x_2][x_1, x_2]$. Применяя, далее, подстановки $t \mapsto x_1^l$, $x_1 \mapsto x_1^m$, получаем многочлен

$$[x_1^{l+m}, x_2][x_1^m, x_2] = (l+m)m[x_1, x_2]^2 x_1^{l+2m-2}.$$

Остаётся подобрать такие l и m, что $l + 2m - 2 = N$, $(l+m, p) = 1$, $(m, p) = 1$. Обозначив $l+m$ через a и m через b, приходим к следующей тривиальной задаче: для произвольного натурального числа $N' \geqslant 2$ подобрать такие натуральные числа a и b, что $a \geqslant b$, $(a, p) = 1$, $(b, p) = 1$ и $a + b = N' = N + 2$. Разумеется, это можно сделать, вообще говоря, многими способами. Например, если $N' - 1$ не делится на p, то положим $a = N' - 1$, $b = 1$. Если же $N' - 1$ делится на p, то $N' = dp + 1 \geqslant 4$. Следовательно, $N' - 2 \geqslant 2$, и достаточно положить $a = N' - 2$, $b = 2$.

Доказательство утверждения II. Покажем сначала, что, пользуясь только подстановками в x_2, можно получить многочлен $[x_1, x_2, x_2]x_2^N$. Для этого так же, как и выше, получим сначала многочлен

$$[x_1, x_2t, x_2] + [x_1, x_2, x_2t]. \tag{2}$$

Применяя подстановку $t \mapsto x_2^l$, $x_2 \mapsto x_2^m$, получаем многочлен

$$[x_1, x_2^{l+m}, x_2^m] + [x_1, x_2^m, x_2^{l+m}] = 2(l+m)m[x_1, x_2, x_2]x_2^{l+2m-2}.$$

Далее рассуждаем аналогично доказательству утверждения I.

Покажем теперь, как получить элемент $[x_1, x_2, x_2]x_1^N$. Заметим сразу, что если $N+1$ не делится на p, то подстановка $x_1 \mapsto x_1^{N+1}$ даёт нужный результат: $(N+1)x_1^N[x_1, x_2, x_2]$ плюс слагаемое из L.

Если $N+1$ делится на p, то сначала уже известным способом получим многочлен (2), а затем, применяя подстановку $t \mapsto x_1^n$, получаем (сравнения пишутся по модулю L)

$$[x_1, x_2x_1^N, x_2] + [x_1, x_2, x_2x_1^N] \equiv 2[x_1, x_2, x_2]x_1^N + N[x_1, x_2, x_1]x_1^{N-1}x_2.$$

Применяя теперь к (2) подстановку $x_1 \mapsto x_1^2$, $t \mapsto x_1^{N-1}$, получаем

$$\begin{aligned}[x_1^2, x_2x_1^{N-1}, x_2] + [x_1^2, x_2, x_2x_1^{N-1}] &\equiv 2[x_1, x_2, x_2]x_1^N + 2[x_1, x_2, x_2]x_1^N + \\ + 2(N-1)[x_1, x_2, x_1]x_1^{N-1}x_2 &= 4[x_1, x_2, x_2]x_1^N + 2(N-1)[x_1, x_2, x_1]x_1^{N-1}x_2.\end{aligned}$$

Так как пара $(2, N)$ не пропорциональна паре $\bigl(4, 2(N-1)\bigr)$, из приведённых соотношений следует, что $[x_1, x_2, x_2]x_1^N$ можно получить из $[x_1, x_2, x_2]$ с помощью T_2-пространственных действий.

Осталось заметить, что для получения многочлена $[x_1, x_2, x_2]x_1^r x_2^s$ нужно сначала получить по модулю L многочлен $[x_1, x_2, x_2]x_1^r$, а затем, пользуясь только подстановками в x_2, получить $[x_1, x_2, x_2]x_1^r x_2^s$. □

Следствие. *Любое ненулевое T_2-пространство в M порождено подмножеством двухэлементного множества* $\{[x_1, x_2]^2,\ [x_1, x_2, x_2]\}$.

5. Конечная базируемость некоторых систем в $T^{(3)}/T^{(4)}$

Одна из первых построенных в своё время не конечно базируемых в T-пространственном смысле систем в $F^{(3)}$ имела вид

$$\{[x_1,y_1]x_1^{p-1}y_1^{p-1}\dots[x_i,y_i]x_i^{p-1}y_i^{p-1},\ i\in\mathbb{N}\}.$$

Естественно возникает вопрос: нельзя ли построить что-то аналогичное в $T^{(3)}/T^{(4)}$?

