Разъяснение к «Rolling simplexes and their commensurability» (уравнения поля по Тихо Браге)

Ю. П. РАЗМЫСЛОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: pogudin.gleb@gmail.com

УДК 512.543.7+512.544.33+512.815.8+517.984.5+514.84

Ключевые слова: поле, декартова плоскость, аффинная карта, роллинг, несжимаемость, квадратичная кривая, фокус, директриса, гравитация, промера, прометрика, дифференциальная алгебра.

Аннотация

Обсуждаются восходящие к Р. Декарту модели центральных силовых полей, динамика которых квадратична. На этих примерах читатель постепенно подводится к пониманию базовых аспектов дифференциальной алгебро-геометрической теории Браге—Декарта—Уоттона, охватывающей центральные поля, динамику которых составляют плоские аффинные алгебраические кривые степени не выше N ($N = 1, 2, 3, \ldots$). При $N = 2$ обосновывается чисто алгебраическими средствами закон квадратично катящихся симплексов.

Abstract

Yu. P. Razmyslov, An explanation to "Rolling simplexes and their commensurability" (field equations in accordance with Tycho Brahe), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 193—215.

Various Cartesian models of central power fields with quadratic dynamics are studied. These examples lead the reader to comprehension of basic aspects of the differential algebraic-geometrical Brahe–Descartes–Wotton theory, which embraces central power fields whose dynamics is composed of flat affine algebraic curves of degree at most N ($N = 1, 2, 3, \ldots$). When $N = 2$, a quadratic rolling simplex law is proved by purely algebraic means.

Посвящается Роберту Гуку

Прилагаемые записки — не об основах космической навигации. И не об азах теории поля. Они написаны не для любителей научной фантастики. Но и не для «гордых ученых» (см. [1]). Они для тех, кто, вслед за мной, захочет их перечитать. Это мои размышления об образовании. О том, как и почему мы оказываемся там, где предназначено. Надеясь на будущее, скептически относясь к прошлому, принимая желаемое за действительное, одни осведомлены и

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 193—215.

знают (или так полагают), другие пытаются вычислить, что ждёт нас впереди. Я не беспристрастен. Мои симпатии всецело лежат на стороне Демокрита, Тихо Браге, Декарта, Кавендиша, Фарадея, Максвелла. Но я вынужден быть объективным.

Чистый, не знающий пределов разум есть само божество.

Гегель

Предложение (Т. Браге). *Для каждой хорды, проходящей через заданную точку внутри окружности, рассмотрим точку пересечения касательных к окружности в её концах. Все такие точки лежат на одной прямой.*

Доказательство (Р. Декарт). Существует проективное преобразование плоскости, переводящее окружность в себя, а точку пересечения хорд — в центр круга. □

Лемма о директрисе и фокусе. *Для любых действительных чисел* α, β, δ, γ *бесконечно гладкие решения* $x(t)$, $y(t)$ $(x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)\neq 0)$ *уравнения*

$$(x'',y'')=-\frac{\gamma}{(\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta)^3}\cdot(x-a,y-b)\quad(a,b\in\mathbb{R})$$

лежат на кривых второго порядка, у которых «фокус» расположен в точке (a,b), *а «директриса»* (*прямая из предложения Т. Браге*) *определяется уравнением* $\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta=0$.

Лемма о крокодиле, подавившемся яблоком. *Для любых действительных чисел* γ, α_1, β_1, α_2, β_2 $(\alpha_1\cdot\beta_2-\alpha_2\cdot\beta_1\neq 0)$ *бесконечно гладкие решения* $x(t)$, $y(t)$ $(x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)\neq 0)$ *уравнения*

$$(x'',y'')=\frac{-\gamma}{\sqrt{(\alpha_1\cdot x+\beta_1\cdot y)\cdot(\alpha_2\cdot x+\beta_2\cdot y)}^{\,3}}\cdot(x,y)$$

лежат на кривых второго порядка, касающихся прямых $\alpha_1\cdot x+\beta_1\cdot y=0$, $\alpha_2\cdot x+\beta_2\cdot y=0$.

Подвергай всё сомнению.

Р. Декарт

1. Картезиана: несколько примеров центральных полей, движение в которых происходит по кривым второго порядка

В трёхмерном аффинном пространстве «центростремительное» движение $\vec{R}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ вокруг точки O характеризуется в любой системе координат с центром $O\overset{\mathrm{def}}{=}(0,0,0)$ векторным уравнением $[\vec{R}(t),\vec{R}''(t)]=\vec{0}$, откуда получаем, что $\frac{d}{dt}([\vec{R}(t),\vec{R}'(t)])=\vec{0}$, т. е. $[\vec{R}(t),\vec{R}'(t)]=(i_1,i_2,i_3)$, где

$i_1, i_2, i_3 \in K$. Таким образом, кривая $\vec{R}(t)$ лежит в плоскости, задаваемой уравнением $i_1 \cdot x + i_2 \cdot y + i_3 \cdot z = 0$. Наши дальнейшие рассуждения будут касаться центральных полей на плоскости.

1.1. *Галилеевы поля — равноускоренное движение*: $x''(t) = g_x$, $y''(t) = g_y$ ($g_x, g_y \in K$). В этом случае точка O лежит на бесконечно удалённой прямой и соответствует направлению (g_x, g_y).

1.2. *Гармонический осциллятор*: $\big(x''(t), y''(t)\big) = -h \cdot \big(x(t), y(t)\big)$ ($h \in K$).

1.3. *Поля кулонова типа*:

$$\big(x''(t), y''(t)\big) = -\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k}{(r(t))^3} \cdot \big(x(t), y(t)\big) \quad (r^2 = x^2 + y^2, \quad k \in K).$$

1.4. *Поля птолемеева типа*. Классика жанра:

$$\big(x''(t), y''(t)\big) = -2 \cdot \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)}{x^2(t) + y^2(t) - \delta} \cdot \big(x(t), y(t)\big) \quad (\delta \in K).$$

В случае $\delta > 0$ ($\delta \in \mathbb{R}$) величина $r_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \delta^{1/2}$ называется *радиусом небесной сферы* (прототип радиуса Шварцшильда).

1.5. *Солнечный осциллятор* (*солнечный волнохрон*). Есть два эквивалентных способа описания полей такого типа в терминах дифференциальной алгебры S.

1. Система уравнений в прометриках (О. В. Ефимовская):

   (a) $\big(x''(t), y''(t)\big) = -\dfrac{\tau_S}{(\tau(t))^3} \cdot \big(x(t), y(t)\big) \quad \left(\tau_S \stackrel{\text{def}}{=} 4 \cdot \pi^2 \cdot \dfrac{k_{\mathrm{S}}}{c^3} \in K\right)$,

   (b) $|x^2(t), x(t) \cdot y(t), y^2(t), \tau^2(t)| = 0$ (уравнение прометрик),

   где k_{S} — постоянная Тихо Браге, c — скорость света.
2. Система уравнений в директрисах (О. В. Герасимова):

   (a) $\big(x''(t), y''(t)\big) = -\dfrac{\tau_S}{(\tau(t))^3} \cdot \big(x(t), y(t)\big) \quad \left(\tau_S \stackrel{\text{def}}{=} 4 \cdot \pi^2 \cdot \dfrac{k_{\mathrm{S}}}{c^3} \in K\right)$,

   (b) $(\vec{R}'(t), [\vec{R}''(t), \vec{R}'''(t)]) = 0$ (уравнение плоских волн).

