О приложениях ассоциативности дуальных произведений алгебры булевых матриц

В. Б. ПОПЛАВСКИЙ
Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: poplavskivb@mail.ru

УДК 512.554+512.643

Ключевые слова: булевы матрицы, матричные уравнения, идемпотенты, регулярные элементы, классы Грина.

Аннотация

Рассматриваются матрицы произвольных размеров с элементами из произвольной булевой алгебры с двумя частичными умножениями, которые определяются дуальным образом и не являются ассоциативными относительно друг друга в общем случае. Показана связь разрешимости простейших матричных уравнений, регулярности матриц и принадлежности матриц главным односторонним идеалам с ассоциативностью некоторых дуальных произведений.

Abstract

V. B. Poplavski, On applications of associativity of dual compositions in the algebra of Boolean matrices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 181—192.

We consider matrices of arbitrary size with elements from an arbitrary Boolean algebra with two partial multiplications that are defined in a dual way and are not associative with respect to each other in the general case. We show the connection of solvability of the simplest matrix equations, the matrix regularity, and the belonging to one-sided principal ideals with associativity of some dual compositions.

1. Введение

Определение 1.1. *Булевой алгеброй* называют систему $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1\rangle$, где $\mathbf{B}$ — множество, $\cup\colon \mathbf{B}\times\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, $\cap\colon \mathbf{B}\times\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ — две бинарные операции, $'\colon \mathbf{B}\to\mathbf{B}$ — унарная операция, 0 и 1 — различные ($0\neq 1$) элементы из $\mathbf{B}$, такие что следующие тождества выполняются для любых $x, y, z\in\mathbf{B}$.

1.1. $x\cup y = y\cup x$.
1.2. $x\cap y = y\cap x$.
2.1. $(x\cup y)\cup z = x\cup(y\cup z)$.
2.2. $(x\cap y)\cap z = x\cap(y\cap z)$.
3.1. $x\cup(x\cap y) = x$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 181—192.

3.2. $x \cap (x \cup y) = x$.
4.1. $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.
4.2. $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$.
5.1. $x \cap 0 = 0$.
5.2. $x \cup 1 = 1$.
6.1. $x \cup x' = 1$.
6.2. $x \cap x' = 0$.

Назовём $\cup$ *объединением*, $\cap$ — *пересечением*, а $'$ — *дополнением*. Таким образом, объединение и пересечение — *коммутативные* (1.1 и 1.2), *ассоциативные* (2.1 и 2.2), удовлетворяющие законам *поглощения* (3.1 и 3.2) операции. Это означает, что $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap \rangle$ — *решётка*. Эта решётка *дистрибутивна* (4.1 и 4.2), обладает *нулём* (5.1) и *единицей* (5.2). Более того, эта решётка является *решёткой с дополнением* (6.1 и 6.2).

Пусть $\langle \mathbf{B}_{m\times n}, \cup, \cap, ', O, I \rangle$ — булева алгебра $(m \times n)$-матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap, ', 0, 1 \rangle$. Операции $\cup$, $\cap$, $'$ и, следовательно, отношение частичного порядка $\subseteq$ определяются для матриц поэлементно. Матрицы O и I, образованные целиком из нулей 0 и единиц 1 соответственно, дают нуль и единицу такой вторичной булевой алгебры.

На множестве булевых матриц одного размера структура полумодуля над булевым полукольцом строится естественным образом. Для матриц из $\mathbf{B}_{m\times n}$ объединение матриц $A \cup B = (A^i_j \cup B^i_j) \in \mathbf{B}_{m\times n}$ заменяет сложение, а пересечение $\lambda \cap A = (\lambda \cap A^i_j) \in \mathbf{B}_{m\times n}$ матрицы с элементом из булевой алгебры $\mathbf{B}$ — умножение на скаляр. Здесь A^i_j и B^i_j — 2элементы, стоящие в i-й строчке и j-м столбце матриц $A = (A^i_j)$ и $B = (B^i_j)$ соответственно.

