Слабо регулярные полугруппы изотонных преобразований

В. И. КИМ
Московский государственный институт электронной техники (технический университет)
e-mail: victor-kim@mail.ru

И. Б. КОЖУХОВ
Московский государственный институт электронной техники (технический университет)
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

В. А. ЯРОШЕВИЧ
Московский государственный институт электронной техники (технический университет)
e-mail: V-Yaroshevich@ya.ru

УДК 512.534.3

Ключевые слова: полугруппа преобразований, изотонное преобразование, слабо регулярная полугруппа, квазиупорядоченное множество.

Аннотация

Пусть X — частично упорядоченное множество, $O(X)$ — полугруппа преобразований $X \to X$, сохраняющих порядок, т. е. при всех $x, y \in X$ если $x \leqslant y$, то $x\alpha \leqslant y\alpha$. Доказано, что полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий: 1) X — квазиполная цепь; 2) элементы из X попарно несравнимы; 3) $X = Y \cup Z$, причём $y < z$ при $y \in Y$, $z \in Z$; 4) $X = Y \cup Z$, $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ и $y_0 < z$ при $z \in Z$, $y < z_0$ при $y \in Y$; 5) $X = \{a, c\} \cup B$ и $a < b < c$ при $b \in B$; 6) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $1 < 4$, $1 < 5$, $2 < 5$, $2 < 6$, $3 < 4$, $3 < 6$. Кроме того, если X — квазиупорядоченное множество, не являющееся частично упорядоченным, то полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле в том и только том случае, если $x \leqslant y$ при всех $x, y \in X$.

Abstract

V. I. Kim, I. B. Kozhukhov, V. A. Yaroshevich, Weakly regular semigroups of isotone transformations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 145—165.

Let X be a partially ordered set and $O(X)$ be the semigroup of all mappings $X \to X$ that preserve the order, i.e., $x \leqslant y \Longrightarrow x\alpha \leqslant y\alpha$ for all $x, y \in X$. It is proved that the semigroup $O(X)$ is weakly regular in the wide sense if and only if at least one of the following conditions holds: (1) X is a quasi-complete chain; (2) the elements of X are not comparable pairwise; (3) $X = Y \cup Z$, where $y < z$ for $y \in Y$, $z \in Z$; (4) $X = Y \cup Z$, where $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$, and $y_0 < z$ for $z \in Z$, $y < z_0$ for $y \in Y$; (5) $X = \{a, c\} \cup B$, where $a < b < c$ for $b \in B$; (6) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, where $1 < 4$, $1 < 5$, $2 < 5$, $2 < 6$, $3 < 4$, $3 < 6$. Moreover, if X is a quasi-ordered set but not partially ordered, then the semigroup $O(X)$ is weakly regular in the wide sense if and only if $x \leqslant y$ for all $x, y \in X$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 145—165.

Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $T(X)$ полугруппу преобразований множества X, т. е. отображений $\alpha\colon X \to X$ с операцией умножения, определённой равенством $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in X$, $\alpha, \beta \in T(X)$. Хорошо известно, что $T(X)$ — регулярная полугруппа, т. е. для любого $\alpha \in T(X)$ найдётся элемент $\beta \in T(X)$, такой что $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Элемент β определяется в общем случае неоднозначно, а именно: если $x \in X\alpha$, то $x\beta$ равно какому-либо элементу $y \in x\alpha^{-1}$, а если $x \notin X\alpha$, то $x\beta$ может быть взят произвольным образом.

Если множество X наделено некоторой структурой, то естественно рассматривать такие преобразования $X \to X$, которые сохраняют эту структуру. В работе [7] Е. С. Ляпин охарактеризовал полугруппы (частичных) отображений $X \to X$, сохраняющих некоторую совокупность отношений на множестве X.

Для частично упорядоченного множества X пусть $O(X)$ обозначает полугруппу *изотонных* преобразований множества X, т. е. преобразований $\alpha\colon X \to X$, *сохраняющих порядок*: при всех $x, y \in X$ если $x \leqslant y$, то $x\alpha \leqslant y\alpha$. Очевидно, что $O(X)$ — подполугруппа полугруппы $T(X)$. Полугруппа изотонных преобразований $O(X)$ несёт информацию о строении частично упорядоченного множества X. Л. М. Глускин в [4] доказал, что из изоморфизма полугрупп $O(X)$ и $O(Y)$ двух частично упорядоченных (даже квазиупорядоченных) множеств X и Y следует, что множества X и Y изоморфны или антиизоморфны. Особое внимание уделялось случаю, когда X — линейно упорядоченное множество (цепь). А. Я. Айзенштат в [1] построила копредставление полугруппы $O(X)$, где X — конечная цепь, т. е. задание этой полугруппы образующими и соотношениями. Б. М. Шайн в [15] исследовал условия представимости элемента из $O(X)$, где X — произвольная цепь, в виде произведения идемпотентов. Эквивалентность элементарных теорий полугрупп изотонных преобразований рассматривалась Ю. М. Важениным [3] и Л. А. Скорняковым [8]. П. М. Хиггинс, Дж. Д. Митчелл и Н. Рушкуц [11] для некоторых цепей X находили ранг полугруппы $T(X)$ относительно $O(X)$. Перечислительно-комбинаторным вопросам полугруппы изотонных преобразований посвящена серия работ А. Умара и др. (см., например, [13, 16]). А. Крохин и Б. Ларуз [12, 14] изучали клоны операций, сохраняющих порядок конечной цепи.

Назовём *антицепью* частично упорядоченное множество X, такое что при всех $x, y \in X$ если $x \leqslant y$, то $x = y$. *Граф частично упорядоченного множества* (или *диаграмма Хассе*) — это граф, вершинами которого являются элементы частично упорядоченного множества, а рёбра соединяют такие вершины x и y, что $x < y$ (при этом на рисунке элемент y мы располагаем выше элемента x). Кроме того, в случае $x < y < z$ если рёбра (x, y) и (y, z) нарисованы, то ребро (x, z) не рисуют, чтобы не усложнять чертёж. *Подграфом* графа частично упорядоченного множества X мы будем называть граф его подмножества X', т. е. в подграфе вершины a и b соединены ребром в том и только том случае, если они соединены ребром в графе множества X. Понятно, что антицепь изображается графом, в котором все вершины являются изолированными (никакие две не соединены ребром). Частично упорядоченные множества X и Y называются *изоморфными* (*антиизоморфными*), если существует взаимно-однозначное отображение

$\varphi\colon X \to Y$, такое что при всех $x, x' \in X$ $x \leqslant x'$ тогда и только тогда, когда $x\varphi \leqslant x'\varphi$ (соответственно $x \leqslant x'$ тогда и только тогда, когда $x\varphi \geqslant x'\varphi$).

Если X — антицепь, то $O(X) = T(X)$, поэтому $O(X)$ — регулярная полугруппа. Вопрос, для каких частично упорядоченных множеств X полугруппа $O(X)$ является регулярной, исследовался в работах [2, 10]. Там были описаны частично упорядоченные множества X, имеющие регулярную полугруппу $O(X)$. Приведём это описание, предварительно определив некоторые классы частично упорядоченных множеств. Для произвольного множества I пусть

$$L_I = \{a, c\} \cup \{b_i \mid i \in I\}$$

с таким отношением порядка, что $a < b_i < c$ при всех $i \in I$ (рис. 1).

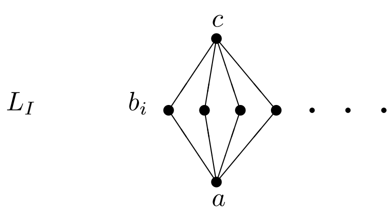


Рис. 1

Пусть Y, Z — произвольные непустые непересекающиеся множества. Положим $F_{Y,Z} = Y \cup Z$. Отношение порядка на $F_{Y,Z}$ определим следующим образом: $y < z$ при $y \in Y$, $z \in Z$, остальные пары элементов несравнимы. Граф этого множества — полный двудольный граф (рис. 2). Для произвольных непустых

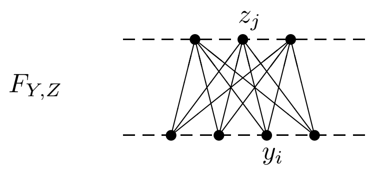


Рис. 2

непересекающихся множеств Y, Z с выделенными в них элементами $y_0 \in Y$, $z_0 \in Z$ положим $G_{Y,Z} = Y \cup Z$ и определим порядок следующим образом: $y_0 < z$, $y < z_0$, $y \in Y$, $z \in Z$, остальные пары элементов несравнимы (рис. 3).