1.6. Теорема. *Любое решение в аналитических функциях* $x(t)$, $y(t)$, $\tau(t)$ $(x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t) \neq 0)$ *уравнений* 1.5.1 *относительно комплексной переменной* t *удовлетворяет уравнению* 1.5.2, *и любое решение* 1.5.2 *в аналитических функциях удовлетворяет* 1.5.1. *В частности, каждая кривая* $\vec{R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(x(t), y(t), \tau(t)\big)$ *является плоской и содержится в некоторой кривой второго порядка.*

1.7. *E—G—H-универсум*. Соотношения 1.5.1, 1.5.2, определяющие дифференциальную алгебру S, допускают первые интегралы, при помощи которых алгебра S может быть представлена в более привычном виде.

1. s_0-*деформация*. Рассмотрим дифференциальную алгебру H_S, порождённую четырьмя образующими x, y, s, s_0 и соотношениями

$$s_0' = 0, \quad (x'', y'', s'') = -\frac{1}{\tau_S^2} \cdot \frac{1}{s^3(t)} \cdot (x, y, s - s_0) \quad \left(\tau_S \overset{\text{def}}{=} 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{k_{\mathrm{S}}}{c^3} \in K\right).$$

   Вложение $S/\operatorname{Rad} S \to H_S$ может быть задано на образующих: $x \to x$, $y \to y$, $\tau \to \tau_S{\cdot}s$ ($1/\tau_S$ имеет размерность частоты). Само собой разумеется, что эти уравнения задают квадратичную динамику.
2. *Чёрная точка* (*ускоритель Гарина—Гука*). Дифференциальная алгебра H_0 с соотношениями

$$(x'', y'', s'') = -\frac{1}{\tau_S^2} \cdot \frac{1}{s^3(t)} \cdot (x, y, s) \quad \left(\tau_S \overset{\text{def}}{=} 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{k_{\mathrm{S}}}{c^3} \in K\right),$$

   возникающими в случае $s_0 = 0$, достойна отдельного рассмотрения и изучения. В этом случае каждая кривая второго порядка проходит через свой «фокус», расположенный в начале координат.

1.8. *Выразимость дифференциальными соотношениями от двух переменных* (*без констант*) *двух условий: условия центральности и условия квадратичной динамики*. Рассмотрим две модели такого универсума при помощи формализма дифференциальной алгебры.

1. *Универсальная алгебра в сигнатуре y, t, d/dx*. Она задаётся двумя дифференциальными образующими t, y и соотношениями Декарта:

$$\text{(a)} \quad t_x'' \cdot (x \cdot y_x' - y) = t_x' \cdot x \cdot y_x''$$

   (условие центральности поля),

$$\text{(b)} \quad 9 \cdot y_x''''' \cdot (y_x'')^2 - 45 y_x'''' \cdot y_x''' \cdot y_x'' + 40 \cdot (y_x''')^3 = 0$$

   (условие квадратичной динамики).
2. *Квадратичный хаос Тихо Браге*: *универсальная модель центральных полей с квадратичной динамикой в естественной сигнатуре x, y, d/dt*. Зададим дифференциальную алгебру B_2 образующими x и y и двумя дифференциальными соотношениями типа Капелли:

$$\text{(a)} \quad \sigma_{0,2}(x, y) = 0$$

   (условие центральности поля),

$$\text{(b)} \quad b_2(x, y) = 0$$

   (условие квадратичной динамики), где

$$\sigma_{i,j}(x, y) \overset{\text{def}}{=} x^{(i)} \cdot y^{(j)} - x^{(j)} \cdot y^{(i)},$$

$$b_2(x, y) \overset{\text{def}}{=} -9 \cdot \sigma_{1,5} \cdot \sigma_{1,2}^2 - 45 \cdot \sigma_{2,4} \cdot \sigma_{1,2}^2 + 45 \cdot \sigma_{1,4} \cdot \sigma_{1,3} \cdot \sigma_{1,2} + {}$$
$$+ 90 \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{1,3} \cdot \sigma_{1,2} - 40 \cdot \sigma_{1,3}^3 =$$

$$= -9 \cdot \sigma_{1,2}''' \cdot \sigma_{1,2}^2 - 27 \cdot \sigma_{2,3}' \cdot \sigma_{1,2}^2 + 45 \cdot \sigma_{1,2}'' \cdot \sigma_{1,2}' \cdot \sigma_{1,2} + \\ + 45 \cdot \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{1,2}' \cdot \sigma_{1,2} - 40 \cdot (\sigma_{1,2}')^3.$$

Будем называть её алгеброй Тихо Браге.

До сих пор в своём изложении мы руководствовались голым разумом. Но слухи время от времени доходят до нас в новостях с берегов Темзы. Пора, презрев здравый смысл, погрузиться в их парадигму.

Туда, не зная куда, дойти может только один.
А. И. Кострикин

2. Реставрация: азы алгебраической теории Браге—Декарта—Уоттона

Все пути заканчиваются в одной точке. Название той точки — «избавление от иллюзий». В отчаянной попытке самоутвердиться каждое новое поколение заявляет, что оно поумнее предыдущих. Налицо все основания для оптимизма. За последние четыреста лет понятие «роллинг» [5] исчезло на всех стадиях математического образования. Работая с аффинной картой декартовой плоскости, геометры ввели «близкий» термин «дезаргова плоскость». Учебники по аналитической геометрии начинаются с формулы расстояния между двумя точками. Мера и промера не считаются более чем-то первичным. Они воспринимаются как нечто производное от метрики и прометрики. Вычисляются длины кривых и площади поверхностей, но никто не обращает внимания на то, что решения задач классической механики содержат отношения моментов, которые не зависят от выбора евклидовой метрики и системы аффинных координат. Веками игнорируется тот (лежащий на поверхности!) факт, что для всех центральных силовых полей в трёхмерном аффинном пространстве с квадратичной динамикой само движении реализует *закон квадратично катящихся симплексов*:

(a) $\vec{R}'' = -\Delta \cdot \vec{R}$,

(b) $9 \cdot \Delta''' \cdot \Delta^2 - 45 \cdot \Delta'' \cdot \Delta' \cdot \Delta + 40 \cdot (\Delta')^3 + 9 \cdot (\Delta)' \cdot (\Delta)^3 = 0$

($\Delta \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{R}', \vec{R}'']/[\vec{R}, \vec{R}']$). В результате идеи Т. Браге, Г. Уоттона, Р. Декарта, Р. Гука, преломившись в законах Кеплера, выродились в закон всемирного тяготения, который с чисто математической точки зрения не имел той степени общности, как разрабатываемые этими четырьмя исследователями модели. И это развитие новых метрических версий гравитационной теории остановить уже нельзя. Такие дела.

Так что вперёд.

Вперёд в будущее!

2.1. *«Тайны» центрально-квадратичного хаоса*. Зададим дифференциальную алгебру тремя образующими u, v и w и соотношениями

(a) $u'' = -w \cdot u, \quad v'' = -w \cdot v,$

(b) $9 \cdot w''' \cdot w^2 - 45 \cdot w'' \cdot w' \cdot w + 40 \cdot (w')^3 + 9 \cdot w' \cdot w^3 = 0.$

Будем называть её алгеброй Декарта—Уоттона. Оказывается, существует простая связь между D_2 и алгеброй Браге B_2.