Определение 1.2. Матрицу $C = A \sqcap B \in \mathbf{B}_{m\times k}$ с элементами

$$C^i_j = \bigcup_{t=1}^{n} (A^i_t \cap B^t_j)$$

назовём *конъюнктным произведением* матриц согласованных размеров $A = (A^i_j) \in \mathbf{B}_{m\times n}$ и $B = (B^i_j) \in \mathbf{B}_{n\times k}$. *Дизъюнктное произведение* $A \sqcup B$ определяется дуальным образом: $(A \sqcap B)' = A' \sqcup B'$ или $(A \sqcup B)' = A' \sqcap B'$.

Легко проверяется следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Если булевы матрицы A, B, C таких размеров, что операции умножения этих матриц определены, то имеют место следующие формулы*:

1) $A \sqcap (B \sqcap C) = (A \sqcap B) \sqcap C$;
2) $A \sqcap E = A$, $E \sqcap A = A$;
3) $A \sqcap O = O$, $O \sqcap A = O$;
4) $(A \sqcap B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \sqcap A^{\mathrm{T}}$;
5) $A \sqcap (B \cup C) = (A \sqcap B) \cup (A \sqcap C)$, $(A \cup B) \sqcap C = (A \sqcap C) \cup (B \sqcap C)$;
6) $A \sqcap (B \cap C) \subseteq (A \sqcap B) \cap (A \sqcap C)$, $(A \cap B) \sqcap C \subseteq (A \sqcap C) \cap (B \sqcap C)$.

Выполняются также дуальные правила:

1$'$) $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$;

2$'$) $A \sqcup E' = A$, $E' \sqcup A = A$;

3$'$) $A \sqcup I = I$, $I \sqcup A = I$;

4$'$) $(A \sqcup B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} \sqcup A^{\mathrm{T}}$;

5$'$) $A \sqcup (B \cap C) = (A \sqcup B) \cap (A \sqcup C)$, $(A \cap B) \sqcup C = (A \sqcup C) \cap (B \sqcup C)$;

6$'$) $A \sqcup (B \cup C) \supseteq (A \sqcup B) \cup (A \sqcup C)$, $(A \cup B) \sqcup C \supseteq (A \sqcup C) \cup (B \sqcup C)$.

Справедливы также следующие соотношения:

$$A \sqcap (B \sqcup C) \subseteq (A \sqcap B) \sqcup C, \quad (A \sqcup B) \sqcap C \subseteq A \sqcup (B \sqcap C). \tag{$*$}$$

Здесь $E = (\delta^i_j)$ — *единичная матрица соответствующего размера* (δ^i_j *принимает значение* 1, *если* $i = j$, *и значение* 0, *если* $i \neq j$), O *и* I — *определённые выше матрицы соответствующего размера*, A^{T} *означает транспонирование матрицы* A.

Пусть $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ обозначает множество всех матриц конечных размеров, т. е.

$$\mathbf{M}(\mathbf{B}) = \bigcup_{m,n \in \mathbf{N}} \mathbf{B}_{m \times n}.$$

Так как конъюнктное и дизъюнктное произведение являются ассоциативными, то $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ — частичные полугруппы. При этом соотношение $A \subseteq B$ влечёт $A \sqcap C \subseteq B \sqcap C$, $C \sqcap A \subseteq C \sqcap B$ и $A \sqcup C \subseteq B \sqcup C$, $C \sqcup A \subseteq C \sqcup B$, что следует из свойств 5) или 6), а также 5$'$) или 6$'$) предложения 1.1 соответственно. Дополнение булевых матриц, рассматриваемое как отображение $'\colon \langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle \to \langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$, в силу равенства $(A \sqcap B)' = A' \sqcup B'$ является изоморфизмом частичных полугрупп. Структура частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ в терминах идеалов изучалась в [2]. Здесь мы изучаем свойства алгебры $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap, \sqcup \rangle$, в которой равенства ($*$) $A \sqcap (B \sqcup C) = (A \sqcap B) \sqcup C$ или $A \sqcup (B \sqcap C) = (A \sqcup B) \sqcap C$ в общем случае не выполняются. Оказывается, что выполнение таких равенств для некоторых матриц, т. е. ассоциативность таких дуальных произведений, эквивалентна определённым свойствам этих булевых матриц.

В следующем разделе исследуются признаки совместности простейших матричных уравнений. Показано, в частности, что если уравнение $A \sqcap X = B$ совместно, то значение формулы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup B$ не зависит от расстановки в ней скобок, т. е. она является ассоциативной (см. теорему 2.2).