Будем считать, что $p>3$. Как уже отмечалось в разделе 3, T-пространство $\overline{T^{(3)}}/T^{(4)}$ порождается элементами вида πu, где π — многочлен из $\overline{T^{(3)}}\langle x_1,x_2,x_3\rangle$, называемый *префиксом*, а u — произвольный одночлен от переменных $x_4,\dots,x_i,\dots$. Как следует из леммы Воличенко (см. раздел 2), $[\pi,u]=0$ и переменные в одночлене u коммутируют. Пусть $U\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ — подалгебра в $\bar T^{(3)}$, порождённая произведением $T^{(3)}\langle x_1,x_2,x_3\rangle\cdot F^{(4)}\langle x_4,\dots,x_i,\dots\rangle$, где $F^{(4)}\langle x_4,\dots,x_i,\dots\rangle$ — подалгебра в $F^{(4)}$, порождённая переменными $x_4,\dots,x_i,\dots$. Ввиду леммы Воличенко второй сомножитель можно заменить на алгебру коммутативных многочленов. Можно показать, что любая подсистема в алгебре $U\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ порождает конечно базируемое T-пространство. Доказательство основано на том, что это верно для пространства префиксов $T^{(3)}\langle x_1,x_2,x_3\rangle$ и для алгебры коммутативных многочленов (см. [8]). Здесь мы ограничимся частным случаем, когда рассматриваются подсистемы в алгебре $U\langle x_1,x_2\rangle$, состоящие из многочленов алгебры $U\langle x_1,x_2,x_3\rangle$, не содержащих переменной x_3.

Теорема 4. *Пусть $S\subset U\langle x_1,x_2\rangle$. Тогда T-пространство S^T порождается конечным набором элементов из множества*

$$\{[x_1,x_2]^2x_4^{p^m},\ [x_1,x_2,x_2]x_4^{p^m}\mid m=0,1,\dots\}.$$

Доказательство. Пусть $T^*=T_2\times T_0$, где T_0 — полугруппа эндоморфизмов алгебры $k\langle x_4,\dots,x_i,\dots\rangle$. Произвольный полиоднородный многочлен f из S^{T^*} имеет вид

$$f=(\alpha[x_1,x_2]^2x_1^{r_1}x_2^{r_2}+\beta[x_1,x_2,x_2]x_1^{s_1}x_2^{s_2}+\gamma[x_2,x_1,x_1]x_1^{t_1}x_2^{t_2})u,$$

где $u=x_4^{d_4}\dots x_n^{d_n}$, $\alpha,\beta,\gamma\in k$.

Пусть для определённости d_4 имеет наименьшую из всех d_i кратность вхождения p. Обозначим её через $m(f)$. Тогда из одночлена u с помощью T-пространственных действий можно получить одночлен $x_4^{p^{m(f)}}$. В самом деле, достаточно $x_5,\dots$ перевести в 1, а x_4 в x_4+1 и выделить однородную компоненту степени $p^{m(f)}$. Из $x_4^{p^{m(f)}}$ очевидным образом можно получить одночлен u. Итак, в S^{T^*} имеются многочлены следующих трёх типов:

$$\alpha[x_1,x_2]^2x_4^{p^{m(f)}},\quad \beta[x_1,x_2,x_2]x_4^{p^{m(f)}},\quad \gamma[x_2,x_1,x_1]x_4^{p^{m(f)}},$$

из которых в свою очередь по теореме 3 можно получить f.

Для всех многочленов f из S^{T^*}, у которых $\beta = \gamma = 0$, в качестве порождающего элемента нужно взять многочлен $[x_1, x_2]^2 x_4^{p^m}$, где m минимальное из всех $m(f)$.

Если же, например, $\beta \neq 0$, то в S^{T^*} имеется элемент $[x_1, x_2, x_2] x_4^{p^{m(f)}}$. Тогда в качестве порождающего достаточно взять многочлен $[x_1, x_2, x_2] x_4^{p^m}$, где m минимальное из всех $m(f)$, для которых в многочлене f хотя бы один коэффициент β или γ отличен от нуля, и в качестве второго порождающего, возможно, добавить некоторый многочлен вида $[x_1, x_2]^2 x_4^{p^l}$. $\square$

Замечание. Приведённые выше факты показывают, что конструкции систем в $T^{(3)}/T^{(4)}$, аналогичные уже известным в $T^{(2)}/T^{(3)}$, приводят к конечно базируемым T-пространствам. Скорее всего, так же обстоит дело и в любом T-пространстве $T^{(l-1)}/T^{(l)}$ при $l > 4$. По-видимому, для получения не конечной базируемости в этих T-пространствах нужны какие-то принципиально новые конструкции. Существуют ли они? Вопрос пока открыт.

Литература

[1] Воличенко И. Б. T-идеал, порождённый элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$: препринт. — Минск: Ин-т мат. АН БССР, 1978.

[2] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 101—118.

[3] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О структуре относительно свободной алгебры Грассмана // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 3—93.

[4] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О T-пространственном и мультипликативном строении относительно свободной алгебры Грассмана // Мат. сб. — 2009. — Т. 200, № 9. — С. 41—80.

[5] Гришин А. В., Цыбуля Л. М., Шокола А. А. О T-пространствах и соотношениях в относительно свободных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах // Фундамент. прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 135—148.

[6] Латышев В. Н. О конечной порождённости T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сиб. мат. журн. — 1965. — № 6. — С. 1432—1434.

[7] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 1. — С. 143—160.

[8] Grishin A. V., Shchigolev V. V. On T-spaces and their applications // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 134, no. 1. — P. 1799—1878.