Теорема. *Локализации $B_2[\sigma_{0,1}^{-1}(x,y)]$, $D_2[\sigma_{0,1}^{-1}(u,v)]$ алгебр B_2, D_2 по элементам $x \cdot y' - x' \cdot y$, $u \cdot v' - u' \cdot v$ соответственно дифференциально изоморфны.*

Доказательство. Будем обозначать $|f_1, f_2, \ldots, f_n|$ определитель Капелли—Вронского от $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Рассмотрим цепочку гомоморфизмов

$$E_2 \xrightarrow{\varepsilon_{-2}} G_2 \xrightarrow{\varepsilon_{-1}} B_2 \xrightarrow{\varepsilon_0} D_2 \xrightarrow{\varepsilon_1} B_2[(x \cdot y' - x' \cdot y)^{-1}] \xrightarrow{\varepsilon_2} D_2[(u \cdot v' - u' \cdot v)^{-1}],$$

где E_2 — дифференциальная алгебра квадратичной динамики с порождающими x и y и определяющим соотношением $|x^2, x \cdot y, y^2, x, y, 1| = 0$, а G_2 — редуцированная алгебра квадратичной динамики $\{x, y \mid b_2(x,y) = 0\}$ (см. 1.8.2). Непосредственная проверка показывает, что

$$|x^2, x \cdot y, y^2, x, y, 1| = 4 \cdot (x' \cdot y'' - x'' \cdot y') \cdot b_2(x,y).$$

Так как алгебра E_2 имеет счётную размерность, а алгебраически замкнутое поле $\mathbb{C}$ — континуальную мощность, то для любого ненильпотентного элемента $a \in E_2$ существует гомоморфизм $\psi\colon E_2 \to \mathbb{C}$, такой что $\psi(a) \neq 0$. Но для любого гомоморфизма $\psi\colon E_2 \to \mathbb{C}$ при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}\colon E_2 \to \mathbb{C}[[t]]$ степенной ряд $\tilde{\psi}\bigl(b_2(x,y)\bigr)$ равен нулю, а значит, нулю равен и его свободный член $\psi\bigl(b_2(x,y)\bigr)$. Таким образом, элемент $b_2(x,y)$ нильпотентен и лежит в радикале Джекобсона алгебры E_2. Стало быть, дифференциальные уравнения $|x^2, x \cdot y, y^2, x, y, 1| = 0$ и $b_2(x,y) = 0$ имеют одни и те же решения в следующих классах функций: 1) аналитические функции, 2) формальные степенные ряды, 3) бесконечно дифференцируемые функции. Отсюда, в частности, следует, что алгебра Браге B_2 задаёт (её соотношения определяют) универсальную модель центрального поля с квадратичной динамикой над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Гомоморфизмы

$$\varepsilon_0\colon B_2 \to D_2, \quad \varepsilon_1\colon D_2 \to B_2[\sigma_{0,1}^{-1}(x,y)]$$

алгебр B_2, D_2 определяются естественным образом на их образующих:

$$\varepsilon_0(x) \overset{\text{def}}{=} u, \quad \varepsilon_0(y) \overset{\text{def}}{=} v, \quad \varepsilon_1(u) \overset{\text{def}}{=} x, \quad \varepsilon_1(v) \overset{\text{def}}{=} y, \quad \varepsilon_1(w) \overset{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{1,2}(x,y)}{\sigma_{0,1}(x,y)}.$$

Корректность ε_0 можно установить, используя равенства

$$\sigma_{0,2}(u,v) = 0, \quad \sigma_{1,2}(u,v) = w \cdot \sigma_{0,1}(u,v), \quad w^2 \cdot \sigma_{0,1}(u,v) = \sigma_{2,3}(u,v),$$

которые в свою очередь напрямую следуют из соотношения (b) в определении D_2. Из соотношения $\sigma_{0,2}(x,y) = 0$ алгебры B_2 вытекают последовательно следующие равенства:

$$\sigma'_{0,1}(x,y) = 0, \quad \sigma_{0,1}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = -\sigma_{1,2}(x,y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$0 = \sigma'_{0,2}(x, y) = \sigma_{0,3}(x, y) + \sigma_{1,2}(x, y), \quad \sigma_{0,3}(x, y) = -\sigma_{1,2}(x, y),$$
$$\sigma_{0,1}(x, y) \cdot \sigma_{2,3}(x, y) = -\sigma_{1,2}(x, y) \cdot \sigma_{0,3}(x, y) = \sigma^2_{1,2}(x, y),$$

с помощью которых легко проверяется корректность ε_1.

Из того что

$$\sigma_{0,1}(u, v) \cdot w = \sigma_{1,2}(u, v) \in \varepsilon_0(B_2) \subset D_2,$$

следует, что локализации алгебр $\varepsilon_0(B_2)$, D_2 по $\sigma_{0,1}(u, v)$ совпадают. Теперь утверждение теоремы очевидно. □

2.1.1. Следствие. *Локализация $B_2[(x \cdot y' - x' \cdot y)^{-1}]$ алгебры Браге B_2 характеризуется соотношениями*

$$(x'', y'') = -\Delta \cdot (x, y), \quad 9 \cdot \Delta''' \cdot \Delta^2 - 45 \cdot \Delta'' \cdot \Delta' \cdot \Delta + 40 \cdot (\Delta')^3 + 9 \cdot (\Delta)' \cdot (\Delta)^3 = 0,$$

где

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} \frac{x' \cdot y'' - x'' \cdot y'}{x \cdot y' - x' \cdot y}.$$

2.1.2. Следствие. *Локализации $B_2[(x' \cdot y'' - x'' \cdot y')^{-1}]$, $D_2[(u' \cdot v'' - u'' \cdot v')^{-1}]$, $D_2[w^{-1}]$ являются областями целостности. Кроме того, степенные ряды $u(t), v(t), w(t) \in K[[t]]$, являющиеся формальным решением уравнений*

$$u'' = -w \cdot u, \quad v'' = -w \cdot v, \quad 9 \cdot w''' = w^{-2} \cdot (45 \cdot w'' \cdot w' \cdot w - 40 \cdot (w')^3 - 9 \cdot w' \cdot w^3),$$

сходятся в некоторой окрестности нуля поля K ($K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

2.2. *Проинтегралы: тензор Декарта—Гука.* Формулы не горят. Они имеют обыкновение восставать из пепла в самый неподходящий момент. Заполним квадратную симметричную матрицу H_2 размера 3×3 элементами из области целостности $D_2[w^{-1}]$, полагая

$$\begin{aligned}
&\mathrm{g}_{3,3} \overset{\text{def}}{=} -(u \cdot v' - u' \cdot v)^2 \cdot (4 \cdot (w')^2 - 3 \cdot w \cdot w'' + 9 \cdot w^3),\\
&\mathrm{g}_{3,2} = \mathrm{g}_{2,3} \overset{\text{def}}{=} (u \cdot v' - u' \cdot v) \cdot (-4 \cdot (w')^2 \cdot u' + 3 \cdot w \cdot w'' \cdot u' + 3 \cdot w' \cdot w^2 \cdot u),\\
&\mathrm{g}_{3,1} = \mathrm{g}_{1,3} \overset{\text{def}}{=} -(u \cdot v' - u' \cdot v) \cdot (-4 \cdot (w')^2 \cdot v' + 3 \cdot w \cdot w'' \cdot v' + 3 \cdot w' \cdot w^2 \cdot v),\\
&\mathrm{g}_{2,2} \overset{\text{def}}{=} 18 \cdot w^4 \cdot u^2 + 12 \cdot w' \cdot w^2 \cdot u \cdot u' + (u')^2 \cdot (18 \cdot w^3 + 6 \cdot w'' \cdot w - 8 \cdot (w')^2),\\
&\mathrm{g}_{1,1} \overset{\text{def}}{=} 18 \cdot w^4 \cdot v^2 + 12 \cdot w' \cdot w^2 \cdot v \cdot v' + (v')^2 \cdot (18 \cdot w^3 + 6 \cdot w'' \cdot w - 8 \cdot (w')^2),\\
&\mathrm{g}_{2,1} = \mathrm{g}_{1,2} \overset{\text{def}}{=} -\bigl(18 \cdot w^4 \cdot u \cdot v + 6 \cdot w' \cdot w^2 \cdot (u \cdot v' + u' \cdot v) +\\
&\quad + u' \cdot v' \cdot (18 \cdot w^3 + 6 \cdot w'' \cdot w - 8 \cdot (w')^2)\bigr).
\end{aligned}$$

Следующее утверждение показывает, что любая мыслимая модель центральных полей с квадратичной динамикой может быть получена как фактор-алгебра алгебры Декарта—Уоттона по первичному радикальному дифференциальному идеалу.