В разделе 3 исследуется совместность уравнения вида $A \sqcap X \sqcap B = C$. Основной результат раздела связан с регулярностью булевых матриц (теорема 3.2). Показано, в частности, что регулярность булевой матрицы A равносильна ассоциативности формулы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$.

В разделе 4 изучаются свойства произведений $A \sqcap A'^{\mathrm{T}}$, $A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$, $A^{\mathrm{T}} \sqcap A'$, $A' \sqcap A^{\mathrm{T}}$, $A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$, $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$, $A^{\mathrm{T}} \sqcup A'$, $A' \sqcup A^{\mathrm{T}}$, входящих в формулы основных теорем предыдущих разделов. Показано, что все они являются идемпотентами особого типа, названного вторичным, в соответствующих частичных полугруппах $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. Доказывается также, что порождаемость двумя матрицами одного и того же главного правого (левого) идеала частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ (или $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$) булевых матриц всевозможных размеров влечёт совпадение соответствующих им вторичных идемпотентов (теорема 4.4).

2. Совместность матричных уравнений

Следующее предложение является модифицированной формой результата, принадлежащего Р. Д. Льюсу [3, 4]. Показано, в частности, что неравенство $A \sqcap X \subseteq B$ всегда совместно для булевых матриц произвольных согласованных размеров A, B и X над произвольной булевой алгеброй. Далее будет удобно записывать матрицу $(A^{\mathrm{T}})' = (A')^{\mathrm{T}}$ как A'^{T}.

Теорема 2.1. *Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B и X выполняется следующие эквивалентности*:

$$A \sqcap X \subseteq B \leftrightarrow X \subseteq A'^{\mathrm{T}} \sqcup B,$$
$$X \sqcap A \subseteq B \leftrightarrow X \subseteq B \sqcup A'^{\mathrm{T}},$$
$$A \sqcup X \supseteq B \leftrightarrow X \supseteq A'^{\mathrm{T}} \sqcap B,$$
$$X \sqcup A \supseteq B \leftrightarrow X \supseteq B \sqcap A'^{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно проверить первую эквивалентность неравенств. Сделаем это поэлементно:

$$\begin{aligned} & A \sqcap X \subseteq B \leftrightarrow \\ & \quad \leftrightarrow (\forall\, i, j)\ \bigcup_k \{A^i_k \cap X^k_j\} \subseteq B^i_j \leftrightarrow (\forall\, i, j, k)\ A^i_k \cap X^k_j \subseteq B^i_j \leftrightarrow \\ & \quad \leftrightarrow (\forall\, i, j, k)\ X^k_j \subseteq (A^i_k)' \cup B^i_j \leftrightarrow (\forall\, i, j, k)\ X^k_j \subseteq \big((A^{\mathrm{T}})^k_i\big)' \cup B^i_j \leftrightarrow \\ & \quad \leftrightarrow (\forall\, k, j)\ X^k_j \subseteq \bigcap_i \big\{\big((A^{\mathrm{T}})^k_i\big)' \cup B^i_j\big\} \leftrightarrow X \subseteq (A^{\mathrm{T}})' \sqcup B. \end{aligned}$$

□

Замечание. Очевидно, это предложение обобщает на булевы матрицы известные и использованные прежде эквивалентности $a \cap x \subseteq b \leftrightarrow x \subseteq a' \cup b$ и $a \cup x \supseteq b \leftrightarrow x \supseteq a' \cap b$, которые справедливы для элементов a, b и x произвольной булевой алгебры.

Теорема 2.2. *Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B и неизвестной X выполняются следующие критерии совместности уравнений*:

$$(\exists\, X)\ A \sqcap X = B \leftrightarrow (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup B = A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup B) = B,$$
$$(\exists\, X)\ X \sqcap A = B \leftrightarrow B \sqcup (A'^{\mathrm{T}} \sqcap A) = (B \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A = B,$$
$$(\exists\, X)\ A \sqcup X = B \leftrightarrow (A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap B = A \sqcup (A'^{\mathrm{T}} \sqcap B) = B,$$
$$(\exists\, X)\ X \sqcup A = B \leftrightarrow B \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A) = (B \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup A = B.$$