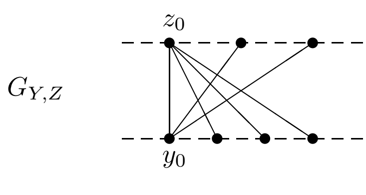


Рис. 3

Наконец, пусть $C_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$, где $1 < 4$, $1 < 5$, $2 < 5$, $2 < 6$, $3 < 6$, $3 < 4$ (рис. 4).

C_6

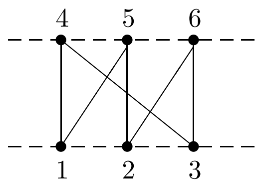


Рис. 4

Для данного частично упорядоченного множества X *двойственным* к X мы будем называть множество, антиизоморфное множеству X; будем обозначать его через X^*. *Вполне упорядоченным* множеством мы, как обычно, называем цепь, в которой каждое непустое подмножество имеет наименьший элемент. Двойственное к вполне упорядоченному множеству будем называть множеством, *вполне упорядоченным вниз*. Подмножество Y цепи X называется *конфинальным*, если для любого $x \in X$ найдётся такой элемент $y \in Y$, что $y > x$. *Конфинальностью* цепи X назовём наименьший ординал, изоморфный конфинальному подмножеству цепи X. *Коинициальное* подмножество Z определяется двойственным образом: для любого $x \in X$ найдётся такой элемент $z \in Z$, что $z < x$. *Коинициальность* X — это наименьший ординал η, такой что η^* изоморфно коинициальному подмножеству множества X.

Дедекиндовым сечением (I, F) называется разбиение $X = I \cup F$ цепи X на два подмножества I и F, таких что $x < z$ при всех $x \in I$, $z \in F$. Заметим, что I или F может быть пустым. Дедекиндово сечение называется *дырой*, если в I нет наибольшего, а в F — наименьшего элемента. Каждой дыре (I, F) поставим в соответствие пару (ξ, η), где ξ — конфинальность I и η — коинициальность F (если I или F пустое, то соответственно ξ или η равно 0). Будем говорить, что цепь X *квазиполная*, если для всякой дыры (I, F) $\xi+1$ невложимо в I и $(\eta+1)^*$ невложимо в F, где (ξ, η) — пара, поставленная в соответствие сечению (I, F).

Теорема Айзенштат—Адамса—Гоулда [2, 10]. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Тогда полугруппа $O(X)$ регулярна в том и только том случае, если X — квазиполная цепь, или X — антицепь, или X изоморфно какому-либо из множеств L_I, $F_{Y,Z}$, $G_{Y,Z}$, C_6.*

В [2] для цепи получены условия, являющиеся более громоздкими, чем приведённое выше условие квазиполноты (последнее взято из [10]). Для случая когда X — счётная цепь, В. И. Ким и И. Б. Кожухов в [5] получили более прозрачные условия регулярности полугруппы $O(X)$. Отметим также, что в работе [9] В. А. Ярошевич получил условия регулярности полугрупп изотонных частичных преобразований частично упорядоченного множества X. Цель данной работы — обобщить теорему Айзенштат—Адамса—Гоулда с регулярного на слабо регулярный случай. Кроме того, будет показано, что формулировка результата не сильно изменится, если ослабить требование на множество X, а именно считать X квазиупорядоченным множеством.

Для полугрупп мы пользуемся основными определениями монографии [6]. Элемент a полугруппы S называется *слабо регулярным справа* (*слева*), если $a \in aSaS$ (соответственно $a \in SaSa$). Полугруппа S называется *слабо регулярной справа* (*слева*), если все её элементы слабо регулярны справа (слева). Полугруппу, которая слабо регулярна слева и справа, естественно назвать *слабо регулярной*. Мы рассмотрим более широкий класс полугрупп. А именно, будем говорить, что полугруппа S *слабо регулярна в широком смысле*, если каждый её элемент слабо регулярен слева или справа. Другими словами, $a \in SaSa \cup aSaS$ для всех $a \in S$. Понятно, что в любой полугруппе регулярный элемент является регулярным слева и справа, все регулярные полугруппы слабо регулярны слева и справа и тем более слабо регулярны в широком смысле. Примером слабо регулярной, но не регулярной полугруппы может служить простая справа полугруппа без идемпотентов. В конечной полугруппе понятия регулярного, слабо регулярного слева и слабо регулярного справа элемента совпадают (это нетрудно доказать, рассматривая главные факторы полугруппы). Поэтому для конечной полугруппы слабая регулярность в широком смысле равносильна регулярности.

Для произвольного множества X и отображения $\alpha\colon X \to X$ пусть $\operatorname{im}\alpha = X\alpha = \{x\alpha \mid x \in X\}$ — *образ*, а $\ker\alpha = \{(x,y) \mid x\alpha = y\alpha\}$ — *ядро* отображения α. Если $A \subseteq X$, то $A\alpha = \{a\alpha \mid a \in A\}$ — *образ*, а $A\alpha^{-1} = \{x \mid x\alpha \in A\}$ — *полный прообраз* множества A. Отображение $\alpha \in T(X)$ назовём *константой*, если $x\alpha = y\alpha$ при всех $x, y \in X$. Если α — константа и X — частично упорядоченное множество, то ясно, что $\alpha \in O(X)$. Кроме того, $\alpha^2 = \alpha$, поэтому α — регулярный элемент полугруппы $O(X)$. В дальнейшем мы часто будем использовать следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in T(X)$. Тогда*

1) *если $\alpha\beta = \alpha$, то отображение β тождественно на* $\operatorname{im}\alpha$ (*т. е.* $x\beta = x$ *при* $x \in \operatorname{im}\alpha$);
2) *если $\beta\alpha = \alpha$, то отображение β сохраняет классы отношения* $\ker\alpha$ (*т. е.* $K\beta \subseteq K$ *для любого класса K отношения* $\ker\alpha$).

Лемма 2. *Пусть X — цепь. Полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, если и только если цепь X квазиполная.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что цепь X не является квазиполной. Тогда существуют дыра (I, F) и соответствующая ей пара (ξ, η), такие что либо $\xi + 1$ вложимо в I, либо $(\eta + 1)^*$ вложимо в F. Без ограничения общности можно считать, что $\xi + 1$ вложимо в I. Пусть C — конфинальная подцепь цепи I, упорядоченная по типу ξ, а D — кониницальная подцепь цепи F, являющаяся вполне упорядоченным вниз множеством, причём дуальное к D множество D^* имеет тип η. Пусть $c_0 = \min C$ и $C_1 = C \setminus \{c_0\}$, $d_0 = \max D$ и

$D_1 = D \setminus \{d_0\}$. Для произвольного $x \in X$ введём обозначения $x^\vartriangle = \{y \mid y \geqslant x\}$ (верхний конус элемента x) и $x^\triangledown = \{y \mid y \leqslant x\}$ (нижний конус элемента x). Положим $A = c_0^\vartriangle \cap I$, $B = d_0^\triangledown \cap F$. Так как $\xi + 1$ вложимо в I, то в I есть ограниченное сверху элементом из I вполне упорядоченное подмножество C', тип которого равен ξ. Пусть $\varphi\colon C \to C'$ — взаимно-однозначное изотонное отображение. Положим $c_0\varphi = c_0'$ и $C_1' = C' \setminus \{c_0'\}$.

Определим отображение $\alpha\colon X \to X$ по правилу

$$x\alpha = \begin{cases} \max(D \cap x^\triangledown), & \text{если } x \in F, \\ \min(C \cap x^\vartriangle)\varphi, & \text{если } x \in I. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что α — изотонное отображение и $\operatorname{im}\alpha = C' \cup D$.

Предположим, что α — слабо регулярный справа элемент полугруппы $O(X)$, т. е. $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ при некоторых $\beta, \gamma \in O(X)$. Тогда по лемме 1 $x\beta\alpha\gamma = x$ при $x \in \operatorname{im}\alpha$.

Докажем, что $x\beta \in A$ при $x \in C_1'$. Если $x\beta \leqslant c_0$, то, ввиду того что β инъективно на C' и $c_0' < x$, мы имеем, что $c_0'\beta < x\beta$, откуда, ввиду того что $x\beta, c_0'\beta \leqslant c_0$, получаем $x\beta\alpha = c_0'\beta\alpha$, а значит, $x\beta\alpha\gamma = c_0'\beta\alpha\gamma$, что влечёт равенство $x = c_0'$, а это невозможно. Пусть теперь $x\beta \in F$. Рассмотрим бесконечную возрастающую последовательность $x < x_1 < x_2 < \ldots$ элементов из C_1'. Так как отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на C_1', то $x\beta\alpha\gamma < x_1\beta\alpha\gamma < x_2\beta\alpha\gamma < \ldots$. Следовательно, $x\beta < x_1\beta < x_2\beta < \ldots$ — возрастающая последовательность элементов из F, а $x\beta\alpha < x_1\beta\alpha < x_2\beta\alpha < \ldots$ — возрастающая последовательность в D. Получили противоречие с тем, что D является вполне упорядоченным вниз. Таким образом, $x\beta \in A$.