Теорема. *Область целостности $D_2[w^{-1}]$ и тензор H_2 обладают следующими свойствами*:

1) $H_2' = \big((10\cdot w')/(3\cdot w)\big)\cdot H_2$ *(в частности,* $f\cdot g' - f'\cdot g = 0$, $(f/g)' = 0$ *для любых двух элементов* f *и* g *матрицы* H_2);
2) $g_{1,1}\cdot u^2 + 2\cdot g_{1,2}\cdot u\cdot v + g_{2,2}\cdot v^2 + 2\cdot g_{1,3}\cdot u + 2\cdot g_{2,3}\cdot v + g_{3,3} = 0$;
3) *для любого собственного дифференциального идеала* I *в* $D_2[\sigma_{1,2}^{-1}(u,v)]$ *соответствующая фактор-алгебра содержит ненулевые элементы из множества* $g_{i,j}+I$ $(i,j=1,2,3)$ *и свойства* 1), 2) *выполняются (без вырождения) в любой фактор-алгебре* $(D_2[\sigma_{1,2}^{-1}(u,v)])/I$, *не содержащей делителей нуля.*

2.2.1. Следствие. *Каждый первичный однородный идеал подалгебры* $K[g_{i,j} \mid i,j=1,2,3]$ *может быть поднят до первичного радикального дифференциального идеала в* $D_2[\sigma_{1,2}^{-1}(u,v)]$.

2.2.2. Следствие. *Для любого решения* $u(t), v(t), w(t) \in K[[t]]$ $(u'\cdot v'' - u''\cdot v' \neq 0)$ *дифференциальных уравнений*

$$u'' = -w\cdot u,\quad v'' = -w\cdot v,\quad 9\cdot w''' = w^{-2}\cdot(45\cdot w''\cdot w'\cdot w - 40\cdot(w')^3 - 9\cdot w'\cdot w^3)$$

в формальных степенных рядах выполняются равенства

$$\frac{g_{i,j}(t)}{w^3(t)} = c_{i,j}\cdot w^{1/3}(t)$$

для некоторых $c_{i,j}\in K$ $(i,j=1,2,3)$.

Последнее утверждение объясняет, почему присоединение иррационального элемента $w^{1/3}$ к дифференциальной алгебре $D_2[\sigma_{1,2}^{-1}(u,v)]$ «вкладывает» квадратичный хаос Браге в универсум Гука (см. 1.7.1, 1.7.2).

2.3. *Центральные расширения локализаций* B_2, D_2. Рассмотрим наиболее примитивные идеи и способы, позволяющие игнорировать закон квадратично катящихся симплексов путём увеличения размерности фазового пространства.

2.3.1. *Пятимерная комплексная модель (разложение однородных форм от двух переменных на линейные множители).* Любой многочлен $f(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ степени не выше второй над алгебраически замкнутым полем может быть представлен в виде линейной комбинации однородных компонент:

$$1,\quad f_1(x,y) = z_0,\quad f_2(x,y) = z_{-1}\cdot z_1\quad (z_i \overset{\text{def}}{=} \alpha_i\cdot x + \beta_i\cdot y,\quad i = 0, \pm 1).$$

Отсюда следует, что каждую кривую второго порядка можно задать уравнением вида

$$\gamma\cdot z_{-1}\cdot z_1 + \alpha\cdot z_0 + \delta = 0$$

для некоторых линейных форм z_{-1}, z_0, z_1, а значит, интересующую нас универсальную центрально-квадратичную динамику на плоскости Oxy можно попробовать реализовать посредством дифференциальной алгебры M_{10} с шестью образующими

$$z_{-1},\quad z_{-1/2} \overset{\text{def}}{=} x,\quad z_0,\quad z_{1/2} \overset{\text{def}}{=} y,\quad z_1,\quad \Delta,$$

удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\text{(a)}\quad z_i'' = -\Delta \cdot z_i \quad \left(i = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\right)$$

(условие центральности поля в пятимерном пространстве),

$$\text{(b)}\quad |z_{-1} \cdot z_1, z_0, 1| = 0$$

(условие квадратичной динамики).

Из уравнения (a) стандартным образом можно получить десять первых интегралов вида $\sigma_{0,1}(z_i, z_j) = \text{const}$. (Действительно, $\sigma_{0,1}'(z_i, z_j) = (z_i \cdot z_j' - z_i' \cdot z_j)' = 0$.) Из тождества

$$\sigma_{0,1}(z_i, z_j) \cdot z_k + \sigma_{0,1}(z_j, z_k) \cdot z_i + \sigma_{0,1}(z_k, z_i) \cdot z_j = 0$$

следует, что

$$z_i = \frac{\sigma_{0,1}(z_i, y)}{\sigma_{0,1}(x, y)} \cdot x + \frac{\sigma_{0,1}(x, z_i)}{\sigma_{0,1}(x, y)} \cdot y \quad (i = 0, \pm 1)$$

в локализации $M_{10}[\sigma_{0,1}^{-1}(x, y)]$ алгебры M_{10} по элементу $x \cdot y' - x' \cdot y$. Отсюда следует, что

$$z_i(t) = \alpha_i \cdot x(t) + \beta_i \cdot y(t) \quad (i = 0, \pm 1)$$

для любого решения $z_i(t)$ ($i = 0, \pm 1/2, \pm 1$) уравнений (a) в формальных степенных рядах $\mathbb{C}[[t]]$.

Явный вид соотношения (b)

$$0 = |z_{-1} \cdot z_1, z_0, 1| = |(z_{-1} \cdot z_1)', z_0'| = (z_{-1} \cdot z_1)' \cdot (-\Delta \cdot z_0) - (2 \cdot z_1' \cdot z_{-1}' - 2 \cdot \Delta \cdot z_1 \cdot z_{-1}) \cdot z_0'$$

позволяет получить ещё два первых интеграла

$$\frac{(z_{-1} \cdot z_1)'}{z_0'} = -\beta, \quad z_{-1} \cdot z_1 - \frac{(z_{-1} \cdot z_1)'}{z_0'} \cdot z_0 = -\delta,$$

для которых $z_{-1} \cdot z_1 + \beta \cdot z_0 + \delta = 0$, и даёт возможность выразить Δ как рациональную функцию от z_{-1}, z_0, z_1 и их производных:

$$\Delta = \frac{2 \cdot z_{-1}' \cdot z_0' \cdot z_1'}{\sigma_{0,1}(z_{-1}, z_0) \cdot z_1 + \sigma_{0,1}(z_1, z_0) \cdot z_{-1}} = \\ = \frac{2 \cdot z_{-1}' \cdot z_1'}{z_{-1} \cdot z_1 + (z_{-1} \cdot z_1 - ((z_{-1} \cdot z_1)'/z_0') \cdot z_0)}$$

(см. для сравнения 1.4). Следовательно, локализация алгебры $M_{10}[\sigma_{0,1}^{-1}(x, y)]$ по элементу

$$2 \cdot z_0' \cdot z_1 \cdot z_{-1} - z_0 \cdot (z_{-1} \cdot z_1)' = \sigma_{0,1}(z_{-1}, z_0) \cdot z_1 + \sigma_{0,1}(z_1, z_0) \cdot z_{-1}$$

может быть охарактеризована одним векторным дифференциальным уравнением

$$(z_{-1}, x, z_0, y, z_1)'' = -\frac{2 \cdot z_{-1}' \cdot z_0' \cdot z_1'}{2 \cdot z_0' \cdot z_1 \cdot z_{-1} - z_0 \cdot (z_{-1} \cdot z_1)'} \cdot (z_{-1}, x, z_0, y, z_1),$$

сочетающим в себе как условие центральности в пятимерном аффинном пространстве, так и требование движения по кривым второго порядка.