Доказательство. Проверим первую эквивалентность. Пусть существует решение X уравнения $A \sqcap X = B$. Тогда $A \sqcap X \subseteq B$, что эквивалентно тому, что $X \subseteq A'^{\mathrm{T}} \sqcup B$. Умножая последнее неравенство слева на матрицу A и применяя $(*)$, получаем, что

$$B = A \sqcap X \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup B) \subseteq (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup B.$$

Заметим, что $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \subseteq E'$, так как каждый элемент главной диагонали квадратной матрицы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}}$ есть 0. Окончательно получаем, что

$$B = A \sqcap X \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup B) \subseteq (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup B \subseteq E' \sqcup B = B.$$

Таким образом,

$$A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup B) = (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup B = B.$$

С другой стороны, очевидно, из равенства $A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup B) = B$ следует разрешимость уравнения $A \sqcap X = B$.

Легко убедиться, что остальные эквивалентности получаются из первой, если использовать соответствующие свойства транспонирования и дополнения булевых матриц, а также свойства их дизъюнктных и конъюнктных произведений. □

Замечание. Если выполняется ассоциативность дуальных произведений некоторых матриц, например в форме $(A \sqcap B) \sqcup C = A \sqcap (B \sqcup C)$, то результат можно записать без скобок как $A \sqcap B \sqcup C$. В этом случае формулу мы будем называть ассоциативной. Такой же принцип будет соблюдаться ниже и для других формул.

Следствие 2.1. *Следующие условия эквивалентны и выполняются для любой булевой матрицы A произвольного размера*:

1) $A = A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A = A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$;
2) *формула $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$ является ассоциативной*;
3) *формула $A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$ является ассоциативной.*

Доказательство. Указанные равенства 1) следуют из теоремы 2.2 и того, что уравнения $A \sqcap X = A$ и $A \sqcup X = A$ всегда имеют решения $X = E$ и $X = E'$ соответственно.

Пусть формула $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$ ассоциативная. Тогда

$$A = A \sqcap E \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A) = (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup A \subseteq E' \sqcup A = A.$$

Следовательно, ассоциативность формулы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$ влечёт равенство $A = A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$. Аналогично ассоциативность формулы $A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$ влечёт равенство $A = A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$. □

Замечание. Так как уравнение $X \sqcap A = B$ по Льюсу [3] имеет решение тогда и только тогда, когда $B \subseteq (B \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A$, то последнее неравенство является необходимым и достаточным условием того, что равенство $B = B \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$ выполняется для матриц A и B.

3. Регулярность и ассоциативные формулы дуальных произведений

Теорема 3.1. *Для любых булевых матриц согласованных размеров A, B, C и неизвестной матрицы X следующие условия эквивалентны*:

1) *уравнение $A \sqcap X \sqcap B = C$ имеет решение*;
2) *при любой расстановке скобок выполняется равенство*

$$A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}} \sqcap B = C.$$

Доказательство. Из теоремы 2.1 и того, что уравнение $A \sqcap X \sqcap B = C$ имеет решение, следует, что $X \subseteq A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$C = A \sqcap X \sqcap B \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}}) \sqcap B.$$

Из того, что уравнение $A \sqcap X \sqcap B = C$ имеет решение, следует существование решения уравнения $Y \sqcap B = C$, получаем условия теоремы 2.2. Поэтому

$$C \sqcup (B'^{\mathrm{T}} \sqcap B) = (C \sqcup B'^{\mathrm{T}}) \sqcap B = C \sqcup B'^{\mathrm{T}} \sqcap B = C.$$

Используя опять то, что совместность уравнения $A \sqcap X \sqcap B = C$ влечёт совместность уравнения $A \sqcap Z = C$, получаем, что

$$(A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup C = A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup C) = A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup C = C.$$

Тогда, используя свойство $(*)$, получаем, что

$$\begin{aligned} C \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}}) \sqcap B \subseteq A \sqcap \Big(A'^{\mathrm{T}} \sqcup \big(C \sqcup (B'^{\mathrm{T}} \sqcap B)\big)\Big) \subseteq \\ \subseteq (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup \big(C \sqcup (B'^{\mathrm{T}} \sqcap B)\big) = (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup C \sqcup (B'^{\mathrm{T}} \sqcap B) = C. \end{aligned}$$