Докажем теперь, что $C_1'\beta$ — конфинальная подцепь цепи A. Пусть это не так. Тогда $C_1'\beta \leqslant a$ при некотором $a \in A$. Следовательно, $C_1'\beta\alpha$ — подцепь цепи C_1', ограниченная сверху элементом $a\alpha$. Так как отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на C_1' и $C_1'\beta\alpha \leqslant a\alpha$, то $C_1'\beta\alpha$ — начальный отрезок цепи C_1', не совпадающий с C_1'. Так как $C_1'\beta\alpha\gamma = C_1'$, то γ отображает изотонно и взаимно-однозначно собственный начальный отрезок $C_1'\beta\alpha$ цепи C_1' на всю цепь C_1', а это противоречит известным свойствам вполне упорядоченных множеств.

Покажем теперь, что $y\beta \in B$ при $y \in D_1$. Пусть это не так. Тогда $y\beta \geqslant d_0$ или $y\beta \in I$. Пусть вначале $y\beta \geqslant d_0$. Тогда $y\beta\alpha = d_0$. Так как $d_0 > y$, то $d_0\beta \geqslant y\beta \geqslant d_0$, а значит, $d_0\beta\alpha = y\beta\alpha = d_0$. Таким образом, $y\beta\alpha\gamma = d_0\beta\alpha\gamma$. Так как отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на D_1, то $y = d_0$, что невозможно. Пусть теперь $y\beta \in I$. Возьмём в D_1 бесконечную убывающую цепь элементов $y > y_1 > y_2 > \ldots$. Так как отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на D_1, то $y\beta\alpha\gamma > y_1\beta\alpha\gamma > y_2\beta\alpha\gamma > \ldots$, а значит, $y\beta\alpha > y_1\beta\alpha > y_2\beta\alpha > \ldots$. Так как $y\beta\alpha \in I\alpha \subseteq C'$ и также $y_i\beta\alpha \in C'$ при всех i, то мы получаем в C' бесконечную убывающую цепь элементов, что противоречит тому, что C' — вполне упорядоченное множество.

Итак, $C_1'\beta$ — конфинальная подцепь цепи A. Аналогично можно показать, что $D_1\beta$ — кониницальная подцепь цепи B. Так как C_1' является ограниченной сверху в I, то существует такое $u \in I$, что $u > C_1'$. Имеем, что $C_1' < u < D_1$. Отсюда следует, что $C_1'\beta \leqslant u\beta \leqslant D_1\beta$. Так как подцепь $C_1'\beta$ конфинальна, а $D_1\beta$ коинициальна, то $I \leqslant u\beta \leqslant F$. Но элемента между I и F нет, так как сечение (I, F) — дыра. Полученное противоречие показывает, что α не является слабо регулярным справа.

Пусть теперь α — слабо регулярный слева элемент полугруппы $O(X)$. Тогда $\alpha = \gamma\alpha\beta\alpha$ для некоторых $\gamma, \beta \in O(X)$. По лемме 1 $\gamma\alpha\beta$ сохраняет классы отношения $\ker\alpha$.

Докажем, что $x\gamma \in A$ при $x \in C_1$. Если $x\gamma \leqslant c_0$, то $x\gamma\alpha = c_0'$ и $c_0\gamma\alpha = c_0'$, откуда следует, что $x\gamma\alpha\beta = c_0\gamma\alpha\beta$. Умножив это равенство справа на α, получим, что $x\alpha = c_0\alpha$, что невозможно ввиду инъективности отображения α на C. Пусть теперь $x\gamma \geqslant d_0$. Тогда для всякого $x' \in C_1$, такого что $x' > x$, мы имеем $x'\gamma \geqslant x\gamma$ и $x'\gamma\alpha = x\gamma\alpha = d_0$. Отсюда следует, что $x'\gamma\alpha\beta = x\gamma\alpha\beta$, а значит, $x\alpha = x'\alpha$, что невозможно также ввиду инъективности α на C.

Пусть $x\gamma \in B$. Покажем, что для каждого $d \in D$ существует не более одного $u \in C_1$, такого что $d - 1 \leqslant u\gamma < d$. Пусть это не так. Тогда $d - 1 \leqslant u\gamma \leqslant u'\gamma < d$ при некоторых $u, u' \in C_1$, таких что $u \neq u'$. Имеем, что $d-1 = (d-1)\alpha = u\gamma\alpha = u'\gamma\alpha$, откуда следует, что $u\gamma\alpha\beta\alpha = u'\gamma\alpha\beta\alpha$, что влечёт равенство $u\alpha = u'\alpha$. Но это невозможно, так как α инъективно на C_1, а u, u' — различные элементы из C_1. Возьмём возрастающую последовательность $x_1 = x < x_2 < x_3 < \ldots$ элементов из C_1. Тогда $x_1\gamma \leqslant x_2\gamma \leqslant x_3\gamma \leqslant \ldots$, причём $x_i\gamma \in [d_i - 1, d_i)$ при подходящих $d_i \in D$. Так как x_i — различные элементы из C_1, то все интервалы $[d_i - 1, d_i)$ разные, поэтому $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$. Однако это невозможно ввиду того, что D — вполне упорядоченное вниз множество.

Таким образом, нами доказано, что $C_1\gamma \subseteq A$. Рассуждая аналогичным образом, получим, что $D_1\gamma \subseteq B$.

Докажем, что $C_1\gamma$ — конфинальная подцепь цепи A. Пусть это не так. Тогда $C_1\gamma \leqslant a$ при некотором $a \in A$. Так как $a \in A$, то $a\alpha \in C'$. Покажем, что $a\alpha\beta \in A$. Предположим, что $a\alpha\beta \notin A$. Тогда $a\alpha\beta \in F$ или $a\alpha\beta < c_0$. Пусть вначале $a\alpha\beta \in F$. Тогда $a\alpha\beta\alpha \in F$. Отсюда следует, что $a\alpha\beta\alpha > d$ при некотором $d \in D_1$. Имеем, что $d\gamma\alpha\beta\alpha = d\alpha = d < a\alpha\beta\alpha$. Значит, $d\gamma < a$. Поэтому $d\gamma \in I$ — противоречие с включением $D_1\gamma \subseteq B$. Пусть теперь $a\alpha\beta < c_0$. Тогда $a\alpha\beta\alpha = c_0$ и $C_1\gamma\alpha\beta\alpha = c_0$. Последнее означает, что $C_1\alpha = c_0$. Но α инъективно на C_1 — противоречие. Итак, $a\alpha\beta \in A$. Следовательно, $C_1\gamma\alpha\beta$ — подцепь цепи A, ограниченная сверху элементом $a\alpha\beta \in A$. Вместе с тем по лемме 1 отображение $\gamma\alpha\beta$ сохраняет классы отношения $\ker\alpha$, поэтому $c < c\gamma\alpha\beta \leqslant c + 1$ для любого $c \in C_1$. Отсюда следует, что $c < c\gamma\alpha\beta \leqslant a\alpha\beta \in A$ при всех $c \in C_1$, а это противоречит тому, что цепь C_1 конфинальна в A.

Аналогично рассуждая, можно показать, что $D_1\gamma$ — коинициальная подцепь цепи B.

Так как $C_1\gamma \subseteq A$, то $C_1\gamma\alpha \subseteq C'$. Так как C' не конфинальна в A, то $C' < u$ при некотором $u \in A$. Следовательно, $C_1\gamma\alpha < u$. Так как цепь C_1 конфинальна в A, то по лемме 1 $C_1\gamma\alpha\beta$ также конфинальна в A. Аналогично получаем, что $D_1\gamma\alpha\beta$ коинициальна в B. Имеем, что $C_1\gamma\alpha\beta \leqslant u\beta \leqslant D_1\gamma\alpha\beta$. Если $u\beta \in I$, то $C_1\gamma\alpha\beta$ не конфинальна в I — противоречие; если $u\beta \in F$, то $D_1\gamma\alpha\beta$ не кониницальна в F — тоже противоречие.

Достаточность следует из теоремы Айзенштат—Адамса—Гоулда и того, что слабая регулярность в широком смысле следует из обычной регулярности. $\square$

На частично упорядоченном множестве X введём отношение $\sim$, полагая $a \sim b$, если существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_n \in X$, что $a \leqslant x_1 \geqslant x_2 \leqslant \ldots \geqslant x_n \leqslant b$. Нетрудно убедиться, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Классы этого отношения мы будем называть *компонентами связности* множества X. Они соответствуют компонентам связности графа данного частично упорядоченного множества X. Частично упорядоченное множество X называется *связным*, если оно состоит из одной компоненты связности, или, другими словами, если $a \sim b$ для любых $a, b \in X$.

