Простые решёточные матрицы

В. Е. МАРЕНИЧ
Мурманский государственный
педагогический университет
e-mail: vmarenich@yandex.ru

УДК 512.64

Ключевые слова: решёточные матрицы, простые матрицы.

Аннотация

В работе рассмотрены свойства простых решёточных матриц над цепями, над прямым произведением цепей, над булеаном и над булевыми решётками.

Abstract

V. E. Marenich, Prime lattice matrices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 167—179.

We consider properties of prime lattice matrices over the following lattices: chains, direct sums of chains, Boolean lattices.

Введение

Данная работа — продолжение статьи [2], в которой рассмотрены простые матрицы над дистрибутивными решётками и

— доказано, что не существует простых матриц порядка 2;
— доказано существование простых матриц над конечными решётками;
— найдены условия существования простых $(n \times n)$-матриц, $n \geqslant 3$;
— рассмотрены свойства простых матриц.

В данной работе изучаются свойства простых решёточных матриц над цепями, над прямым произведением цепей, над булеаном и над булевыми решётками.

Простые матрицы над двухэлементной решёткой изучались в [1, 5—10, 12, 13, 15, 16]. Свойства простых $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-булевых матриц рассматривались в [3, 14].

Предварительные сведения

Пусть $(P, \wedge, \vee, \leqslant)$ — решётка с нулём $\tilde{0}$ и единицей $\tilde{1}$ (далее эту решётку будем обозначать P). Будем пользоваться обозначениями и терминологией работы [2].

Обозначим $P^{m \times n}$ множество всех решёточных матриц размера $m \times n$, где $n, m \geqslant 1$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 167—179.

Матрица ${}^{\mathrm{t}}A$ получена из матрицы A транспонированием.

Обозначим S_n множество всех подстановок степени n. Квадратная $\{\tilde{0},\tilde{1}\}$-матрица называется *подстановочной матрицей* (матрицей перестановки, матрицей подстановки, перестановочной матрицей), если в ней каждый столбец и каждая строка содержат только одну единицу $\tilde{1}$.

Подстановочная матрица $M(\pi)=(m(\pi)_{ij})$ порядка n определяется подстановкой $\pi\in\mathrm{S}_n$:

$$m(\pi)_{ij}=\begin{cases}\tilde{1}, & j=\pi(i),\\ \tilde{0}, & j\neq\pi(i),\end{cases}\qquad i,j=1,\ldots,n.$$

Матрицы $A,B\in P^{m\times n}$ называются *подстановочно эквивалентными*, если существуют такие подстановочные матрицы $M(\pi)$, $M(\sigma)$, что $A=M(\pi)BM(\sigma)$, другими словами, если матрица B получена перестановкой строк и столбцов матрицы A.

Матрица A называется *вполне неразложимой*, если она не содержит нулевых $(s\times t)$-подматриц, где $s,t\geqslant 1$, $s+t=n$.

Если каждый элемент матрицы $A\in P^{m\times n}$ имеет дополнение, то матрица $\bar{A}\in P^{m\times n}$, где $\bar{a}_{ij}=\overline{a_{ij}}$ для всех $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, называется *матрицей дополнений*.

Единичная матрица — это матрица $E_{n\times n}=(e_{ij})_{n\times n}\in P^{n\times n}$, где

$$e_{ij}=\begin{cases}\tilde{1}, & i=j,\\ \tilde{0}, & i\neq j.\end{cases}$$

Матрица $A\in P^{n\times n}$ называется *обратимой* над решёткой P, если существует матрица $B\in P^{n\times n}$, такая что $AB=E_{n\times n}$ (или $BA=E_{n\times n}$). Обратимость матриц описывается следующими теоремами.

Теорема (теорема Гивеона—Скорнякова об обратимости матриц над дистрибутивными решётками [4, 11]). *Матрица $A\in P^{n\times n}$ обратима тогда и только тогда, когда*

$$A\cdot{}^{\mathrm{t}}A={}^{\mathrm{t}}A\cdot A=E_{n\times n}.\qquad\square$$

Теорема (теорема Скорнякова об изоморфизме [4]). *Группа обратимых матриц совпадает с группой подстановочных матриц тогда и только тогда, когда только нуль $\tilde{0}$ и единица $\tilde{1}$ имеют дополнение в решётке P.* $\square$

Матрица A называется *простой* над решёткой P, если она не является обратимой и из равенства $A=BC$, где $B,C\in P^{n\times n}$, следует, что B или C — обратимая матрица.