Аналогично

$$A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}}) \sqcap B = \big((A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}}\big) \sqcap B = \big((A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup C) \sqcup B'^{\mathrm{T}}\big) \sqcap B = C.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup \big((C \sqcup B'^{\mathrm{T}}) \sqcap B\big) = \big((A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup (C \sqcup B'^{\mathrm{T}})\big) \sqcap B \\ = \big(A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup C)\big) \sqcup (B'^{\mathrm{T}} \sqcap B) = A \sqcap \big((A'^{\mathrm{T}} \sqcup C) \sqcup (B'^{\mathrm{T}} \sqcap B)\big) = C. \end{aligned}$$

Из совместности уравнения $A \sqcap X \sqcap B = C$ мы получаем, что

$$A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}} \sqcap B —$$

ассоциативная формула и

$$A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}} \sqcap B = C.$$

Очевидно, что из равенства $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup C \sqcup B'^{\mathrm{T}} \sqcap B = C$ следует разрешимость уравнения $A \sqcap X \sqcap B = C$. □

Определение 3.1. Матрица A называется *регулярной* в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, если существует такая матрица X, что $A \sqcap X \sqcap A = A$.

Регулярность матриц в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ определяется аналогично.

Теорема 3.2. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *матрица A является регулярной в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$*;
2) *равенство $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A = A$ выполняется при любой расстановке скобок*;
3) *формула $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$ ассоциативная*;
4) *выполняется соотношение $A \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A$.*

Доказательство. То, что условия 1) и 2) эквивалентны, следует из теоремы 3.1.

Очевидно, что из 2) следуют условия 3) и 4).

Используя следствие 2.1, покажем, что из 3) следует условие 2):

$$A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A = A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup (A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A) = A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A = A.$$

Покажем, что из 4) следует условие 1). Из неравенства

$$A \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A,$$

учитывая свойство $(*)$, получаем, что

$$A \subseteq A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A \subseteq (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup A \sqcup (A'^{\mathrm{T}} \sqcap A) \subseteq E' \sqcup A \sqcup E' = A,$$

т. е.

$$A = A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A.$$

Следовательно, матрица A является регулярной. □

Замечание. Условие 4) в теореме 3.2 является обобщением результата Б. М. Шайна [5], полученного для бинарных отношений на произвольном множестве (в частности, для квадратных $(0,1)$-матриц), на частичную полугруппу $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ всевозможных матриц с элементами из произвольной булевой алгебры $\mathbf{B}$.

4. Вторичные идемпотенты и классы Грина

Теорема 4.1. *Квадратные матрицы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}}$, $A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$, $A^{\mathrm{T}} \sqcap A'$, $A' \sqcap A^{\mathrm{T}}$ являются идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$, а матрицы $A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$, $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$, $A^{\mathrm{T}} \sqcup A'$, $A' \sqcup A^{\mathrm{T}}$ — идемпотентами в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать это утверждение только для первой матрицы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}}$. С одной стороны, применяя $(*)$ и следствие 2.1, получаем, что

$$(A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \supseteq A \sqcap \left(A'^{\mathrm{T}} \sqcup (A \sqcap A'^{\mathrm{T}})\right) = A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) = A \sqcap A'^{\mathrm{T}}.$$

С другой стороны,

$$(A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \subseteq (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup E' = A \sqcap A'^{\mathrm{T}},$$

так как $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \subseteq E'$. □

Замечание. Из доказательства теоремы 4.1 сразу следует ассоциативность левой части равенства

$$A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcap A'^{\mathrm{T}} = A \sqcap A'^{\mathrm{T}}.$$

Аналогично

$$A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A \sqcup A'^{\mathrm{T}} = A \sqcup A'^{\mathrm{T}}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $i(A) = A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$ — некоторый идемпотент в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, порождённый матрицей A. Тогда*

$$i(A) = i(A) \sqcup \big(i(A)\big)'^{\mathrm{T}} = \big(i(A)\big)'^{\mathrm{T}} \sqcup i(A).$$

Доказательство. Имеем

$$i(A) \sqcup \big(i(A)\big)'^{\mathrm{T}} = (A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcup (A \sqcup A'^{\mathrm{T}})'^{\mathrm{T}} = (A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcup (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) = \\ = A \sqcup \big(A'^{\mathrm{T}} \sqcup (A \sqcap A'^{\mathrm{T}})\big) = A \sqcup A'^{\mathrm{T}} = i(A),$$