Лемма 3. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Если $O(X)$ — слабо регулярная в широком смысле полугруппа, то либо X связно, либо X — антицепь.*

Доказательство. Пусть множество X несвязно и не является антицепью. Тогда $a < b$ для некоторых $a, b \in X$. Зафиксируем элементы a, b и обозначим через X_0 компоненту связности, содержащую эти элементы. Пусть X_1 — объединение остальных компонент. Рассмотрим отображение $\alpha\colon X \to X$, определённое правилом

$$x\alpha = \begin{cases} a, & \text{если } x \in X_0, \\ b, & \text{если } x \in X_1. \end{cases}$$

Если $x < y$ для некоторых $x, y \in X$, то x, y принадлежат одной компоненте связности. Следовательно, $x\alpha = y\alpha$. Это доказывает, что α сохраняет порядок, т. е. $\alpha \in O(X)$. Для доказательства леммы нам достаточно доказать, что $\alpha \neq \alpha\beta\alpha\gamma$ и $\alpha \neq \beta\alpha\gamma\alpha$ при любых $\beta, \gamma \in O(X)$.

Предположим вначале, что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. По лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha$. Так как $\operatorname{im}\alpha = \{a, b\}$, то $a\beta\alpha\gamma = a$ и $b\beta\alpha\gamma = b$. Положим $x = a\beta\alpha$, $y = b\beta\alpha$. Тогда $x\gamma = a$ и $y\gamma = b$. Следовательно, $x \neq y$. Так как $a < b$ и $\beta \in O(X)$, то $a\beta \leqslant b\beta$. Значит, $a\beta$ и $b\beta$ лежат в одной компоненте связности. Но тогда $(a\beta)\alpha = (b\beta)\alpha$, т. е. $x = y$. Мы получили противоречие, которое показывает, что $\alpha \neq \alpha\beta\alpha\gamma$.

Предположим теперь, что $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Возьмём какой-нибудь элемент $x \in X_1$. По лемме 1 мы имеем, что $a\beta\alpha\gamma \in X_0$, $x\beta\alpha\gamma \notin X_0$. Отсюда следует, что $a\beta\alpha \neq x\beta\alpha$. Так как $a\beta\alpha, x\beta\alpha \in \operatorname{im}\alpha = \{a, b\}$, то $a\beta\alpha$ и $x\beta\alpha$ — отличные друг от друга сравнимые элементы (один из них равен a, а другой равен b). Так как $\gamma \in O(X)$, то $(a\beta\alpha)\gamma$ и $(x\beta\alpha)\gamma$ также сравнимы друг с другом. Но это противоречит тому факту, что $a\beta\alpha\gamma$ и $x\beta\alpha\gamma$ лежат в разных компонентах связности. Тем самым доказано, что $\alpha \neq \beta\alpha\gamma\alpha$. $\square$

Итак, необходимым условием слабой регулярности в широком смысле полугруппы $O(X)$ является тот факт, что либо X — антицепь, либо X — связное множество. Так как случай антицепи вполне ясен, то далее мы будем рассматривать лишь связные множества. В последующих двух леммах мы докажем, что либо X — цепь, либо X не содержит подцепей более чем из трёх элементов.

Для частично упорядоченного множества X *дуальным* к X мы будем называть множество X с *инвертированным порядком*, т. е. множество $(X^*, \preccurlyeq)$, где $a \preccurlyeq b$ тогда и только тогда, когда $b \leqslant a$. Очевидно, полугруппы $O(X)$ и $O(X^*)$ изоморфны друг другу.

Лемма 4. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Если полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле и X содержит подграф, изоморфный графу, изображённому на рис.* 5*, то существует элемент $z \in X$, такой что $z \geqslant b, d$.*

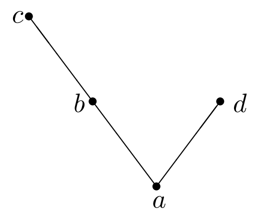


Рис. 5

Доказательство. Напомним, что по определению подграфа элементы d и b, а также d и c несравнимы друг с другом. Определим отображение $\alpha\colon X \to X$ правилом

$$x\alpha = \begin{cases} c, & \text{если } x \geqslant b, \\ b, & \text{если } x \not\geqslant b,\ x \geqslant d, \\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Докажем, что α сохраняет порядок. Пусть $x < y$. Если $x \geqslant b$, то $x\alpha = y\alpha = c$. Если $x \not\geqslant b$, но $x \geqslant d$, то $x\alpha = b$, а $y\alpha \in \{b, c\}$, и мы имеем, что $x\alpha \leqslant y\alpha$. Если же $x \not\geqslant b$ и $x \not\geqslant d$, то $x\alpha = a$, а $y\alpha \in \{a, b, c\}$, поэтому также $x\alpha \leqslant y\alpha$. Таким образом, $\alpha \in O(X)$.

Так как полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$ при некоторых $\beta, \gamma \in O(X)$.

Предположим вначале, что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. По лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha$. Следовательно, $a\beta\alpha\gamma = a$, $b\beta\alpha\gamma = b$, $c\beta\alpha\gamma = c$. Так как $a\beta\alpha$, $b\beta\alpha$, $c\beta\alpha$ — различные элементы из $\operatorname{im}\alpha$ и γ переводит их соответственно в a, b, c, то $a\beta\alpha = a$, $b\beta\alpha = b$, $c\beta\alpha = c$. Далее, так как элементы $a\beta$, $b\beta$ и $c\beta$ различны и $\beta \in O(X)$, то $a\beta < b\beta < c\beta$. Так как $(b\beta)\alpha = b$, то $b\beta \geqslant d$; так как $(c\beta)\alpha = c$, то $c\beta \geqslant b$. Следовательно, $c\beta \geqslant b, d$.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Тогда $a\beta\alpha\gamma\alpha = a\alpha = a$, $d\beta\alpha\gamma\alpha = d\alpha = b$, $c\beta\alpha\gamma\alpha = c\alpha = c$. Значит, элементы $a\beta\alpha$, $d\beta\alpha$ и $c\beta\alpha$ различны. Эти элементы отображение $\gamma\alpha$ переводит соответственно в a, b и c. Так как $\gamma\alpha \in O(X)$, то

$a\beta\alpha < d\beta\alpha < c\beta\alpha$, а значит, $a\beta\alpha = a$, $d\beta\alpha = b$, $c\beta\alpha = c$. Отсюда следует, что $a\gamma < b\gamma < c\gamma$. Так как $(b\gamma)\alpha = b$, то $b\gamma \geqslant d$; так как $(c\gamma)\alpha = c$, то $c\gamma \geqslant b$. Так как $c\gamma > b\gamma$, то $c\gamma \geqslant b, d$. □

Лемма 5. *Пусть X — частично упорядоченное множество, граф которого содержит подграф, изображённый на рис. 6. Если полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то существует элемент $z \in X$, такой что $z \geqslant c, d$.*

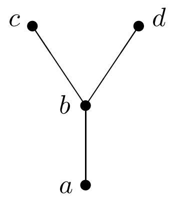


Рис. 6

Доказательство. Определим отображение $\alpha\colon X \to X$ правилом

$$x\alpha = \begin{cases} c, & \text{если } x \geqslant c,\\ b, & \text{если } x \ngeqslant c, \text{ но } x \geqslant d,\\ a & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Проверим, что $\alpha \in O(X)$. Пусть $x < y$. Если $x \geqslant c$, то также $y \geqslant c$, поэтому $x\alpha = y\alpha = c$. Если $x \ngeqslant c$, но $x \geqslant d$, то $x\alpha = b$, $y\alpha \in \{b, c\}$, и мы имеем, что $x\alpha \leqslant y\alpha$. Если же $x \ngeqslant A$ и $x \ngeqslant d$, то $x\alpha = a$, а $y\alpha \in \{a, b, c\}$, поэтому также $x\alpha \leqslant y\alpha$. Таким образом, $\alpha \in O(X)$.

Так как полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$ при некоторых $\beta, \gamma \in O(X)$.