Если $A_1,A_2,\ldots,A_k$ — квадратные матрицы порядков $n_1,\ldots,n_k$ соответственно, то определена блочно-диагональная матрица

$$A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_k=\begin{pmatrix}A_1 & & & 0\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k\end{pmatrix}$$

порядка $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, где 0 — нулевые матрицы. Матрицу $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k$ называют *прямой суммой* матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Определим $\mathrm{per}(A)$ — перманент матрицы $A \in P^{n\times n}$ — равенством

$$\mathrm{per}(A) = \bigvee_{\pi\in \mathrm{S}_n} \bigl(a_{1\pi(1)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)}\bigr).$$

1. Простые матрицы над цепями

Пусть $(P, \wedge, \vee, \leqslant)$ — цепь с нулём $\tilde{0}$ и единицей $\tilde{1}$.

Из [2, теорема 1 пункта «Вполне неразложимые простые решёточные матрицы»] получаем следующее уточнение для цепей.

Теорема 1.1. *Пусть $A \in P^{n\times n}$ — простая матрица. Справедливо одно из следующих утверждений*:

1) *матрица A вполне неразложимая*;
2) *матрица A перестановочно эквивалентна блочной матрице*

$$\begin{pmatrix} B_{11} & 0_{t\times s} \\ 0_{s\times t} & E_{s\times s} \end{pmatrix} = B_{11} \oplus E_{s\times s},$$

где B_{11} — вполне неразложимая простая $(t \times t)$-матрица, $1 \leqslant s, t \leqslant n-1$, $s + t = n$. □

Из теоремы 1.1 выводим следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть $1 \leqslant t \leqslant n$. Если $B \in P^{t\times t}$ — простая матрица, то прямая сумма $B \oplus E_{(n-t)\times(n-t)}$ — простая $(n \times n)$-матрица.* □

Из [2, теорема 1 пункта «Свойства простых решёточных матриц»] получаем следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Каждая строка и каждый столбец простой матрицы содержит нуль $\tilde{0}$ и единицу $\tilde{1}$.* □

Пусть

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_p\} \subseteq P, \quad \tilde{0} = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_p = \tilde{1}. \tag{1}$$

Определим функцию $\Im_S \colon P \to S$. Для всех $a \in P$ положим

$$\Im_S(a) = \begin{cases} s_0, & \text{если } a = \tilde{0}, \\ s_t, & \text{если } s_{t-1} < a \leqslant s_t,\ t = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

Заметим, что $\Im_S$ — оператор замыкания решётки P. Для любых элементов $a, b \in P$ справедливы равенства

$$\Im_S(a \vee b) = \Im_S(a) \vee \Im_S(b), \quad \Im_S(a \wedge b) = \Im_S(a) \wedge \Im_S(b).$$

Для каждой матрицы $A \in P^{m\times n}$ определим матрицу

$$\Im_S(A) = \bigl(\Im_S(a_{ij})\bigr)_{m\times n}.$$

Функция $\Im_S \colon P^{m\times n} \to P^{m\times n}$ — оператор замыкания решётки $(P^{m\times n}, \wedge, \vee, \leqslant)$.

Если $S = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$, то матрица $\Im_S(A)$ получена заменой всех элементов матрицы A, отличных от нуля $\tilde{0}$, на единицу $\tilde{1}$.

Рассмотрим свойства функции $\Im_S$.