так как $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcap A'^{\mathrm{T}} = A'^{\mathrm{T}}$. Аналогично проверяется равенство $\big(i(A)\big)'^{\mathrm{T}} \sqcup i(A) = i(A)$. □

Теорема 4.3. *Для всякой идемпотентной в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ булевой матрицы D выполняется одно из двух следующих двух условий*:

1) $D \underset{\neq}{\subseteq} D \sqcup D'^{\mathrm{T}}$ *и* $D \underset{\neq}{\subseteq} D'^{\mathrm{T}} \sqcup D$;
2) $D = D \sqcup D'^{\mathrm{T}} = D'^{\mathrm{T}} \sqcup D$.

Доказательство. Пусть $D = D \sqcap D$, тогда из $(*)$ и неравенства $D \sqcup D'^{\mathrm{T}} \supseteq E$ следует, что

$$D \sqcup D'^{\mathrm{T}} = (D \sqcap D) \sqcup D'^{\mathrm{T}} \supseteq D \sqcap (D \sqcup D'^{\mathrm{T}}) \supseteq D \sqcap E = D.$$

Аналогично можно доказать соотношение $D \subseteq D'^{\mathrm{T}} \sqcup D$.

Предположим теперь, что $D = D \sqcup D'^{\mathrm{T}}$. Тогда $D = i(D)$, где i — определённое в теореме 4.2 отображение. Применяя результат теоремы 4.2, получаем, что $D = D \sqcup D'^{\mathrm{T}} = D'^{\mathrm{T}} \sqcup D$. □

Определение 4.1. Назовём идемпотент D частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ *первичным*, если выполняется условие $D \neq i(D)$, и *вторичным*, если $D = i(D)$, т. е. $D = D \sqcup D'^{\mathrm{T}} = D'^{\mathrm{T}} \sqcup D$.

Аналогичные условия определяют вторичные идемпотенты частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$: $D = D \sqcap D'^{\mathrm{T}} = D'^{\mathrm{T}} \sqcap D$.

Таким образом, из теорем 4.1 и 4.2 получаем, что любая булева матрица A порождает вторичные идемпотенты. Квадратные матрицы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}}$, $A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$, $A^{\mathrm{T}} \sqcap A'$, $A' \sqcap A^{\mathrm{T}}$ являются вторичными идемпотентами в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$, а матрицы $A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$, $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$, $A^{\mathrm{T}} \sqcup A'$, $A' \sqcup A^{\mathrm{T}}$ являются вторичными идемпотентами в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

Заметим, что матрица A представима в виде

$$A = A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A = A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$$

(следствие 2.1), т. е. является произведением данной матрицы и вторичного идемпотента, порождённого этой матрицей.

Следующий пример показывает существование первичных идемпотентов.

Пример 4.1. Матрица

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является первичным идемпотентом в $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$, так как

$$D \sqcap D = D, \quad D \sqcup D'^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq D'^{\mathrm{T}} \sqcup D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

также даёт пример первичного идемпотента, но для неё выполняется

$$F \sqcup F'^{\mathrm{T}} = F'^{\mathrm{T}} \sqcup F \neq F.$$

Определение 4.2. Скажем, что матрицы A и B с одинаковым количеством строк связаны бинарным отношением ε_{C}, если выполняются равенства $A = B \sqcap X$ и $B = A \sqcap Y$ для некоторых булевых матриц X и Y подходящего размера, т. е. A и B порождают один и тот же главный правый идеал в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ булевых матриц всевозможных размеров.

Матрицы с одинаковым количеством столбцов A и B находятся в отношении ε_{R}, если выполняются равенства $A = X \sqcap B$ и $B = Y \sqcap A$ для некоторых булевых матриц X и Y подходящего размера, т. е. A и B порождают один и тот же главный левый идеал в частичной полугруппе $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$.

Эквивалентности δ_{C}, δ_{R} на $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ определяются двойственным образом:

$$(A, B) \in \delta_{\mathrm{C}} \leftrightarrow (A', B') \in \varepsilon_{\mathrm{C}},$$
$$(A, B) \in \delta_{\mathrm{R}} \leftrightarrow (A', B') \in \varepsilon_{\mathrm{R}}.$$

Введённые бинарные отношения ε_{C}, ε_{R} и δ_{C}, δ_{R} на частичных полугруппах $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$ являются аналогами соответствующих эквивалентностей Грина $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ (см. [1,2]), причём ε_{R}, δ_{R} являются аналогами отношения Грина $\mathcal{L}$, а ε_{C}, δ_{C} — аналоги отношения Грина $\mathcal{R}$. Индексы «R» и «C» означают «row» и «column» соответственно.