Пусть $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. Тогда по лемме 1 получаем, что $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha$, т. е. $a\beta\alpha\gamma = a$, $b\beta\alpha\gamma = b$, $c\beta\alpha\gamma = c$. Положим $x = a\beta$, $y = b\beta$, $z = c\beta$. Так как a, b, c — различные элементы, то x, y, z также различны. Так как $\beta \in O(X)$, то $x < y < z$. Элементы x, y, z отображение α переводит в различные элементы множества $\operatorname{im}\alpha$, следовательно, $x\alpha = a$, $y\alpha = b$, $z\alpha = c$. По определению α имеем, что $z \geqslant c$, $y \geqslant d$. Так как $z > y$, то $z \geqslant c, d$.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Так как $b\alpha = a$, $c\alpha = c$, $d\alpha = b$, мы имеем, что $b\beta\alpha\gamma\alpha = a$, $c\beta\alpha\gamma\alpha = c$, $d\beta\alpha\gamma\alpha = b$. Положим $x = b\beta\alpha\gamma$, $y = c\beta\alpha\gamma$, $z = d\beta\alpha\gamma$. Тогда $x\alpha = a$, $y\alpha = c$, $z\alpha = b$. Очевидно, что $b\beta\alpha$, $c\beta\alpha$ и $d\beta\alpha$ — различные элементы из $\operatorname{im}\alpha$. Следовательно, $\{b\beta\alpha, c\beta\alpha, d\beta\alpha\} = \{a, b, d\}$. Так как $a < b < d$ и $\gamma \in O(X)$, то $\{x, y, z\}$ — цепь; при этом, очевидно, $x < z < y$. Так как $z\alpha = b$, то $z \geqslant d$; так как $y\alpha = c$, то $y \geqslant c$. Так как $y > z$, то $y \geqslant c, d$. □

Лемма 6. *Пусть X — частично упорядоченное множество, граф которого содержит подграф, изображённый на рис. 7. Тогда полугруппа $O(X)$ не может быть слабо регулярной в широком смысле.*

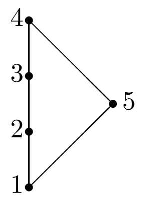


Рис. 7

Доказательство. Предположим, что полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле. Определим отображение $\alpha\colon X \to X$ формулой

$$x\alpha = \begin{cases} 4, & \text{если } x \geqslant 4 \text{ или } x > 5, \\ 3, & \text{если } x = 5, \\ 2, & \text{если } x \ngeqslant 4,\ x \ngeqslant 5,\ x \geqslant 3, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что отображение α сохраняет порядок; это делается так же, как в предыдущих леммах. Так как полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$ при некоторых $\beta, \gamma \in O(X)$.

Предположим вначале, что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. Тогда по лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha$. Значит, $1\beta\alpha\gamma = 1$, $2\beta\alpha\gamma = 2$, $3\beta\alpha\gamma = 3$, $4\beta\alpha\gamma = 4$. Отсюда следует, что элементы $1\beta\alpha$, $2\beta\alpha$, $3\beta\alpha$, $4\beta\alpha$ различны. Так как $\operatorname{im}\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$, то $1\beta\alpha = 1$, $2\beta\alpha = 2$, $3\beta\alpha = 3$, $4\beta\alpha = 4$. Так как $(3\beta)\alpha = 3$, то $3\beta = 5$; так как $(2\beta)\alpha = 2$, то $2\beta \geqslant 3$. Отсюда получаем, что $3 \leqslant 2\beta < 3\beta = 5$, т. е. $3 < 5$ — противоречие.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Тогда $2\beta\alpha\gamma\alpha = 1$, $3\beta\alpha\gamma\alpha = 2$, $4\beta\alpha\gamma\alpha = 4$, $5\beta\alpha\gamma\alpha = 3$. Так как элементы $2\beta\alpha$, $3\beta\alpha$, $4\beta\alpha$, $5\beta\alpha$ различны и принадлежат $\operatorname{im}\alpha$, а $\operatorname{im}\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$, то $\{2, 3, 4, 5\}\beta\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$. Так как $4\beta\alpha\gamma\alpha = 4$, а $5\beta\alpha\gamma\alpha = 3$, то $4\beta\alpha = 4$, $5\beta\alpha = 3$, а значит, $2\beta\alpha = 1$, $3\beta\alpha = 2$. Так как $(3\beta\alpha\gamma)\alpha = 2$, то $3\beta\alpha\gamma \geqslant 3$. Аналогично, ввиду того что $(5\beta\alpha\gamma)\alpha = 3$, получаем, что $5\beta\alpha\gamma = 5$. Далее получаем, что $3 \leqslant 3\beta\alpha\gamma = 2\gamma \leqslant 3\gamma = 5\beta\alpha\gamma = 5$, что неверно. Противоречие. □

Лемма 7. *Пусть X — частично упорядоченное множество, граф которого содержит подграф, изображённый на рис. 8. Тогда полугруппа $O(X)$ не может быть слабо регулярной в широком смысле.*

Доказательство. Предположим, что полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле. Определим отображение $\alpha\colon X \to X$ правилом

$$x\alpha = \begin{cases} 3, & \text{если } x > 1 \text{ или } x > 1', \\ 1, & \text{если } x = 1, \\ 2, & \text{если } x = 1', \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

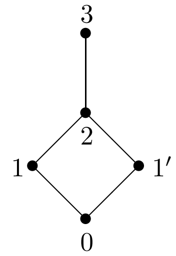


Рис. 8

Непосредственно проверяется, что $\alpha \in O(X)$. Так как полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$ при некоторых $\beta, \gamma \in O(X)$.

Предположим вначале, что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. Тогда по лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha = \{0, 1, 2, 3\}$. Очевидно, элементы $0\beta\alpha$, $1\beta\alpha$, $2\beta\alpha$ и $3\beta\alpha$ различны и принадлежат множеству $\operatorname{im}\alpha$. Так как $\gamma \in O(X)$, то $0\beta\alpha = 0$, $1\beta\alpha = 1$, $2\beta\alpha = 2$ и $3\beta\alpha = 3$. Далее, так как $(1\beta)\alpha = 1$, то $1\beta = 1$; так как $(2\beta)\alpha = 2$, то $2\beta = 1'$. Так как $\beta \in O(X)$ и $1 < 2$, то $1\beta \leqslant 2\beta$, т. е. $1 \leqslant 1'$, а это противоречит тому, что 1 и $1'$ — несравнимые элементы.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Элементы 0, 1, $1'$, 2 отображаются с помощью α соответственно в 0, 1, 2, 3, следовательно, отображение $\beta\alpha\gamma\alpha$ также переводит 0, 1, $1'$, 2 соответственно в 0, 1, 2, 3. Отсюда следует, что элементы $0\beta\alpha$, $1\beta\alpha$, $1'\beta\alpha$ и $2\beta\alpha$ различны. Так как $\operatorname{im}\alpha = \{0, 1, 2, 3\}$, то $\{0\beta\alpha, 1\beta\alpha, 1'\beta\alpha, 2\beta\alpha\} = \{0, 1, 2, 3\}$. Ввиду того что $\gamma\alpha \in O(X)$, мы получаем, что $0\beta\alpha = 0$, $1\beta\alpha = 1$, $1'\beta\alpha = 2$, $2\beta\alpha = 3$. Далее, так как $(1\beta\alpha\gamma)\alpha = 1$, то $1\beta\alpha\gamma = 1$, а так как $(1'\beta\alpha\gamma)\alpha = 2$, то $1'\beta\alpha\gamma = 1'$. Наконец, так как $\gamma \in O(X)$ и $1\beta\alpha < 1'\beta\alpha$, то $1\beta\alpha\gamma \leqslant 1'\beta\alpha\gamma$, т. е. $1 \leqslant 1'$, мы снова получаем противоречие. □

Лемма 8. *Если полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то граф частично упорядоченного множества X не содержит подграфов, изображённых на рис.* 9.

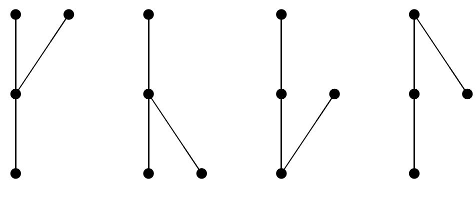
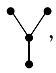
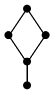
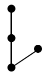
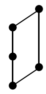
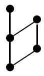
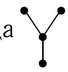
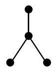
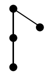


Рис. 9

Доказательство. Если в X есть подграф вида , то по лемме 5 в X есть подграф вида , а это противоречит лемме, двойственной к лемме 7. Если в X есть подграф вида , то по лемме 4 в X есть либо подграф вида , либо подграф вида . Первое невозможно ввиду леммы 6, а второе влечёт наличие подграфов вида , невозможность которого доказана в начале доказательства этой леммы. Отсутствие подграфов вида  и  устанавливается аналогичным образом. □

Пусть X — частично упорядоченное множество. Из леммы 8 непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 9. *Если полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то либо X — цепь, либо X не содержит подцепей из более чем трёх элементов.*

Лемма 10. *Пусть X — частично упорядоченное множество, содержащее хотя бы одну цепь из трёх элементов, но не содержащая цепей из четырёх элементов. Тогда полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле в том и только том случае, если $X \cong L_I$ при некотором I.*

Доказательство. Предположим, что X удовлетворяет условиям леммы и полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле. Возьмём цепь $a < b < c$, лежащую в X. По лемме 3 множество X связно. Покажем, что a — наименьший элемент в X. Пусть $x \in X$. Если $x < a$, то в X есть цепь $x < a < b < c$ из четырёх элементов, что противоречит условию. Если x и a несравнимы, то в X есть подграф, изоморфный одному из графов, изображённых на рис. 3, что противоречит лемме 8. Таким образом, $a \leqslant x$. Аналогично доказывается, что $c \geqslant x$ при всех $x \in X$. Пусть $B = X \setminus \{a, c\}$. Тогда $a < b < c$ при всех $b \in B$. Покажем, что элементы из B попарно несравнимы. Пусть $b, b' \in B$ и $b < b'$. Тогда имеем в X цепь из четырёх элементов: $a < b < b' < c$, а это противоречит условию леммы. Резюмируя вышеприведённые рассуждения, получаем, что $X \cong L_I$.