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любых матриц $A, B \in P^{m\times n}$*
$$\Im_S(A+B) = \Im_S(A) + \Im_S(B), \quad \Im_S(A \wedge B) = \Im_S(A) \wedge \Im_S(B).$$
2. *Для любых матриц $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{n\times k}$*
$$\Im_S(AB) = \Im_S(A)\Im_S(B).$$
3. *Для любой матрицы $A \in P^{m\times n}$ и любого $\lambda \in P$*
$$\Im_S(\lambda A) = \Im_S(\lambda)\Im_S(A).$$
4. *Для любых $w_1, w_2, \ldots, w_k \in P^{m\times 1}$ и любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in P$*
$$\Im_S(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_k w_k) = \\ = \Im_S(\lambda_1)\Im_S(w_1) + \Im_S(\lambda_2)\Im_S(w_2) + \ldots + \Im_S(\lambda_k)\Im_S(w_k). \quad \square$$

Лемма 1.2. *Пусть $A \in P^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если матрица A обратима над цепью P, то и матрица $\Im_S(A)$ обратима над цепью P.*
2. *Если матрица $\Im_S(A)$ обратима над цепью P, то*
$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)M(\pi)$$
для некоторой подстановочной матрицы $M(\pi)$ и некоторых элементов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > \tilde{0}$.

Доказательство. Докажем утверждение 2. Пусть $\Im_S(A)$ — обратимая матрица. Тогда $\Im_S(A)$ — подстановочная матрица. Пусть $\Im_S(A) = M(\pi)$. Из неравенства $A \leqslant \Im_S(A)$ следует, что матрица $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)M(\pi)$ имеет нужный вид. $\square$

Пусть $(S, \wedge, \vee, \leqslant)$ — цепь, где множество S определено формулой (1). Рассмотрим признак простоты матриц.

Теорема 1.4. *Пусть каждая строка и каждый столбец матрицы $A \in P^{n\times n}$ содержит единицу $\tilde{1}$. Если $\Im_S(A)$ — простая матрица над цепью S, то A — простая матрица над цепью P.*

Доказательство. Пусть $\Im_S(A)$ — простая матрица над цепью S, $A = BC$, где $B, C \in P^{n\times n}$. Докажем, что матрица A не является обратимой. Если матрица A обратима, то по теореме Скорнякова об изоморфизме A — подстановочная матрица и $\Im_S(A) = A$ — подстановочная матрица. Получили противоречие.

Имеем $\Im_S(A) = \Im_S(B)\Im_S(C)$. Так как $\Im_S(A)$ — простая матрица над цепью S, то одна из матриц $\Im_S(B)$ или $\Im_S(C)$ обратима.

Пусть обратима матрица $\Im_S(B)$. Тогда

$$B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)M(\pi)$$

для некоторой подстановочной матрицы $M(\pi)$ и некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > \tilde{0}$.

Если существует $\lambda_i < \tilde{1}$, то из равенства

$$A = BC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)M(\pi)C$$

получаем, что никакой элемент строки $A_{(i)}$ не превосходит $\lambda_i < \tilde{1}$ — противоречие.

Доказано, что $B = M(\pi)$. Значит, B — обратимая матрица, A — простая матрица над цепью P. $\square$

Пусть

$$\operatorname{Set}(A) = \{a_{ij} \mid i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Следствие 1.1. *Пусть $A \in P^{n\times n}$, $S = \operatorname{Set}(A) \cup \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. Матрица A проста над цепью P тогда и только тогда, когда она проста над цепью S.*

Доказательство. Пусть матрица A проста над цепью P. Ясно, что матрица $\Im_S(A) = A$ не является обратимой над цепью S. Если матрица $\Im_S(A)$ не является простой над цепью S, то существуют необратимые $B, C \in S^{n\times n}$, такие что $A = \Im_S(A) = BC$ — противоречие. $\square$

Следствие 1.1 сводит задачу нахождения простых матриц над бесконечными цепями к задаче нахождения простых матриц над конечными цепями.

Следствие 1.2. *Пусть $A \in P^{n\times n}$ — $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$-матрица. Матрица A проста над решёткой $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ тогда и только тогда, когда она проста над цепью P.* $\square$

Приведем примеры простых матриц над цепями.

Пример 1.1. Пусть $n \geqslant 3$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in P$ такие, что $\tilde{0} < \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \leqslant \tilde{1}$. Если в матрице

$$C(n, 2, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \lambda_1 & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \lambda_2 & \ldots & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{1} & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & \tilde{0} & \tilde{0} & \ldots & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}$$

заменить все элементы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ единицей $\tilde{1}$, то получим циркулянт $C(n, 2)$.