Теорема 4.4. *Порождаемость матрицами одного и того же одностороннего главного идеала частичной полугруппы всевозможных булевых матриц влечёт совпадение соответствующих вторичных идемпотентов дуальных частичных полугрупп $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ и $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcup \rangle$. Точнее,*

1) *если $(A, B) \in \varepsilon_{\mathrm{C}}$ или $(A, B) \in \delta_{\mathrm{C}}$, то $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} = B \sqcap B'^{\mathrm{T}}$, $A \sqcup A'^{\mathrm{T}} = B \sqcup B'^{\mathrm{T}}$, $A' \sqcup A^{\mathrm{T}} = B' \sqcup B^{\mathrm{T}}$, $A' \sqcap A^{\mathrm{T}} = B' \sqcap B^{\mathrm{T}}$;*
2) *если $(A, B) \in \varepsilon_{\mathrm{R}}$ или $(A, B) \in \delta_{\mathrm{R}}$, то $A'^{\mathrm{T}} \sqcap A = B'^{\mathrm{T}} \sqcap B$, $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A = B'^{\mathrm{T}} \sqcup B$, $A^{\mathrm{T}} \sqcup A' = B^{\mathrm{T}} \sqcup B'$, $A^{\mathrm{T}} \sqcap A' = B^{\mathrm{T}} \sqcap B'$.*

Доказательство. Пусть $(A, B) \in \varepsilon_{\mathrm{C}}$. Тогда $A = B \sqcap X$ и $B = A \sqcap Y$ для некоторых булевых матриц X и Y. Согласно теореме 2.2 имеем, что $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup A = A$ и $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup B = B$. Следовательно, умножая равенство $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup A = A$ на A'^{T} справа и применяя $(*)$, получаем, что

$$A \sqcap A'^{\mathrm{T}} = (B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup A) \sqcap A'^{\mathrm{T}} = B \sqcap (B'^{\mathrm{T}} \sqcup A) \sqcap A'^{\mathrm{T}} \subseteq$$
$$\subseteq B \sqcap \big(B'^{\mathrm{T}} \sqcup (A \sqcap A'^{\mathrm{T}})\big) \subseteq (B \sqcap B'^{\mathrm{T}}) \sqcup (A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \subseteq (B \sqcap B'^{\mathrm{T}}) \sqcup E' = B \sqcap B'^{\mathrm{T}}.$$

Так же доказывается соотношение $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \subseteq A \sqcap A'^{\mathrm{T}}$, и следовательно, $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} = B \sqcap B'^{\mathrm{T}}$.

Очевидно, что из первого равенства следуют равенства $A \sqcup A'^{\mathrm{T}} = B \sqcup B'^{\mathrm{T}}$, $A' \sqcup A^{\mathrm{T}} = B' \sqcup B^{\mathrm{T}}$, $A' \sqcap A^{\mathrm{T}} = B' \sqcap B^{\mathrm{T}}$.

Пункт 2) доказывается аналогично. □

Следствие 4.1. *Если односторонний главный идеал частичной полугруппы всевозможных булевых матриц содержит в качестве порождающего элемента этого идеала вторичный идемпотент, то он единственный вторичный идемпотент среди порождающих этого идеала.*

Доказательство. Пусть $A = A \sqcup A'^{\mathrm{T}} = A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$ — вторичный идемпотент частичной полугруппы $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$. По теореме 4.4 если $B = B \sqcup B'^{\mathrm{T}} = B'^{\mathrm{T}} \sqcup B$ порождает тот же главный левый или правый идеал, то $A = B$. □

Следствие 4.2. *Если $(A, B) \in \varepsilon_{\mathrm{H}} = \varepsilon_{\mathrm{C}} \cap \varepsilon_{\mathrm{R}}$ или $(A, B) \in \delta_{\mathrm{H}} = \delta_{\mathrm{C}} \cap \delta_{\mathrm{R}}$, то все вторичные идемпотенты одного типа, порождённые матрицами A и B, совпадают.*

Пример 4.2. Легко проверяется, что для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

выполняются равенства $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup B = B$ и $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup A = A$. Следовательно, $(A, B) \in \varepsilon_{\mathrm{C}}$. Можно также показать, что $A = A \sqcap A'^{\mathrm{T}} = B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \neq B$.