Обратное утверждение следует из теоремы Айзенштат—Адамса—Гоулда. Действительно, полугруппа $O(L_I)$ регулярна, а значит, слабо регулярна в широком смысле. □

Ввиду лемм 9 и 10 мы можем далее рассматривать лишь случай, когда в X все цепи содержат не более двух элементов. Ввиду леммы 3 мы можем считать X связным. Поэтому $X = Y \cup Z$, где Y — множество минимальных, а Z — множество максимальных элементов. Ясно, что $Y \cap Z = \varnothing$, а граф множества X двудольный (рис. 10). Будем называть такое множество X *двудольным*.

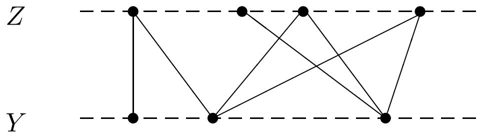


Рис. 10

Лемма 11. *Пусть $X = Y \cup Z$ — двудольное частично упорядоченное множество и полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле. Тогда*

1) *для любых $a, b \in Y$ существует $z \in Z$, такое что $a, b < z$;*
2) *для любых $a, b \in Z$ существует $y \in Y$, такое что $y < a, b$.*

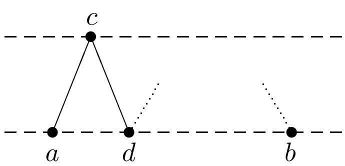


Рис. 11

Доказательство. Утверждение 2) доказывается аналогично утверждению 1), поэтому докажем только 1). Пусть $a, b \in Y$. Так как $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то по лемме 3 множество X связно. Следовательно, в графе X существует путь из a в b: $a < c > d < \ldots > b$ (рис. 11). Определим отображение $\alpha\colon X \to X$ правилом

$$x\alpha = \begin{cases} a, & \text{если } x = a,\\ d, & \text{если } x = b,\\ c & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Из определения α видно, что $X\alpha = \{a, d, c\}$ и $Z\alpha = \{c\}$. Так как $c \geqslant a, d, c$, то α сохраняет порядок. Ввиду слабой регулярности существуют $\beta, \gamma \in O(X)$, такие что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$.

Предположим вначале, что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. Тогда по лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha = \{a, d, c\}$. Следовательно, $a\beta\alpha\gamma = a$, $d\beta\alpha\gamma = d$, $c\beta\alpha\gamma = c$. Ясно, что $a\beta\alpha$, $d\beta\alpha$, $c\beta\alpha$ — различные элементы из $\operatorname{im}\alpha$, поэтому $\{a\beta\alpha, d\beta\alpha, c\beta\alpha\} = \{a, d, c\}$. Так как $c > a, d$ и отображение $\beta\alpha$ сохраняет порядок, то $c\beta\alpha = c$, а $\{a\beta\alpha, d\beta\alpha\} = \{a, d\}$. Таким образом, $\{a\beta, d\beta\}\alpha = \{a, d\}$. Отсюда следует, что $\{a\beta, d\beta\} = \{a, b\}$. Так как $a, d < c$, то $a\beta, d\beta \leqslant c\beta$, т. е. $a, b \leqslant c\beta$. Так как a и b несравнимы, то $a, b < c$.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Тогда $a\beta\alpha\gamma\alpha = a$, $b\beta\alpha\gamma\alpha = d$, $c\beta\alpha\gamma\alpha = c$. Так как $(a\beta\alpha\gamma)\alpha = a$, то $a\beta\alpha\gamma = a$; так как $(b\beta\alpha\gamma)\alpha = d$, то $b\beta\alpha\gamma = b$. Очевидно, $a\beta\alpha$, $b\beta\alpha$, $c\beta\alpha$ — различные элементы из $\operatorname{im}\alpha$, следовательно, $\{a\beta\alpha, b\beta\alpha, c\beta\alpha\} = \{a, d, c\}$. Так как $c > a$ и $\beta\alpha \in O(X)$, то $c\beta\alpha \geqslant a\beta\alpha$. Но $c\beta\alpha \neq a\beta\alpha$, поэтому

$c\beta\alpha > a\beta\alpha$. Значит, $c\beta\alpha = c$, а $\{a\beta\alpha, b\beta\alpha\} = \{a, d\}$. Мы имеем, что $c\beta\alpha > a\beta\alpha, b\beta\alpha$. Следовательно, $c\beta\alpha\gamma \geqslant a\beta\alpha\gamma, b\beta\alpha\gamma$, т. е. $c\beta\alpha\gamma \geqslant a, b$. Так как a и b несравнимы, то $a, b < c\beta\alpha\gamma$. □

Лемма 12. *Пусть $X = Y \cup Z$ — двудольное частично упорядоченное множество. Если X содержит подграф, изоморфный $F_{2,2}$ и полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то $X = F_{Y,Z}$.*

Доказательство. Пусть $1, 2 \in Y$, $3, 4 \in Z$ и $1 < 3$, $1 < 4$, $2 < 3$, $2 < 4$ (рис. 12).

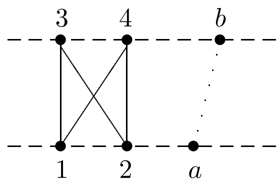


Рис. 12

Предположим, что граф X не является полным двудольным. Тогда существуют $a \in Y$, $b \in Z$, такие что $a \not< b$ (на рис. 12 это отмечено точками). Определим преобразование $\alpha\colon X \to X$ правилом

$$x\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a, \\ 2, & \text{если } x \in Y \setminus \{a\}, \\ 3, & \text{если } x = b, \\ 4, & \text{если } x \in Z \setminus \{b\}. \end{cases}$$

Ясно, что α сохраняет порядок. Ввиду слабой регулярности существуют $\beta, \gamma \in O(X)$, такие что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$.

Предположим вначале, что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. Тогда по лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha$. Следовательно, $1\beta\alpha\gamma = 1$, $2\beta\alpha\gamma = 2$, $3\beta\alpha\gamma = 3$, $4\beta\alpha\gamma = 4$. Ясно, что $1\beta\alpha$, $2\beta\alpha$, $3\beta\alpha$ и $4\beta\alpha$ — различные элементы из $\operatorname{im}\alpha$, следовательно, $\{1\beta\alpha, 2\beta\alpha, 3\beta\alpha, 4\beta\alpha\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Так как $\beta\alpha \in O(X)$, то $\{1\beta\alpha, 2\beta\alpha\} = \{1, 2\}$, $\{3\beta\alpha, 4\beta\alpha\} = \{3, 4\}$. Из определения α следует, что $\{1\beta, 2\beta\} = \{a, y\}$ $(y \in Y)$, а $\{3\beta, 4\beta\} = \{b, z\}$ $(z \in Z)$. Так как любой элемент множества $\{1, 2\}$ меньше любого элемента множества $\{3, 4\}$ и β сохраняет порядок, то $a < b$. Противоречие.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Так как $|Y|, |Z| \geqslant 2$, то $\operatorname{im}\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$. Поэтому существуют элементы $y \in Y$, $z \in Z$, такие что $y\alpha = 2$, $z\alpha = 4$. Так как $\beta\alpha\gamma\alpha = \alpha$, то $a\beta\alpha\gamma\alpha = 1$, $y\beta\alpha\gamma\alpha = 2$, $b\beta\alpha\gamma\alpha = 3$, $z\beta\alpha\gamma\alpha = 4$. Следовательно, элементы $a\beta\alpha$, $y\beta\alpha$, $b\beta\alpha$, $z\beta\alpha$ различны. Так как $\operatorname{im}\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$, то $\{a\beta\alpha, y\beta\alpha, b\beta\alpha, z\beta\alpha\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Так как $(a\beta\alpha\gamma)\alpha = 1$, то $a\beta\alpha\gamma = a$; так как $(b\beta\alpha\gamma)\alpha = 3$, то $b\beta\alpha\gamma = b$. Таким образом, множество $\{a\beta\alpha, y\beta\alpha, b\beta\alpha, z\beta\alpha\} = \{1, 2, 3, 4\}$ с помощью γ взаимно-однозначно отображается на множество

$A = \{a\beta\alpha\gamma = a,\ y\beta\alpha\gamma,\ b\beta\alpha\gamma = b,\ z\beta\alpha\gamma\}$. Так как γ сохраняет порядок, то два элемента множества A меньше двух других элементов этого множества. Следовательно, $a < b$. Но это противоречит первоначальному предположению. $\square$

Будем обозначать через $\deg v$ *степень вершины* v в графе, т. е. количество рёбер, инцидентных этой вершине.

