Ассоциативные кольца с большим центром

Д. В. ЗЛЫДНЕВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: dvz29@yandex.ru

УДК 512.552.3+512.552.4

Ключевые слова: центр кольца, полупервичное кольцо, PI-кольцо.

Аннотация

Кольцо R называется *кольцом с большим центром*, если любой его ненулевой идеал имеет ненулевое пересечение с центром кольца R. В работе указаны некоторые условия того, что идеал кольца с большим центром сам является кольцом с большим центром, а также приведён пример кольца с большим центром R и идеала $I \lhd R$, таких что I не является кольцом с большим центром.

Abstract

D. V. Zlydnev, Associative rings with large center, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 141—144.

A ring R is called a *ring with large center* if any nonzero ideal of R has nonzero intersection with the center of R. We give some conditions for an ideal of a ring with large center to be itself a ring with large center, and also we provide an example of a ring with large center R and its ideal $I \lhd R$ such that I is not a ring with large center.

Мы рассматриваем ассоциативные кольца, не обязательно содержащие единицу.

Запись $I \lhd R$ означает, что I — (двусторонний) идеал кольца R. Центр кольца R будем обозначать как $\mathrm{Cen}(R)$. Для левого и правого аннуляторов непустого подмножества M кольца R используем обозначения $\mathrm{l}_R(M)$ и $\mathrm{r}_R(M)$ соответственно.

Определение. Кольцо R называется *кольцом с большим центром* (или *IIC-кольцом*), если любой его ненулевой идеал имеет ненулевое пересечение с центром, т. е. из того, что $0 \neq I \lhd R$, следует, что $I \cap \mathrm{Cen}(R) \neq 0$.

В [1] доказано, что если R — IIC-кольцо, $I \lhd R$ и при этом кольцо I полупервично, то I также является IIC-кольцом. На самом деле условие полупервичности кольца I можно ослабить.

Теорема 1. *Пусть R — IIC-кольцо. Пусть $I \lhd R$, причём $\mathrm{l}_I(I) = \mathrm{r}_I(I)$. Тогда I — IIC-кольцо.*

Доказательство. Возьмём $0 \neq K \lhd I$. Хотим доказать, что $K \cap \mathrm{Cen}(I) \neq 0$. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $J = IKI \neq 0$. Так как $J \lhd R$ и R — IIC-кольцо, то из того, что $J \cap \mathrm{Cen}(R) \neq 0$, следует, что $J \cap \mathrm{Cen}(I) \neq 0$, ведь $J \subset I$. Поскольку $J \subset K$, то $K \cap \mathrm{Cen}(I) \neq 0$.
2. Пусть $IK = 0$. Из условия $\mathrm{l}_I(I) = \mathrm{r}_I(I)$ следует, что $KI = 0$. Тогда ясно, что $K \subset \mathrm{Cen}(I)$.
3. Если $IKI = 0$, но $IK \neq 0$, то из того, что $IK \subset \mathrm{l}_I(I)$, следует, что $IK \subset \mathrm{r}_I(I)$, а значит, $IK \subset \mathrm{Cen}(I)$. Снова видим, что $K \cap \mathrm{Cen}(I) \neq 0$. $\square$

Теорема 2. *Пусть R — IIC-кольцо. Пусть $I \lhd R$, причём $\mathrm{l}_I(I) = 0$. Тогда I — IIC-кольцо.*

Доказательство. Возьмём $0 \neq K \lhd I$. Докажем, что $K \cap \mathrm{Cen}(I) \neq 0$. Если $IKI \neq 0$, то применим то же рассуждение, что и в теореме 1.

Рассмотрим случай, когда $IKI = 0$. Из условия $\mathrm{l}_I(I) = 0$ следует, что $IK = 0$, $KI \neq 0$. Теоретически возможны два случая.