Известно [13], что циркулянт $C(n, 2)$ — простая матрица над решёткой $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. Значит, $C(n, 2, \lambda)$ — простая матрица над цепью P.

Доказанные утверждения позволяют найти все простые (3×3)-матрицы.

Теорема 1.5. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждая матрица вида*
$$\begin{pmatrix} \tilde{0} & * & * \\ * & \tilde{0} & * \\ * & * & \tilde{0} \end{pmatrix}, \tag{2}$$
где $*$ — это элементы, не равные нулю, такие что каждая строка и каждый столбец матрицы (2) содержат единицу $\tilde{1}$, является простой.
2. *Каждая простая (3×3)-матрица подстановочно эквивалентна матрице вида (2).*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Если A — матрица вида (2), то для множества $S = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ матрица $\Im_S(A) = \overline{E_{3\times 3}}$ простая над цепью S. Поэтому A — простая матрица над цепью P.

Докажем утверждение 2. Каждая простая матрица $A \in P^{3\times 3}$ является вполне неразложимой. Поэтому каждая строка и каждый столбец матрицы A содержат ровно один нуль $\tilde{0}$. Каждая строка и каждый столбец матрицы (2) содержат единицу $\tilde{1}$. Значит, матрица A подстановочно эквивалентна матрице вида (2). $\square$

Следствие 1.3. *Перманенты простых (3×3)-матриц над цепями могут принимать любые ненулевые значения.*

Доказательство. Из теоремы 1.5 следует, что
$$A = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \lambda \\ \tilde{1} & \lambda & \tilde{0} \end{pmatrix} -$$
простая (3×3)-матрица для любого λ, $\tilde{0} < \lambda \leqslant \tilde{1}$. Имеем $\mathrm{per}(A) = \lambda$. $\square$

2. Прямое произведение матриц

Пусть $\{P_z \mid z \in I\}$ — произвольное семейство множеств, проиндексированное элементами множества индексов I. Определим декартово произведение множеств
$$P = \times \prod_{z \in I} P_z$$
как семейство всех функций $f\colon I \to \bigcup\limits_{z \in I} P_z$, для которых $f(z) \in P_z$ для всех $z \in I$. Будем называть $f(z)$ *проекцией функции* f на множество P_z и писать $\mathrm{pr}_z(f) = f(z)$.

Если на каждом множестве P_z определён частичный порядок $\leqslant$, то и на декартовом произведении P определён частичный порядок $\leqslant$. Неравенство $f \leqslant g$

означает, что $\mathrm{pr}_z(f) \leqslant \mathrm{pr}_z(g)$ для всех $z \in I$. Частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$ называется *прямым произведением частично упорядоченных множеств* $\{P_z \mid z \in I\}$.

Если каждое из множеств P_z образует решётку с решёточными операциями пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$, то прямое произведение $P = \times \prod\limits_{z \in I} P_z$ является решёткой, операции пересечения $\wedge$ и объединения $\vee$ в которой определены «покомпонентно». Другими словами, $f \wedge g = h$ означает, что $\mathrm{pr}_z(f) \wedge \mathrm{pr}_z(g) = \mathrm{pr}_z(h)$ для всех $z \in I$, $f \vee g = q$ означает, что $\mathrm{pr}_z(f) \vee \mathrm{pr}_z(g) = \mathrm{pr}_z(h)$ для всех $z \in I$. Полученная решётка P называется *прямым произведением решёток* P_z, $z \in I$.

Для любой матрицы $A \in P^{m \times n}$ определены матрицы

$$\mathrm{pr}_z(A) = \big(\mathrm{pr}_z(a_{ij})\big)_{m \times n}, \quad z \in I.$$

Матрица $\mathrm{pr}_z(A)$ называется *проекцией матрицы* A на множество $P_z^{m \times n}$. Будем говорить, что матрица A есть прямое произведение матриц $\mathrm{pr}_z(A)$, $z \in I$, и писать

$$A = \times \prod_{z \in I} \mathrm{pr}_z(A).$$

Заметим, что для любых матриц $A, B \in P^{m \times n}$ равенство $A = B$ равносильно тому, что $\mathrm{pr}_z(A) = \mathrm{pr}_z(B)$ для всех $z \in I$.