Лемма 13. *Пусть X — двудольное частично упорядоченное множество, не изоморфное $F_{Y,Z}$ или $G_{Y,Z}$. Если полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то X содержит в качестве подграфа граф C_6.*

Доказательство. Так как граф X неполный, то существуют элементы $a \in Y$, $b \in Z$, такие что $a \not< b$. По лемме 3 граф X связный, поэтому существуют такие $c \in Z$, $d \in Y$, что $a < c$, $d < b$ (рис. 13).

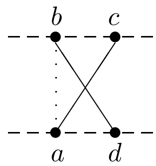


Рис. 13

Далее будем разбирать два случая.

Случай 1: $d \not< c$. Тогда по лемме 11 существуют такие $e \in Y$ и $f \in Z$, что $e < b, c$ и $f > a, d$ (рис. 14). Так как $a \not< b$ и $d \not< c$, то $e \notin \{a, d\}$ и $f \notin \{b, c\}$.

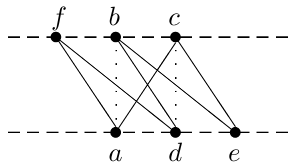


Рис. 14

Заметим, что $e \not< f$. Действительно, если $e < f$, то подграф с множеством вершин $\{d, e, f, b\}$ изоморфен графу $F_{2,2}$, что противоречит лемме 12. Мы видим теперь, что подграф $\{a, d, e, f, b, c\}$ изоморфен графу C_6.

Случай 2: $d < c$ (рис. 15). Разобьём этот случай на два подслучая.

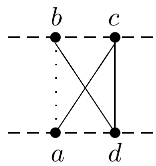


Рис. 15

Случай 2.1: $\deg a > 1$ или $\deg b > 1$. Пусть, например, $\deg a > 1$. Тогда $a < e$ для некоторого $e \notin \{b, c\}$ (рис. 16). Если $d < e$, то $\{a, d, e, c\} \cong F_{2,2}$,

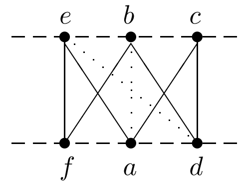


Рис. 16

что противоречит лемме 12. Следовательно, $d \not< e$. По лемме 11 существует элемент $f < b, e$. Так как $a \not< b$ и $d \not< e$, то $f \notin \{a, d\}$. Кроме того, $f \not< c$ (так как при $f < c$ граф X содержит подграф $\{f, a, e, c\} \cong F_{2,2}$). Теперь ясно, что $\{f, a, d, e, b, c\} \cong C_6$.

Случай 2.2: $\deg a = \deg b = 1$. Докажем, что $d < z$ при всех $z \in Z$. Пусть $z \in Z$, $z \neq b$. Тогда по лемме 11 $y < b, z$ при некотором $y \in Y$. Так как $\deg b = 1$ и $d, y < b$, то $y = d$. Следовательно, $d < z$. Аналогично доказывается, что $c > y$ при всех $y \in Y$.

Докажем теперь, что $X \cong G_{Y,Z}$, где $y_0 = d$, $z_0 = c$. Для этого достаточно доказать, что $y \not< z$ при $y \in Y \setminus \{d\}$, $z \in Z \setminus \{c\}$. В самом деле, если $y < z$ при каких-нибудь $y \neq d$, $z \neq c$, то граф $\{d, y, c, z\}$ изоморфен $F_{2,2}$, а это противоречит лемме 12. Итак, нами доказано, что $X \cong G_{Y,Z}$. Но это противоречит условию леммы. $\square$

Лемма 14. *Пусть X — двудольное частично упорядоченное множество. Если полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле и X содержит в качестве подграфа граф C_6, то $X = C_6$.*

Доказательство. Пусть выполняются условия леммы, но $|X| > 6$. Ввиду лемм 3 и 12 можно считать, что X связно и не содержит подграфов, изоморфных $F_{2,2}$. Пусть X содержит подграф C_6 с вершинами 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 17).

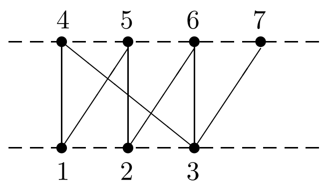


Рис. 17

Ввиду связности существует ребро, соединяющее какую-либо вершину графа C_6 с другой вершиной. Без ограничения общности можно считать, что такой вершиной графа C_6 является вершина 3 и $3 < 7$ для некоторой вершины $7 \in X$. Определим преобразование $\alpha\colon X \to X$ правилом

$$x\alpha = \begin{cases} 4, & \text{если } x = 4,\\ 6, & \text{если } x = 5,\\ 7, & \text{если } x = 7,\\ 3 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Проверим, что α сохраняет порядок. Действительно, пусть $y < z$. Тогда $y\alpha = 3$. Но $z\alpha \in \{4, 6, 7, 3\}$, следовательно, $z\alpha \geqslant y\alpha$. Таким образом, $\alpha \in O(X)$.

Так как полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$ для некоторых $\beta, \gamma \in O(X)$.

Предположим вначале, что $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. Тогда по лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha$. Следовательно, $4\beta\alpha\gamma = 4$, $6\beta\alpha\gamma = 6$, $7\beta\alpha\gamma = 7$, $3\beta\alpha\gamma = 3$. Элементы $4\beta\alpha$, $6\beta\alpha$, $7\beta\alpha$, $3\beta\alpha$ различны и принадлежат $\operatorname{im}\alpha$. Следовательно, $\{4\beta\alpha,\ 6\beta\alpha,\ 7\beta\alpha,\ 3\beta\alpha\} = \{4, 6, 7, 3\}$. Так как $3 < 4, 6, 7$, то $3\beta\alpha < 4\beta\alpha,\ 6\beta\alpha,\ 7\beta\alpha$. Следовательно, $3\beta\alpha = 3$, $\{4\beta\alpha,\ 6\beta\alpha,\ 7\beta\alpha\} = \{4, 6, 7\}$. По определению α мы теперь получаем, что $\{4\beta, 6\beta, 7\beta\} = \{4, 5, 7\}$. Пусть $3\beta = x$. Так как $3 < 4, 6, 7$, то $3\beta < 4\beta,\ 6\beta,\ 7\beta$, т. е. $x < 4, 5, 7$. Если $x = 1$, то $1, 3 < 4, 7$, а значит, подграф с вершинами 1, 3, 4, 7 изоморфен $F_{2,2}$, что невозможно ввиду леммы 12. Если $x \neq 1$, то $\{1, x, 4, 5\} \cong F_{2,2}$, и мы снова получаем противоречие с леммой 12.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Тогда отображение $\beta\alpha\gamma\alpha$ отображает множество $\{4, 5, 7, 3\}$ взаимно-однозначно на множество $\{4, 6, 7, 3\}$. Следовательно, $4\beta\alpha$, $5\beta\alpha$, $7\beta\alpha$, $3\beta\alpha$ — различные элементы из $\operatorname{im}\alpha$. Поэтому $\{4\beta\alpha,\ \beta\alpha,\ 7\beta\alpha,\ 3\beta\alpha\} = \{4, 6, 7, 3\}$. Среди этих элементов один меньше трёх остальных, несравнимых между собой. Так как $3 < 7$, то $3\beta\alpha \leqslant 7\beta\alpha$. Но $3\beta\alpha \neq 7\beta\alpha$, поэтому $3\beta\alpha < 7\beta\alpha$. Теперь ясно, что $3\beta\alpha < 4\beta\alpha, 5\beta\alpha, 7\beta\alpha$. Но тогда $3\beta\alpha\gamma < 4\beta\alpha\gamma, 5\beta\alpha\gamma, 7\beta\alpha\gamma$. Далее, так как $(4\beta\alpha\gamma)\alpha = 4$, то $4\beta\alpha\gamma = 4$; аналогично $5\beta\alpha\gamma = 5$ и $7\beta\alpha\gamma = 7$. Пусть $x = 3\beta\alpha\gamma$. Тогда $x < 4, 5, 7$. Отсюда мы получаем противоречие так же, как в случае $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. ☐

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему, обобщающую теорему Айзенштат—Адамса—Гоулда на слабо регулярный случай.