1. Пусть $RKI = 0$. Тогда $0 \neq KI \lhd R$. Поскольку $KI \subset K \subset I$ и R — IIC-кольцо, имеем, что из того, что $KI \cap \mathrm{Cen}(R) \neq 0$, следует, что $K \cap \mathrm{Cen}(R) \neq 0$, поэтому $K \cap \mathrm{Cen}(I) \neq 0$.
2. Пусть $RKI \neq 0$. Так как $RKI \lhd R$, то найдётся ненулевой элемент $a \in RKI \cap \mathrm{Cen}(R)$. С одной стороны, $0 \neq a \in \mathrm{Cen}(I)$ и $\mathrm{l}_I(I) = 0$, поэтому $aI = Ia \neq 0$. С другой стороны, $Ia \subset IRKI \subset IKI = 0$, т. е. $Ia = 0$. Получили противоречие.

Итак, если $IKI = 0$, то $RKI = 0$ и утверждение доказано. $\square$

Ясно, что в теореме 2 условие $\mathrm{l}_I(I) = 0$ можно заменить условием $\mathrm{r}_I(I) = 0$.

Пусть теперь нет никаких ограничений на идеал кольца с большим центром. Тогда этот идеал не обязан быть IIC-кольцом. Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть R — кольцо, порождённое элементами x, y, $z_1, \ldots, z_n, \ldots$ со следующими соотношениями:

$$z_i z_j = 0, \;\; z_i x = x z_i = 0, \;\; y z_i = 0, \;\; xy = 0, \;\; y^2 = 0, \;\; z_i y x^{i+1} = 0 \text{ для любых } i, j. \tag{1}$$

Рассмотрим идеал I кольца R, который порождается элементами x и y. Утверждается, что R — кольцо с большим центром, но I не IIC-кольцо.

Лемма 1. *Следующие элементы образуют базис аддитивной группы кольца R:*

$$y, \;\; yx^k, \;\; x^k, \;\; z_i y, \;\; z_i y x^k \; (k \leqslant i), \;\; z_i. \tag{2}$$

Доказательство. Кольцо R изоморфно фактор-кольцу S/T, где S — свободное кольцо над элементами x, y, $z_1, \ldots, z_n, \ldots$, а T — идеал кольца S, порождённый левыми частями соотношений (1).

Нетрудно убедиться, что все базисные элементы кольца S, кроме элементов вида (2), лежат в T (и являются там базисом), а следовательно, они равны нулю в кольце R. Осталось проверить линейную независимость над $\mathbb{Z}$ элементов (2) кольца R. Но никакая ненулевая сумма этих элементов в S не может попасть в T, а значит, она не равна нулю в R. $\square$

Идеал I не содержит элементов z_i. Базис аддитивной группы кольца I состоит из элементов

$$y,\quad yx^k,\quad x^k,\quad z_iy,\quad z_iyx^k\ (k\leqslant i).$$

Лемма 2. *Центр кольца R состоит из всевозможных сумм элементов z_iyx^i.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $a\in \mathrm{Cen}(R)$. Можем записать его в виде

$$a=n_0y+\sum_{k\geqslant 1}n_kyx^k+\sum_{k\geqslant 1}m_kx^k+\sum_{i\geqslant 1}l_{i0}z_iy+\sum_{i\geqslant 1}\sum_{1\leqslant k\leqslant i}l_{ik}z_iyx^k+\sum_{i\geqslant 1}p_iz_i,$$

где n_0, n_k, m_k, l_{i0}, l_{ik}, p_i — целые числа, которые определены однозначно.

Из условия $ax=xa$ получаем, что

$$n_0yx+\sum_{k\geqslant 1}n_kyx^{k+1}+\sum_{k\geqslant 1}m_kx^{k+1}+\sum_{i\geqslant 1}l_{i0}z_iyx+\sum_{i\geqslant 2}\sum_{1\leqslant k\leqslant i-1}l_{ik}z_iyx^{k+1}=\\=\sum_{k\geqslant 1}m_kx^{k+1}.$$

Отсюда следует, что n_0, все n_k и все l_{i0} равны 0, все l_{ik} равны 0 при $k\neq i$. Поэтому

$$a=\sum_{k\geqslant 1}m_kx^k+\sum_{i\geqslant 1}l_{ii}z_iyx^i+\sum_{i\geqslant 1}p_iz_i.$$

Из условия $ay=ya$ имеем, что

$$\sum_{i\geqslant 1}p_iz_iy=\sum_{k\geqslant 1}m_kyx^k.$$

Следовательно, все m_k и все p_i равны 0.