Справедливы следующие свойства матричных проекций:

— для любых матриц $A, B \in P^{m \times n}$ и любых $\lambda \in P$, $z \in I$

$$\mathrm{pr}_z(A + B) = \mathrm{pr}_z(A) + \mathrm{pr}_z(B), \quad \mathrm{pr}_z(A \wedge B) = \mathrm{pr}_z(A) \wedge \mathrm{pr}_z(B),$$
$$\mathrm{pr}_z(\lambda A) = \mathrm{pr}_z(\lambda)\mathrm{pr}_z(A);$$

— для любых матриц $A \in P^{m \times n}$, $B \in P^{n \times k}$ и любых $z \in I$

$$\mathrm{pr}_z(AB) = \mathrm{pr}_z(A)\mathrm{pr}_z(B);$$

— для любой матрицы $A \in P^{n \times n}$ и любого $z \in I$

$$\mathrm{pr}_z\big(\mathrm{per}(A)\big) = \mathrm{per}\big(\mathrm{pr}_z(A)\big).$$

Матрица A делится на матрицу B слева (или справа) тогда и только тогда, когда матрица $\mathrm{pr}_z(A)$ делится на матрицу $\mathrm{pr}_z(B)$ слева (или справа) для всех $z \in I$.

Пример 2.1. Пусть P — прямое произведение решёток $\{P_z \mid z \in I\}$ с нулём $\tilde{0}$ и единицей $\tilde{1}$, $E_{n \times n} \in P^{n \times n}$ — единичная матрица. Тогда для всех $z \in I$ $\mathrm{pr}_z(E_{n \times n})$ — единичная матрица.

Пример 2.2. Пусть $P = \mathrm{Div}(12) = \{1, 2, 4\} \times \{1, 3\}$ — решётка делителей числа 12. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix} \in P^{3 \times 3}$$

имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Простые матрицы над прямым произведением решёток

Пусть решётка P — прямое произведение дистрибутивных решёток P_z, $z \in I$, с нулём $\tilde{0}$ и единицей $\tilde{1}$.

Рассмотрим критерий простоты матрицы над произведением решёток.

Теорема 3.1. *Пусть $A \in P^{n\times n}$. Следующие утверждения равносильны.*

1. *Матрица A является простой над решёткой P.*
2. *Существует индекс $w \in I$, такой что проекция $\mathrm{pr}_w(A)$ является простой матрицей над решёткой P_w, а для любого индекса $u \neq w$ проекция $\mathrm{pr}_u(A)$ является обратимой матрицей над решёткой P_u.*

Доказательство. Заметим, что матрица обратима тогда и только тогда, когда все её проекции обратимы.

Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Пусть A — простая матрица над решёткой P. Предположим, что все проекции матрицы A обратимы. Тогда A — обратимая матрица. Получили противоречие. Значит, существует хотя бы одна необратимая проекция матрицы A.

Предположим, что существуют две необратимые проекции матрицы A. Пусть $\mathrm{pr}_w(A)$ и $\mathrm{pr}_u(A)$ — необратимые матрицы над P_w и P_u соответственно, $u \neq w$.

Рассмотрим матрицы A' и A'', заданные следующими условиями:

$$\mathrm{pr}_z(A') = \begin{cases} \mathrm{pr}_z(A), & \text{если } z \neq u, \\ E_u, & \text{если } z = u, \end{cases} \qquad \mathrm{pr}_z(A'') = \begin{cases} E_z, & \text{если } z \neq u, \\ \mathrm{pr}_u(A), & \text{если } z = u. \end{cases}$$