Гомоморфизм

$$\varepsilon_{10}\colon D_2 \to M_{10}[(2\cdot z_0'\cdot z_1\cdot z_{-1} - z_0\cdot (z_{-1}\cdot z_1)')^{-1}]$$

однозначно задаётся на образующих u, v, w:

$$\varepsilon_{10}(u) \overset{\text{def}}{=} x, \quad \varepsilon_{10}(v) \overset{\text{def}}{=} y, \quad \varepsilon_{10}(w) \overset{\text{def}}{=} \Delta.$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить корректность такого определения ε_{10}.

2.3.2. *Четырёхмерная «действительная» модель* (*сопряжённые диаметры*). Пусть кривая второго порядка задана в аффинной системе координат Oxy уравнением

$$\mu_{11}\cdot x^2 + 2\mu_{12}\cdot x\cdot y + \mu_{22}\cdot y^2 + 2\alpha\cdot x + 2\beta\cdot y + \delta = 0,$$

где $\alpha\cdot x + \beta\cdot y \not\equiv 0$. Тогда существуют ненулевые однородные линейные формы

$$u \overset{\text{def}}{=} \alpha_u\cdot x + \beta_u\cdot y, \quad v \overset{\text{def}}{=} \alpha_v\cdot x + \beta_v\cdot y,$$

такие что в системе координат Ouv уравнение нашей кривой будет иметь вид

$$(u^2 + v) + \gamma v^2 + \delta_{u,v} = 0.$$

(В этом случае прямая $u = 0$ проходит через начало координат и центр кривой, а v с точностью до ненулевого множителя совпадает с $\alpha\cdot x + \beta\cdot y$.) Поэтому, аналогично предыдущему случаю, универсальная центрально-квадратичная динамика может быть описана при помощи дифференциальной алгебры M_8 с пятью образующими x, y, u, v, w, связанными соотношениями

$$\text{(a)}\quad z'' = -w\cdot z \quad (z \overset{\text{def}}{=} x, y, u, v)$$

(условие центральности в четырёхмерном пространстве),

$$\text{(b)}\quad |u^2 + v, v^2, 1| = 0$$

(условие квадратичной динамики).

Уравнения (a), как обычно, дают нам шесть первых интегралов вида $\sigma_{0,1}(z_1, z_2) = \mathrm{const}$ $(z_1, z_2 \overset{\text{def}}{=} x, y, u, v)$ и соотношения

$$u = \frac{\sigma_{0,1}(u,y)}{\sigma_{0,1}(x,y)}\cdot x + \frac{\sigma_{0,1}(x,u)}{\sigma_{0,1}(x,y)}\cdot y, \quad v = \frac{\sigma_{0,1}(v,y)}{\sigma_{0,1}(x,y)}\cdot x + \frac{\sigma_{0,1}(x,v)}{\sigma_{0,1}(x,y)}\cdot y$$

в локализации $M_8[\sigma_{0,1}^{-1}(x,y)]$ алгебры M_8 по элементу $x\cdot y' - x'\cdot y$. Отсюда следуют равенства

$$u(t) = \alpha_u\cdot x(t) + \beta_u\cdot y(t), \quad v(t) = \alpha_v\cdot x(t) + \beta_v\cdot y(t)$$

для любого решения $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ уравнений (a) в формальных степенных рядах $K[[t]]$ $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Из явного вида соотношения (b)

$$\begin{aligned}
0 &= |u^2+v, v^2, 1| = |(u^2+v)', (v^2)'| = \\
&= \begin{vmatrix} 2\cdot u\cdot u'+v' & 2\cdot v\cdot v' \\ 2\cdot(u')^2 & 2\cdot(v')^2 \end{vmatrix} - w\cdot \begin{vmatrix} 2\cdot u\cdot u'+v' & 2\cdot v\cdot v' \\ 2\cdot u^2+v & 2\cdot v^2 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 2\cdot u\cdot u'+v' & 2\cdot v\cdot v' \\ 2\cdot(u')^2 & 2\cdot(v')^2 \end{vmatrix} - w\cdot \begin{vmatrix} 2\cdot u\cdot u' & 2\cdot v\cdot v' \\ 2\cdot u^2 & 2\cdot v^2 \end{vmatrix} = \\
&= (4u'\cdot v'\cdot(u\cdot v'-u'\cdot v)+2(v')^3) - 4u\cdot v\cdot(u'\cdot v-u\cdot v')\cdot w
\end{aligned}$$

получаем ещё два (рациональных) первых интеграла

$$\frac{2\cdot u\cdot u'+v'}{2\cdot v\cdot v'} = -\gamma, \quad v\cdot\frac{v\cdot v'+2\cdot u\cdot(u\cdot v'-u'\cdot v)}{2\cdot v\cdot v'} = -\delta_{u,v},$$

для которых $(u^2+v)+\gamma\cdot v^2+\delta_{u,v}=0$, и рационально выражаем w через u, v и их производные:

$$w = \frac{u'\cdot v'\cdot(u\cdot v'-u'\cdot v)+(1/2)\cdot(v')^3}{u\cdot v\cdot(u'\cdot v-u\cdot v')}.$$

Следовательно, локализация алгебры $M_8[\sigma_{0,1}^{-1}(x,y)]$ по элементу $u\cdot v\cdot(u\cdot v'-u'\cdot v)$ описывается одним векторным дифференциальным соотношением

$$(u,v,x,y)'' = -\frac{u'\cdot v'\cdot(u\cdot v'-u'\cdot v)+(1/2)\cdot(v')^3}{u\cdot v\cdot(u'\cdot v-u\cdot v')}\cdot(u,v,x,y),$$

которое включает в себя условия центральности и квадратичной динамики (при этом случай гармонического осциллятора оказывается вне рассмотрения).

Гомоморфизм

$$\varepsilon_8\colon D_2 \to M_8[(u\cdot v\cdot(u\cdot v'-u'\cdot v))^{-1}]$$

однозначно задаётся на образующих u, v, w:

$$\varepsilon_8(u) \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad \varepsilon_8(v) \stackrel{\text{def}}{=} y, \quad \varepsilon_8(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u'\cdot v'\cdot(u\cdot v'-u'\cdot v)+(1/2)\cdot(v')^3}{u\cdot v\cdot(u'\cdot v-u\cdot v')}.$$

Проверку корректности такого определения этого отображения мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Не измышляйте сущностей сверх меры.
Уильям Оккам (ок. 1285—1349)

3. The history and the time: афера или заговор мастеров?

В 1634 году, проживая в Голландии, Рене Декарт, сотрудник действующего резерва гвардии его высокопреосвященства кардинала Ришелье, в письме к одному из своих корреспондентов так выразил своё кредо: «Чтобы жить хорошо, надо жить незаметно». Время было непростое. В воздухе, разумеется, не витали идеи, связанные с гиперболоидом инженера Гарина, — из уст в уста передавались слухи о женщине, летящей на помеле. Приходилось не только взаимодействовать и сотрудничать с представителями местных правоохранительных органов и прообразом будущей британской Интеллидженс сервис, но и ладить со спецслужбами святой инквизиции: доминиканцами, францисканцами, иезуитами, ведя постоянную просветительскую работу, в первую очередь не на подвластных последним территориях. Судьбы Коперника, Джордано Бруно, Галилея показывали, что плетью обуха не перешибить. Требовалось создание и воспитание и в науке, и в образовании кадров нового типа. Зрело понимание того, что сектантскими способами эту задачу не решить. Необходимы были институты. И на первом этапе реализации задуманного соответствующую часть проблемы взяли на себя специализированные колледжи и монастыри.