Теорема 1. *Пусть X — частично упорядоченное множество. Тогда полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

1) X — *квазиполная цепь*;
2) X — *антицепь*;
3) $X \cong L_I$;
4) $X \cong F_{Y,Z}$;
5) $X \cong G_{Y,Z}$;
6) $X \cong C_6$.

Доказательство. Необходимость. Считаем, что полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле. Если множество X несвязно, то по лемме 3 X — антицепь. Считаем далее, что X связно. Если X — цепь, тогда по лемме 2 X — квазиполная цепь. Пусть теперь X не цепь. По лемме 9 X не содержит цепей из более чем трёх элементов. Если в X есть цепь из трёх элементов, то по лемме 10 $X \cong L_I$. Считаем далее, что цепей из трёх и более элементов нет. Из лемм 13 и 14 следует, что либо $X \cong F_{Y,Z}$, либо $X \cong G_{Y,Z}$, либо $X \cong C_6$.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1)—6). Тогда по теореме Айзенштат—Адамса—Гоулда полугруппа $O(X)$ регулярна, а значит, является слабо регулярной в широком смысле. □

Перейдём теперь к рассмотрению квазиупорядоченных множеств. Напомним, что бинарное отношение $\preccurlyeq$ на множестве X называется *квазипорядком*, если оно рефлексивно и транзитивно. Множество X с заданным на нём квазипорядком называется *квазиупорядоченным множеством*. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — квазиупорядоченное множество. Введём отношение $\equiv$ на нём, полагая

$$x \equiv y \iff x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x.$$

Хорошо известно, что $\equiv$ является отношением эквивалентности на множестве X, а множество классов $\bar{X} = X/\equiv$ — частично упорядоченным множеством относительно следующего отношения порядка:

$$\bar{x} \leqslant \bar{y} \iff x \preccurlyeq y$$

(здесь через $\bar{x}$, $\bar{y}$ обозначены классы эквивалентности, содержащие элементы x, y соответственно).

Пусть σ — бинарное отношение на множестве X. Мы будем говорить, что отображение $\alpha\colon X \to X$ *сохраняет отношение* σ, если для любых $x, y \in X$ из того, что $(x, y) \in \sigma$ следует, что $(x\alpha, y\alpha) \in \sigma$. Очевидно, все отображения $\alpha \in T(X)$, сохраняющие отношение σ, образуют полугруппу, которую обозначают $O(X, \sigma)$ или просто $O(X)$, как мы это делали на протяжении всей статьи в случае частично упорядоченного множества X. Наша дальнейшая цель — показать, что для квазиупорядоченных множеств X вопрос о слабой регулярности полугруппы $O(X)$ решается, за одним исключением, так же, как для частично упорядоченных множеств. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — квазиупорядоченное множество. Полугруппа $O(X) = O(X, \preccurlyeq)$ слабо регулярна в широком смысле в том и только том случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) *$x \preccurlyeq y$ для любых $x, y \in X$*;
2) *X — частично упорядоченное множество, являющееся квазиполной цепью или антицепью или изоморфное какому-либо из множеств L_I, $F_{Y,Z}$, $G_{Y,Z}$, C_6.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле. Докажем, что либо выполнено условие 1), либо

X — частично упорядоченное множество, т. е. докажем, что имеет место альтернатива: либо $X/\equiv$ состоит из одного элемента, либо все классы отношения $\equiv$ одноэлементны.

Предположим, что классов более одного и существуют классы, содержащие более одного элемента. Надо привести это предположение к противоречию. Пусть K — какой-либо неодноэлементный класс и $p, q \in K$ таковы, что $p \neq q$. Определим отображение $\alpha\colon X \to X$ правилом

$$x\alpha = \begin{cases} p, & \text{если } x \in K, \\ q, & \text{если } x \notin K. \end{cases}$$

Так как $p \preccurlyeq q$ и $q \preccurlyeq p$, то $x\alpha \preccurlyeq y\alpha$ при всех $x, y \in X$, поэтому $\alpha \in O(X)$. Далее, так как полугруппа $O(X)$ слабо регулярна в широком смысле, то $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$ или $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$ для некоторых $\beta, \gamma \in O(X)$.

Пусть $\alpha = \alpha\beta\alpha\gamma$. Тогда по лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ тождественно на множестве $\operatorname{im}\alpha$. Следовательно, $p\beta\alpha\gamma = p$, $q\beta\alpha\gamma = q$. Очевидно, $p\beta\alpha \neq q\beta\alpha$, а так как $\operatorname{im}\alpha = \{p, q\}$, то $\{p\beta\alpha, q\beta\alpha\} = \{p, q\}$. Поэтому один из элементов $p\beta$, $q\beta$ принадлежит K, а другой не принадлежит. Но это невозможно: так как $\beta \in O(X)$ и $p \preccurlyeq q$, $q \preccurlyeq p$, то $p\beta \preccurlyeq q\beta$ и $q\beta \preccurlyeq p\beta$, т. е. $p\beta$ и $q\beta$ лежат в одном классе отношения $\equiv$.

Пусть теперь $\alpha = \beta\alpha\gamma\alpha$. Тогда по лемме 1 отображение $\beta\alpha\gamma$ сохраняет классы отношения $\ker\alpha$. Этих классов всего два: K и $X \setminus K$. Следовательно, $p\beta\alpha\gamma \in K$, $x\beta\alpha\gamma \notin K$ при $x \notin K$. Так как $p\beta\alpha, x\beta\alpha \in \operatorname{im}\alpha = \{p, q\}$, то $p\beta\alpha \equiv x\beta\alpha$. Так как $\gamma \in O(X)$, то $p\beta\alpha\gamma \equiv x\beta\alpha\gamma$ — противоречие.

Итак, нами доказано, что либо выполнено условие 1), либо X — частично упорядоченное множество. Во втором случае по теореме 1 мы получаем, что X удовлетворяет условию 2).

Достаточность. Если выполнено условие 1), то $O(X) = T(X)$, поэтому $O(X)$ — регулярная полугруппа, а значит, она слабо регулярна в широком смысле. К тому же заключению приходим по теореме Айзенштат—Адамса—Гоулда, если выполнено условие 2). $\square$

Следствие. *Пусть* $(X, \preccurlyeq)$ — *квазиупорядоченное множество. Полугруппа* $O(X)$ *регулярна в том и только том случае, если выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) $x \preccurlyeq y$ *для любых* $x, y \in X$;
2) X — *частично упорядоченное множество, являющееся квазиполной цепью или антицепью или изоморфное какому-либо из множеств* L_I, $F_{Y,Z}$, $G_{Y,Z}$, C_6.

Литература

[1] Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 161—169.

[2] Айзенштат А. Я. Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Учёные записки Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. — 1968. — Т. 387. — С. 3—11.

[3] Важенин Ю. М. Элементарные свойства полугрупп преобразований упорядоченных множеств // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 7, № 3. — С. 339—347.

[4] Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, № 5. — С. 157—162.

[5] Ким В. И., Кожухов И. Б. Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счётных цепей // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 97—104.

[6] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1972.

[7] Ляпин Е. С. Абстрактная характеристика класса полугрупп эндоморфизмов систем общего вида // Мат. сб. — 1966. — Т. 70 (112), no. 2. — С. 173—179.

[8] Скорняков Л. А. О моноидах изотонных отображений // Мат. сб. — 1984. — Т. 123 (165), № 1. — С. 50—68.

[9] Ярошевич В. А. Отображения, согласующиеся с бинарными отношениями // Мат. вестн. педвуз. и унив. Волго-Вятского рег. — 2009. — Вып. 11. — С. 135—142.

[10] Adams M. E., Gould M. Posets whose monoids of order-preserving maps are regular // Order. — 1989. — No. 6. — P. 195—201.

[11] Higgins P. M., Mitchell J. D., Ruškuc N. Generating the full transformation semigroup using order preserving mappings // Glasgow Math. J. — 2003. — Vol. 45. — P. 557—566.

[12] Krokhin A., Larose B. A monoidal interval of isotone clones on a finite chain // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2001. — Vol. 68, no. 1-2. — P. 37—62.

[13] Laradji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations. — King Fahd Univ. of Petroleum & Minerals (Saudi Arabia), Dept. Math. Sci., 2004. — Tech. Report Ser.

[14] Larose B. A completeness criterion for isotone operations on a finite chain // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1994. — Vol. 59, no. 3-4. — P. 319—356.

[15] Schein B. M. Products of idempotent order-preserving transformations of arbitrary chains // Semigroup Forum. — 1975. — Vol. 11, no. 1. — P. 297—309.

[16] Umar A. On the ranks of certain finite semigroups of order-decreasing transformations // Portugal. Math. — 1996. — Vol. 53, Fasc. 1. — P. 23—34.