Из равенств $\mathrm{pr}_z(A) = \mathrm{pr}_z(A')\mathrm{pr}_z(A'')$ для любого $z \in I$ следует, что $A = A'A''$. Матрица A' имеет необратимую проекцию $\mathrm{pr}_w(A)$, $w \neq u$. Матрица A'' имеет необратимую проекцию $\mathrm{pr}_u(A)$. Поэтому матрицы A' и A'' необратимы, т. е. матрица A раскладывается в произведение необратимых матриц, что невозможно, так как A — простая матрица над решёткой P. Получили противоречие. Доказано, что существует только одна необратимая проекция матрицы A. Ясно, что она является простой.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 1$. Пусть $\mathrm{pr}_w(A)$ — единственная простая проекция матрицы A, остальные проекции обратимы. Ясно, что матрица A необратима, так как имеет необратимую проекцию. Предположим, что $A = BC$, где матрицы B и C необратимы над решёткой P. Из простоты матрицы $\mathrm{pr}_w(A)$ над P_w и равенства $\mathrm{pr}_w(A) = \mathrm{pr}_w(B)\mathrm{pr}_w(C)$ следует, что одна из матриц $\mathrm{pr}_w(B)$ или $\mathrm{pr}_w(C)$ обратима над P_w. Для любого $z \neq w$ матрица $\mathrm{pr}_z(A)$

обратима над P_z и справедливо равенство $\mathrm{pr}_z(A) = \mathrm{pr}_z(B)\mathrm{pr}_z(C)$. Поэтому для любого $z \neq w$ проекции $\mathrm{pr}_z(B)$ и $\mathrm{pr}_z(C)$ — обратимые матрицы над P_z. Получили, что все проекции одной из матриц B или C обратимы, т. е. B или C является обратимой матрицей над решёткой P — противоречие. □

Пример 3.1. Пусть $P = \mathrm{Div}(12)$. Имеем, что $P = \{1, 2, 4\} \times \{1, 3\}$. Простыми матрицами над решёткой $\mathrm{Div}(12)$ являются только матрицы вида $B \times C$, определённые следующими условиями:

1) матрица B перестановочно эквивалентна матрице
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$
матрица C перестановочно эквивалентна матрице
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

2) матрица B перестановочно эквивалентна матрице
$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix},$$
где на помеченных местах расположены числа 2 и 4 так, что каждая строка и каждый столбец матрицы содержит число 4; матрица C перестановочно эквивалентна матрице
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 3.1. *Пусть решётка P есть прямое произведение нетривиальных цепей, $n \geqslant 3$. Следующие утверждения равносильны.*

1. $\lambda \in \{\mathrm{per}(A) \mid A$ — *простая матрица*, $A \in P_{n\times n}\}$.
2. *Существует индекс $z \in I$, такой что $\tilde{0} < \mathrm{pr}_z(\lambda) \leqslant \tilde{1}$ и $\mathrm{pr}_u(\lambda) = \tilde{1}$ для всех индексов $u \neq z$.* □

4. Простые матрицы над булеаном

Пусть U — непустое множество, $\tilde{0} = \varnothing$, $\tilde{1} = U$. *Булеан* $\mathrm{Bul}(U)$ — это прямое произведение двухэлементных цепей,
$$\mathrm{Bul}(U) \cong \times \prod_{z\in U} [\varnothing, \{z\}]_{\subseteq},$$
где $[\varnothing, \{z\}]_{\subseteq}$ — двухэлементная цепь.

Простые матрицы над двухэлементной решёткой определяют простые матрицы над булеаном.

Теорема 4.1. *Пусть $n \geqslant 3$. Тогда простыми $(n \times n)$-матрицами над булеаном $\mathrm{Bul}(U)$ являются только матрицы вида*

$$\{u\}B + \sum_{z \in U - \{u\}} \{z\} M(\pi_z), \tag{3}$$

где $u \in U$, B — некоторая простая матрица размера $n \times n$, $M(\pi_z)$ — некоторая подстановочная матрица размера $n \times n$ над двухэлементной решёткой $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$.