Это было время титанов. Философов-стратегов. Замысла грандиозного проекта, рассчитанного не на сиюминутную выгоду. На века. Упор делался не на изучение уже полученных результатов и истин, а на их переоткрытие в головах других, на усвоение разработанных и поиске новых методов исследования, благодаря чему многократно возрастало число их сторонников, для которых открытия становились не чужими, а своими. Тонко был учтён чисто психологический элемент: «Завоёванное в бою ценится дороже». Подлинные герои в соответствии с кредо не имели права высовываться, должны были оставаться в тени.

Обстоятельства благоприятствовали очередному прорыву, момент был удобным:

а) Кеплер уже опубликовал выводы наблюдений обсерватории Тихо Браге;
б) Декарт заложил и разработал основы аналитической геометрии, позволявшей перевести искусство геометрических рассуждений о свойствах кривых второго порядка в рутину численных и символьных вычислений;
в) он же возродил понятие силы как сущности, вызывающей ускорение.

Все сложилось само собой.

Открылась бездна звезд полна;
Звездам числа нет, бездне дна.
М. В. Ломоносов

3.1. *The bait: законы Кеплера.* Говорят, что простых решений не бывает. Вполне возможно. Но времена в результате длительной, кропотливой обработки экспериментальной базы рождают иногда наглядные модели, допускающие незамысловатую, адекватную формализацию и честную их интерпретацию.

О законах Кеплера сейчас можно узнать из школьных учебников.

3.1.1. *1-й закон.* Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится солнце.

3.1.2. *2-й закон.* Радиус-вектор, проведённый от солнца к планете, в равные промежутки времени заметает равные площади.

3.1.3. *3-й закон.* Квадраты времён обращения планет относятся между собой как кубы больших полуосей орбит.

3.2. *The hook: формализация.* Не так широко известно, что уже Аристотель знал, как устроены все проекции плоских сечений конуса вращения на ортогональную оси плоскость, проходящую через его вершину, а именно:

а) любая кривая второго порядка в этой плоскости с фокусом в вершине получается таким способом;

б) все проекции, не являющиеся прямыми или парами прямых, представляют собой кривые второго порядка с общим фокусом.

С введением в математический обиход основ аналитической геометрии стало возможным выражать подобные утверждения на языке алгебраических уравнений. Возьмём в качестве пробного конус вращения, задаваемый в евклидовой системе координат (x, y, r) уравнением $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Тогда для любой плоскости, определяемой равенством $r = \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta$, проекция на плоскость (x, y) сечения, выделяемого двумя этими уравнениями, будет при $\delta \neq 0$ нетривиальной кривой второго порядка:

$$x^2 + y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0.$$

3.2.1. *Интерпретация 1-го закона.* Все планеты двигаются по кривым второго порядка вида

$$x^2 + y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0 \quad (\delta \neq 0, \quad \alpha, \beta \in K).$$

Солнце находится в начале координат.

Упражнение. Доказать, что фокусное расстояние от солнца у такой кривой равно δ.

3.2.2. *Формализация 2-го закона.* В любой момент времени t радиус-вектор $\vec{R}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, проведённый из начала координат к планете, удовлетворяет равенству

$$[\vec{R}(t), \vec{R}'(t)] = \big(x(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y(t)\big) = \varkappa,$$

где $\varkappa \in K$. В частности, за любой промежуток времени Δt радиус-вектор $\vec{R}(t)$ заметает площадь, равную $(1/2) \cdot |\varkappa| \cdot \Delta t$, и

$$[\vec{R}(t), \vec{R}''(t)] = \big(x(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y(t)\big) = 0.$$

Аргументы в пользу адекватности такой трактовки второго закона хорошо известны и доступны студентам, владеющим элементами анализа в объёме первого курса. Однако ошибается тот, кто считает, что для такой интерпретации следует знать, что такое дифференцирование и интегрирование. (Во всяком случае в привычном для большинства смысле. В конце концов, всё можно списать на очередную гениальную догадку, ведь в семнадцатом веке писались утверждения и формулы покруче (см. 1.8.1).) Действительно, рассмотрим равномерно движущийся объект. Тогда любой наблюдатель в произвольной точке пространства вне прямой движения обнаружит, что радиус-вектор от него к объекту заметает в равные промежутки времени равные площади, а так как формула $(1/2)\cdot|x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)|$ площади треугольника, образованного векторами $\vec{R}(t)$, $\vec{R}'(t)$, относится к азам аналитической геометрии, то он получит формулы утверждения 3.2.2 и автоматически примет результаты о прямой как вполне правдоподобную гипотезу о равномерном (в смысле второго закона Кеплера) движении по любой кривой второго порядка. Его уверенность в правильности такого предположения подкрепит то, что при построении каждой точки кривой второго порядка, исходя из пяти её произвольных точек, а также касательных прямых в этих точках в аффинной карте декартовой плоскости (см. [5]) достаточно пользоваться только угольником и линейкой. Ну а роллинг, позволяющий конструктивно перекатывать треугольники, образованные векторами $\vec{R}(t_1)$, $\vec{R}'(t_1)$ и $\vec{R}(t_2)$, $\vec{R}'(t_2)$, друг в друга, завершит дело. Уж если школьник на вступительном экзамене на мехмат должен был уметь обосновывать элементарными средствами формулу площади сектора круга, то не нужно было иметь семь пядей во лбу, чтобы в семнадцатом веке и ранее проделать такую же работу для любого эллипса относительно произвольной его внутренней точки.

3.2.3. *Солнечная постоянная Тихо Браге.* Пусть a и b — большая и малая полуоси эллипса, а T — период обращения планеты вокруг солнца. Тогда для любых двух планет (i-й и j-й) согласно 3.1.3 выполняется равенство

$$\frac{a^3(i)}{a^3(j)}=\frac{T^2(i)}{T^2(j)},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{a^3(i)}{T^2(i)}=\frac{a^3(j)}{T^2(j)}.$$

Следовательно, отношение a^3/T^2 не зависит от номера планеты. Эту константу обозначим k_{S} и назовём *солнечной постоянной Т. Браге*. Теперь третий закон Кеплера можно переформулировать следующим образом.

3.2.4. Для любой планеты отношение куба большой полуоси эллипса, по которому она движется, к квадрату периода её обращения вокруг солнца равно солнечной постоянной k_{S}.

3.2.5. *The mystery of three laws:* $\varkappa^2/\delta=4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}$. Действительно, так как площадь эллипса равна $\pi\cdot a\cdot b$, то в силу 3.2.2 $T=(\pi\cdot a\cdot b)/(|\varkappa|/2)$. Но $a^3=k_{\mathrm{S}}\cdot T^2$ (см. 3.2.3), и $a^3=k_{\mathrm{S}}\cdot\big((\pi\cdot a\cdot b)/(|\varkappa|/2)\big)^2$, откуда следует, что $\varkappa^2=4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}\cdot(b^2/a)$. Но b^2/a — это фокусное расстояние в эллипсе, а в 3.2.1 (см. упражнение) было подмечено, что фокусное расстояние кривой $x^2+y^2-(\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\delta)^2=0$ равно δ, что и доказывает соотношение между δ, $\varkappa$ и k_{S}.