Теорема 4.5.

1. *Матрица* A *и вторичный идемпотент* $A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$ *находятся в одном* ε_{C}*-классе частичной полугруппы всевозможных булевых матриц* $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ *тогда и только тогда, когда формула* $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$ *является ассоциативной. Если выполнено одно из этих эквивалентных условий, то любая матрица* B *из этого* ε_{C}*-класса является регулярной, формула* $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup B \sqcup B'^{\mathrm{T}}$ *— ассоциативной и выполняется равенство* $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup B \sqcup B'^{\mathrm{T}} = B \sqcup B'^{\mathrm{T}}$.
2. *Матрица* A *и вторичный идемпотент* $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A$ *находятся в одном* ε_{R}*-классе частичной полугруппы всевозможных булевых матриц* $\langle \mathbf{M}(\mathbf{B}), \sqcap \rangle$ *тогда и только тогда, когда формула* $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$ *является ассоциативной. Если выполнено одно из этих эквивалентных условий, то любая матрица* B *из этого* ε_{R}*-класса является регулярной, формула* $B'^{\mathrm{T}} \sqcup B \sqcup B'^{\mathrm{T}} \sqcap B$ *— ассоциативной и выполняется равенство* $B'^{\mathrm{T}} \sqcup B \sqcup B'^{\mathrm{T}} \sqcap B = B'^{\mathrm{T}} \sqcup B$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $(A, A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \in \varepsilon_{\mathrm{C}}$. Тогда, в частности, уравнение $A \sqcap X = A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$ имеет решение. По теореме 2.2 получаем, что выполняются соотношения

$$(A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}} = A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) = A \sqcup A'^{\mathrm{T}}.$$

Таким образом, формула $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$ является ассоциативной.

Пусть теперь формула $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$ является ассоциативной. Тогда, применяя следствие 2.1, перепишем её в виде

$$A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) = \big((A \sqcap A'^{\mathrm{T}}) \sqcup A\big) \sqcup A'^{\mathrm{T}} = A \sqcup A'^{\mathrm{T}}. \qquad (**)$$

Следовательно,

$$A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A = \big(A \sqcap (A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}})\big) \sqcap A = (A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \sqcap A = A. \quad (***)$$

Таким образом, из ассоциативности формулы $A \sqcap A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}}$ (или формулы $A'^{\mathrm{T}} \sqcup A \sqcup A'^{\mathrm{T}} \sqcap A$) следует, что матрица A является регулярной. Соотношения $(**)$ и $(***)$ показывают, что $(A, A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \in \varepsilon_{\mathrm{C}}$.

Пусть A и B принадлежат одному ε_{C}-классу. По теореме 4.4 получаем равенство их вторичных идемпотентов: $A \sqcup A'^{\mathrm{T}} = B \sqcup B'^{\mathrm{T}}$. Следовательно, из $(A, A \sqcup A'^{\mathrm{T}}) \in \varepsilon_{\mathrm{C}}$ следует, что $(B, B \sqcup B'^{\mathrm{T}}) \in \varepsilon_{\mathrm{C}}$. Тогда матрица B из этого ε_{C}-класса является регулярной, формула $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup B \sqcup B'^{\mathrm{T}}$ — ассоциативной и выполняется равенство $B \sqcap B'^{\mathrm{T}} \sqcup B \sqcup B'^{\mathrm{T}} = B \sqcup B'^{\mathrm{T}}$.

Утверждение 2 доказывается аналогично. □

Литература

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

[2] Поплавский В. Б. О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискрет. мат. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 42—60.

[3] Luce R. D. A note on Boolean matrix theory // Proc. Am. Math. Soc. — 1952. — Vol. 3. — P. 382—388.

[4] Rudeanu S. Boolean Functions and Equations. — Amsterdam: North-Holland; New York: Elsevier (1974).

[5] Schein B. M. Regular elements of the semigroup of all binary relations // Semigroup Forum. — 1976. — Vol. 13. — P. 95—102.