Доказательство. Нужное утверждение — следствие теоремы 3.1. □

Следствие 4.1. *Каждая простая матрица над булеаном есть линейная комбинация подстановочных матриц.*

Доказательство. Каждая простая матрица над двухэлементной решёткой есть линейная комбинация подстановочных матриц. Отсюда и из теоремы 4.1 получаем нужное утверждение. □

Следствие 4.2. *Перманент каждой простой матрицы над булеаном* $\mathrm{Bul}(U)$ *равен единице $\tilde{1} = U$.*

Доказательство. Пусть $u \in U$ и простая матрица A записана в виде (3). Имеем, что

$$\mathrm{per}(A) \geqslant \mathrm{per}(\{u\}B) = \{u\} \wedge \mathrm{per}(B) \geqslant \{u\},$$
$$\mathrm{per}(A) \geqslant \mathrm{per}\Bigg(\sum_{z \in U - \{u\}} \{z\} M(\pi_z)\Bigg) \geqslant \{v\}$$

для любого $v \neq u$. Отсюда получаем нужное утверждение. □

Приведём примеры простых матриц над булеаном.

Пример 4.1. Пусть U — непустое множество, $u \in U$.

1. Выберем матрицу $B = \overline{E_{3\times 3}}$ и подстановочные матрицы $M(\pi_z) = E_{3\times 3}$ для всех $z \in U - \{u\}$. Из теоремы 4.1 следует, что

$$A = \begin{pmatrix} U - \{u\} & \{u\} & \{u\} \\ \{u\} & U - \{u\} & \{u\} \\ \{u\} & \{u\} & U - \{u\} \end{pmatrix} -$$

простая матрица над булеаном $\mathrm{Bul}(U)$. Заметим, что матрица A не содержит нулей и единиц булеана $\mathrm{Bul}(U)$.

2. Пусть U — конечное множество, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, $k \geqslant 1$. Матрица $\overline{E_{n\times n}}$, где $n \geqslant 3$, раскладывается в произведение матриц:

$$\overline{E_{n\times n}} = \begin{pmatrix} \overline{\{u_1\}} & \{u_1\} & \dots & \{u_1\} \\ \{u_1\} & \overline{\{u_1\}} & \dots & \{u_1\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{u_1\} & \{u_1\} & \dots & \overline{\{u_1\}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\{u_2\}} & \{u_2\} & \dots & \{u_2\} \\ \{u_2\} & \overline{\{u_2\}} & \dots & \{u_2\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{u_2\} & \{u_2\} & \dots & \overline{\{u_2\}} \end{pmatrix} \times \dots \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \overline{\{u_k\}} & \{u_k\} & \dots & \{u_k\} \\ \{u_k\} & \overline{\{u_k\}} & \dots & \{u_k\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{u_k\} & \{u_k\} & \dots & \overline{\{u_k\}} \end{pmatrix}.$$

Для $n = 3$ имеем разложение матрицы $\overline{E_{3\times 3}}$ в произведение простых матриц.

3. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \{u\} & U-\{u\} & \dots & U-\{u\} \\ U-\{u\} & \{u\} & \dots & U-\{u\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U-\{u\} & U-\{u\} & \dots & \{u\} \end{pmatrix} \in P^{n\times n}, \quad n \geqslant 3,$$

не является простой матрицей над булеаном $\mathrm{Bul}(U)$.

5. Простые матрицы над булевыми решётками

Пусть $(P, \wedge, \vee, \leqslant)$ — булева решётка с $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, $\mathrm{Lbul}(A)$ — конечная булева подрешётка решётки P, порождённая элементами матрицы $A \in P^{n\times n}$.

Рассмотрим критерий существования простых матриц над булевыми решётками.

Теорема 5.1. *Пусть $A \in P^{n\times n}$. Следующие утверждения равносильны.*

1. *Матрица A проста над решёткой P.*
2. *Матрица A проста над любой конечной булевой подрешёткой Q решётки P, содержащей подрешётку* $\mathrm{Lbul}(A)$.

Доказательство. Импликация $1 \Longrightarrow 2$ следует из [2, теорема 3 пункта «Существование простых матриц над дистрибутивными решётками»].

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 1$. Предположим противное: матрица A факторизуема над решёткой P. Тогда существуют необратимые над решёткой P матрицы $B, C \in P^{n\times n}$, такие что $A = BC$.

Пусть Q — конечная булева подрешётка решётки P, порождённая элементами матриц A, B, C.

Решётка Q содержит подрешётку $\mathrm{Lbul}(A)$. Мы получили, что A — факторизуемая матрица над решёткой Q. Противоречие. □

Из теоремы 4.1 и следствия 4.1 получаем следующий результат.