3.2.6. *Resume.* Полученная формула позволяет по геометрическим характеристикам траектории планеты вычислять через солнечную постоянную Тихо Браге важные динамическую характеристики её движения: скорость заметания площадей, период обращения, скорость в каждой точке.

3.3. *The trap: от постулатов формализма к уравнениям динамики по Кеплеру*. Представьте себе, что на временной оси в какой-то момент появляется Некто, который

а) пополняет привычную плоскость «идеальной» — бесконечно удалённой — прямой;

б) понимает, что такое проективное преобразование пополненной плоскости, и способен этим пользоваться;

в) вводит в научный обиход косоугольную систему координат и проводит в ней вычисления наравне с привычной — прямоугольной;

г) умеет в любой системе координат выражать уравнениями конус и плоскость в трёхмерном пространстве, прямую и касательную к эллипсу на плоскости;

д) открывает в классе рациональных функций от переменной t главный закон дифференциально-алгебраического формализма

$$\big(f(t)\cdot g(t)\big)' = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$$

и начинает трактовать термин «сила» как сущность, вызывающую только изменение скорости $v'(t)$;

е) догадывается и умеет обосновывать в частных случаях, что второй закон Кеплера равносилен тому, что вектор ускорения планеты направлен к солнцу;

ж) выводит формулу для вычисления площади треугольника в произвольной системе координат, доказывает инвариантность полученного выражения относительно роллинга, указывает геометрический способ перекатывания треугольников, натянутых на векторы $R(0)$, $R'(0)$ и $R(t)$, $R'(t)$ друг в друга, когда концы радиус-векторов $R(t) \overset{\text{def}}{=} \big(x(t), y(t)\big)$ лежат на кривой второго порядка.

Независимо от того, где на оси находится Декарт, сложившаяся ситуация подсказывает этому Никчёмному Некто, что неплохо бы было для наглядности найти коэффициент пропорциональности между коллинеарными векторами $R(t)$ и $R''(t)$, и он делает предварительный шаг.

3.3.1. *The first step: вычисление вектора скорости* $\vec{R}'(t)$. Эта процедура почти не отличается от выведения формулы касательной для кривой второго порядка. Кривая задаётся уравнением $x^2 + y^2 - (\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta)^2 = 0$, а её параметризация — уравнением $x(t)\cdot y'(t) - x'(t)\cdot y(t) = \varkappa$ (см. 3.2.1 и 3.2.2). Подвергнув обе части первого равенства преобразованию «штрих» (см. свойство д)), Некто получит систему двух уравнений для $x'(t)$ и $y'(t)$:

$$2\cdot x'(t)\cdot x(t) + 2\cdot y'(t)\cdot y(t) - 2\cdot\big(\alpha\cdot x'(t) + \beta\cdot y'(t)\big)(\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta) = 0,$$
$$x(t)\cdot y'(t) - x'(t)\cdot y(t) = \varkappa.$$

Решить её Никчёмному Некто труда не составит:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{-\varkappa}{\delta \cdot d(t)} \cdot \begin{pmatrix} y(t) - \beta \cdot d(t) \\ -x(t) - \alpha \cdot d(t) \end{pmatrix}, \tag{$*$}$$

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) + \delta \quad (d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)).$$

При этом он, в отличие от нас, уже знает, что прямая, задаваемая уравнением $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta = 0$, — это «директриса» кривой $x^2 + y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0$, и трактует её в духе предложения Т. Браге.

3.3.2. *The second step: вычисление вектора ускорения* $\vec{R}''(t)$. Набив руку на первом шаге в манипулировании «штрихом», Некто Никчёмный «продифференцирует» обе части равенства $(*)$ и, используя его ещё раз для исключения из правой части вновь полученных равенств $x'(t)$, $y'(t)$, $d'(t)$, легко получит соотношения

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \frac{-\varkappa^2}{\delta} \cdot \frac{1}{d^3(t)} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) + \delta \quad (d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)).$$

3.3.3. *In the grip of the formalism: уравнения динамики по Кеплеру*. В силу третьего постулата (см. 3.2.3, 3.2.4) отношение $\varkappa^2/\delta$ отличается от солнечной постоянной на числовой множитель $4 \cdot \pi^2$. Поэтому можно переписать последние равенства в виде

$$\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k_{\mathrm{S}}}{r^3(t)} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

где $r(t) = \bigl(x^2(t) + y^2(t)\bigr)^{1/2}$.

3.3.4. *Intelligence and mind: соотношения Н. Никчёмного*. Приверженец косоугольной системы координат постарается выйти за рамки постулатов формализма 3.2.1—3.2.4 и сделает третий шаг. Он попытается вычислить вектор центростремительного ускорения для любой кривой второго порядка, заданной уравнением

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b \cdot y + c = 0,$$

и неизбежно получит соотношения

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -\varkappa^2 \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{12} & a_{22} & b \\ a & b & c \end{pmatrix}}{(a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c)^3} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

При $c \neq 0$ квадратичную кривую можно задать уравнением

$$\mu_{11} \cdot x^2 + 2\mu_{12} \cdot x \cdot y + \mu_{22} \cdot y^2 - (\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \delta)^2 = 0.$$

Тогда предыдущие равенства примут вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{-\varkappa^2}{\delta} \cdot \det \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{12} & \mu_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{d^3(t)} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

где

$$d(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot y(t) + \delta \quad (d^2(t) = \mu_{11} \cdot x^2(t) + \mu_{12} \cdot x(t) \cdot y(t) + \mu_{22} \cdot y^2(t)).$$

3.3.5. *Girl dreams: сверхскорости, НЛО, летающие тарелки, гравитолёты, параболоид инженера Гарина, помело... $\pm$ фокусировки плоских волн.* Объект сбрасывает скорость и внезапно «материализуется» на экране локатора, затем, описывая дугу, ускоряется и исчезает, не достигнув края дисплея. Знакомая картина, не правда ли? Памятуя об истине, что незнание начинается до науки, а невежество после неё, я не стану давать какую-либо физическую интерпретацию последним формулам ускорения, а ограничусь сухой констатацией факта.

Теорема (Н. Никчёмный). *Для любых аналитических решений* $x(t)$, $y(t)$ $(\dim_K\bigl(K \cdot x(t) + K \cdot y(t)\bigr) = 2)$ *(действительного или комплексного переменного) уравнений* 1.8.2, *задающих квадратичный хаос Тихо Браге, справедливы равенства*

$$\frac{x''(t)}{x(t)} = -\frac{x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)}{x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)} = \frac{y''(t)}{y(t)},$$

а при $\dim_K\bigl(K \cdot x'(t) + K \cdot y'(t)\bigr) = 2$ *линейные подпространства*

$$K \cdot 1 + K \cdot x(t) + K \cdot y(t) + K \cdot \left(\frac{x(t)}{x''(t)}\right)^{1/3},$$

$$K \cdot x^2(t) + K \cdot x(t) \cdot y(t) + K \cdot y^2(t) + K \cdot \left(\frac{x(t)}{x''(t)}\right)^{2/3}$$

не более чем трёхмерны.