Итак, если $a\in \mathrm{Cen}(R)$, то $a=\sum\limits_{i\geqslant 1}l_{ii}z_iyx^i$.

Обратно, пусть $b=\sum\limits_{i\geqslant 1}l_{ii}z_iyx^i$, где l_{ii} — произвольные целые числа. Легко проверить, что элемент b аннулирует слева и справа все базисные элементы кольца R. Поэтому $bR=Rb=0$. В частности, $b\in \mathrm{Cen}(R)$. □

Заметим, что $\mathrm{Cen}(R)\subset I$. Поэтому $\mathrm{Cen}(I)=\mathrm{Cen}(R)$.

Лемма 3. *Кольцо R является IIC-кольцом.*

Доказательство. Пусть J — произвольный ненулевой идеал кольца R. Выберем некоторый ненулевой элемент $a\in J$. Он имеет вид

$$a=n_0y+\sum_{k\geqslant 1}n_kyx^k+\sum_{k\geqslant 1}m_kx^k+\sum_{i\geqslant 1}l_{i0}z_iy+\sum_{i\geqslant 1}\sum_{1\leqslant k\leqslant i}l_{ik}z_iyx^k+\sum_{i\geqslant 1}p_iz_i,$$

где n_0, n_k, m_k, l_{i0}, l_{ik}, p_i — целые числа, которые определены однозначно. Возможны несколько случаев.

1. Пусть $m_k \neq 0$ для некоторого k. Возьмём наименьшее число k, при котором $m_k \neq 0$. Тогда
$$0 \neq z_k y a = m_k z_k y x^k \in J \cap \mathrm{Cen}(R).$$
2. Если все m_k равны 0, но n_0 не равно 0, имеем, что
$$0 \neq z_1 a x = n_0 z_1 y x \in J \cap \mathrm{Cen}(R).$$
3. Пусть все m_k и n_0 равны 0, но n_k отлично от 0 для некоторого $k \geqslant 1$. Возьмём наименьшее число k, при котором $n_k \neq 0$. Тогда
$$0 \neq z_k a = n_k z_k y x^k \in J \cap \mathrm{Cen}(R).$$
4. Пусть все m_k равны 0, все n_k ($k \geqslant 0$) равны 0, но p_i отлично от 0 для некоторого i. Выберем наибольшее значение i среди таких, что $p_i \neq 0$. Имеем, что
$$0 \neq a y x^i = p_i z_i y x^i \in J \cap \mathrm{Cen}(R).$$
5. Осталось рассмотреть случай
$$0 \neq a = \sum_{i \geqslant 1} l_{i0} z_i y + \sum_{i \geqslant 1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant i} l_{ik} z_i y x^k.$$
Будем считать, что $z_i y = z_i y x^0$. Тогда
$$a = \sum_{i \geqslant 1} \sum_{0 \leqslant k \leqslant i} l_{ik} z_i y x^k = \sum_{i \geqslant 1} \sum_{0 \leqslant j \leqslant i} l_{i,i-j} z_i y x^{i-j}.$$
Выберем наибольшее значение j среди таких, что $l_{i,i-j} \neq 0$ для некоторого i. Имеем
$$0 \neq a x^j = \sum_{i \geqslant 1} l_{i,i-j} z_i y x^i \in J \cap \mathrm{Cen}(R).$$

Итак, мы убедились, что $J \cap \mathrm{Cen}(R) \neq 0$. Значит, R — IIC-кольцо. □

Более того, поскольку $\mathrm{Cen}(R) \subset I$, доказано, что I — существенный идеал кольца R.

Лемма 4. *Кольцо I не является IIC-кольцом.*

Доказательство. Возьмём идеал K кольца I, порождённый элементом y. Легко убедиться, что любой элемент из K имеет вид
$$n_0 y + \sum_{k \geqslant 1} n_k y x^k,$$
где $n_0, n_k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $K \cap \mathrm{Cen}(I) = 0$. □

Литература

[1] Armendariz E. P., Birkenmeier G. F., Park J. K. Ideal intrinsic extensions with connections to PI-rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2009. — Vol. 213. — P. 1756—1776.