Следствие 5.1. *Перманент каждой простой матрицы над булевой решёткой P равен единице $\tilde{1}$.* □

Матрица $\mathrm{SM}(n)$, $n \geqslant 3$,

$$\mathrm{SM}(n) = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \dots & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \dots & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \tilde{1} & \dots & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \dots & \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}$$

является простой над решёткой $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$.

Теорема 5.2. *Пусть булева решётка P содержит хотя бы один атом. Тогда над решёткой P существуют простые $(n \times n)$-матрицы для всех $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Для элементов $x \in P$ определим $(n \times n)$-матрицы

$$\mathrm{SM}(x, n) = \begin{pmatrix} \bar{x} & \dots & \tilde{0} & x & x \\ \tilde{0} & \dots & x & \tilde{0} & x \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ x & \dots & \tilde{0} & \bar{x} & x \\ x & \dots & x & x & \bar{x} \end{pmatrix}.$$

Пусть $n \geqslant 3$. Если x — атом решётки P, то $\mathrm{SM}(x, n)$ — простая матрица над решёткой P.

Действительно, по теореме 5.1 достаточно проверить, что матрица $\mathrm{SM}(x, n)$ проста над любой конечной булевой подрешёткой Q решётки P, содержащей подрешётку $L\big(\mathrm{SM}(x, n)\big) = \{\tilde{0}, x, \bar{x}, \tilde{1}\}$. Известно, что каждая конечная булева решётка является булеаном. Простота матрицы $\mathrm{SM}(x, n)$ следует из теоремы 4.1. $\square$

Литература

[1] Девадзе Х. М. Порождающие множества полугруппы всех бинарных отношений в конечном множестве // Докл. АН БССР. — 1968. — Т. 12, № 9. — С. 765—768.

[2] Маренич В. Е. Простые матрицы над дистрибутивными решётками // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 157—173.

[3] Сачков В. Н., Тараканов В. Е. Комбинаторика неотрицательных матриц. — М.: ТВП, 2000.

[4] Скорняков Л. А. Обратимые матрицы над дистрибутивными структурами // Сиб. мат. журн. — 1986. — Т. 27, № 2. — С. 182—185.

[5] Borosh J., Hartfiel D. J., Maxson C. J. Answers to questions posed by Richman and Schneider // Linear and Multilinear Algebra. — 1976. — Vol. 3. — P. 255—258.

[6] De Caen D. Prime Boolean matrices: M. Sci. Thesis, Queen's Univ., Kingston, Ontario, 1979.

[7] De Caen D., Gregory D. A. Prime Boolean matrices // Combinatorial Mathematics VII. Proc. 7th Aust. Conf., Newcastle, 1979. — Berlin: Springer, 1980. — (Lect. Notes Math.; Vol. 829). — P. 76—82.

[8] De Caen D., Gregory D. A. Primes in the semigroup of Boolean matrices // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — P. 119—134.

[9] Cho H. H. Prime Boolean matrices and factorizations // Linear Algebra Appl. — 1993. — Vol. 190. — P. 87—98.

[10] Cho H. H. Permanents of prime Boolean matrices // Bull. Korean Math. Soc. — 1998. — Vol. 35, no. 3. — P. 605—613.

[11] Giveon J. Lattice matrices // Inform. Control. — 1964. — Vol. 7. — P. 477—484.

[12] Gregory D. A., Pullman N. J. Prime Boolean matrices, a graph theoretic approach // Ars Combinatoria. — 1981. — Vol. 12. — P. 81—110.

[13] Gregory D. A., Pullman N. J. Semiring rank: Boolean rank and nonnegative rank factorization // J. Combin. Inform. Syst. Sci. — 1983. — Vol. 8, no. 3. — P. 223—233.

[14] Kim K. H. Boolean Matrix Theory and Applications. — New York: Marcel Dekker, 1982.

[15] Richman D. J., Schneider H. Primes in the semigroup of nonnegative matrices // Linear and Multilinear Algebra. — 1974. — Vol. 2. — P. 135—140.

[16] Tchuente M. On the Decomposition of Boolean Matrices. — Grenoble: Univ. of Grenoble, 1980.