3.4. *The trick: от уравнений динамики к постулатам формализма.* Второй постулат более чем очевиден:

$$\bigl(x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)\bigr)' = [R(t), R'(t)]' =$$
$$= x(t) \cdot y''(t) - y(t) \cdot x''(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot k_{\mathrm{S}} \cdot [R(t), R(t)] = 0.$$

(Мне не доводилось встречать учёного, который при решении дифференциальных уравнений после получения первых интегралов попытался начать в моём присутствии их дифференцировать. Трудно сказать, как я бы оценил подобную ситуацию. Возможно, что я счёл бы его идиотом.) Умножим обе части равенства

$$\bigl(x''(t), y''(t)\bigr) = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k_{\mathrm{S}}}{r^3(t)} \cdot \bigl(x(t), y(t)\bigr) \quad \Bigl(r(t) = \bigl(x^2(t) + y^2(t)\bigr)^{1/2}\Bigr)$$

скалярно на вектор $\vec{R}'(t) = \bigl(x'(t), y'(t)\bigr)$. Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot (x'(t)^2 + y'(t)^2)' = \left(\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot k_{\mathrm{S}}}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}\right)'$$

и

$$\frac{1}{2}\cdot(x'(t)^2+y'(t)^2)-\left(\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{r(t)}\right)=E\quad\bigl(E\in K,\quad r(t)\overset{\mathrm{def}}{=}\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}\bigr).$$

(Студента, который начнёт дифференцировать на экзамене в изученной вдоль и поперёк ситуации выведенные им первые интегралы, вряд ли дослушают до конца. Возможность получения им отличной оценки кажется мне крайне проблематичной.) Воспользуемся комбинаторным соотношением Клеро

$$(x')^2+(y')^2=\left(\frac{x\cdot x'+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{x\cdot y'-x'\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2=\left(\bigl(\sqrt{x^2+y^2}\bigr)'\right)^2+\frac{\varkappa^2}{x^2+y^2}$$

и перепишем равенство с буквой E следующим образом:

$$\frac{1}{2}\cdot\bigl(r'(t)\bigr)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa^2}{r^2(t)}-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{r(t)}=E.$$

Фортуне было угодно пролететь мимо меня дважды: независимо друг от друга, с разницей в двенадцать лет, две студентки попытались на моих глазах продифференцировать обе части этого равенства:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\bigl(r'(t)\bigr)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varkappa^2}{r^2(t)}-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{r(t)}\right)'=(E)'.\qquad(**)$$

Гром среди ясного неба. Самый разумный путь к цели. Обходятся все расставленные ловушки и соблазны: уничтожается горячо любимый физиками и столь дорогой сердцу механиков символ E. (Есть более короткий путь в обход E. Для этого надо просто продифференцировать комбинаторное соотношение Клеро.)

3.4.1. *Замечание.* Тогда я не был знаком с народной мудростью, что умную женщину от дуры не отличишь. Признаюсь, в голову лезла более радикальная оценка происходящего. Но я взял себя в руки и направил дальнейшее обсуждение вопроса в привычное русло. Удивительная вещь — наша память. В ней ничего не пропадает. В какой-то момент нужное (и ненужное) возникает в ней с поразительной ясностью. Я припомнил случившееся пару лет назад, когда обдумывал проблему раскрытия параметров и классификации полей в обобщённом хаосе Тихо Браге. Утверждение 1.6 и уравнения 1.7.1, 1.7.2 мною уже были получены, и я постоянно к ним возвращался. В очередной раз что-то замкнулось, и равенство (∗∗) мне показалось очень знакомым. В голову закралась крамольная мысль: «А какова во всём этом роль уравнения $x^2+y^2=r^2$; может быть, евклидова метрика — это всего лишь удобный способ подсчёта отношения двух ориентированных площадей $\bigl(x'(t)\cdot y''(t)-y'(t)\cdot x''(t)\bigr)/\bigl(x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t)\bigr)$?»

3.4.2. *Подведение итогов и сбор урожая.* Равенство (∗∗) можно переписать следующим образом:

$$\left(r(t)-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{\varkappa^2}\right)''=-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{r^3(t)}\cdot\left(r(t)-\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{\varkappa^2}\right),$$

и перед нами возникает знакомая ситуация (см. 1.7.1)

$$\left(x(t), y(t), r(t) - \frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{\varkappa^2}\right)'' = -\frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{r^3(t)}\cdot\left(x(t), y(t), r(t) - \frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{\varkappa^2}\right),$$

где вектор ускорения $\big(x''(t), y''(t), r''(t)\big)$ коллинеарен вектору $(x(t), y(t), r(t) - -(4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}})/\varkappa^2)$ и направлен всё время в одну точку $(0, 0, (4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}})/\varkappa^2)$. Следовательно, кривая $\big(x(t), y(t), r(t)\big)$ является плоской и соответствующая плоскость проходит через точку $(0, 0, (4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}})/\varkappa^2)$. Поэтому $r(t) - \delta = \alpha\cdot x + \beta\cdot y$ (для подходящих $\alpha, \beta \in K$ и $\delta = (4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}})/\varkappa^2$), что вместе с равенством $r^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ приводит к соотношениям

$$x^2(t) + y^2(t) = (\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta)^2, \quad \delta = \frac{4\cdot\pi^2\cdot k_{\mathrm{S}}}{\varkappa^2},$$

которые выражают первый и третий постулаты формализма соответственно.

3.5. *An odd fish: второе озарение.* Хорошо известно, что Ньютон был сторонником геометрической оптики и придерживался корпускулярного взгляда на природу возникновения света. Он резко выступал против теории эфира и вихрей Декарта. Согласно его воззрениям, частица света должна лететь равномерно по естественной геодезической в трёхмерном (аффинном декартовом!) пространстве с огромной, но постоянной скоростью. Можно только догадываться, какой шок должен был испытать Ньютон к концу жизни, когда первым, опередив на три века своё время, попытался заменить пробный конус $x^2+y^2-r^2=0$ на световой $x^2+y^2-c^2\cdot\tau^2=0$.

3.5.1. *Emotions.*

До сих пор мы все, Ньютон,
Чтим тебя, твой сан, твой дом.
Разве мог подумать он,
Что навек займёт свой трон?

Да конечно, всё при нём:
Массы, сила и закон.
Дыр не видно, спору нет:
Метрикой прикрыт проект,
Фокус сунули в просвет,
Директрису под запрет...

Но сквозит, сквозит проём —
Меру надо знать во всём!
Ведь ходить одним путём
Все равно что днём с огнём —
Ну ни капли мысли в том.

Роллинг есть, и вихрем он
Сквозь эфир струит в объём
Разум, волю, дух, подъём,

Мирозданий новых сонм,
Превращая билдинг в лом.

***

Полем метрику чуть ткни,
В меру карту подцепи,
И тогда уж не вернуть,
Мир, что удалось проткнуть...

3.5.2. *Мастерство не пропьёшь*. Так гласит дворовая мудрость. Но его и не передашь. Уходит человек, и это уходит вместе с ним. Остаются последователи и ремесло. Надо отдать должное Ньютону, который, в отличие от Платона, уничтожавшего физические экземпляры философских идей Демокрита, всемерно способствовал переизданию трудов Декарта (1596—1650). Были опубликованы «Правила для руководства ума» (изд. 1701), «Мир, или Трактат о свете» (изд. 1664), «Начала философии» (1644), «Размышления о первой философии» (1641), «Геометрия» (1637). Ну а о том, что ещё содержалось в записях, переданных Декартом своим коллегам-корреспондентам[1] мы, по-видимому, никогда больше не узнаем[2].

3.6. *Improvements and developments: от Тихо Браге и Декарта через Фарадея и Максвелла в дебри по римановой геометрии*. Отправная точка другого научного прорыва в математике и механике характеризуется двумя утверждениями. Первое было сделано Больцманом и касалось электромагнитной природы происхождения массы электрона. Второе связано с именем Пуанкаре, подметившего, что вторую группу уравнений Максвелла, выражающую отсутствие магнитных токов и зарядов, можно интерпретировать как коцикл, и указавшего, что эти уравнения выражаются на языке четыре-порождённых метабелевых алгебр Ли, определяемых такими коциклами, а гамильтонов формализм для динамики движения заряженной частицы в электромагнитном поле восстанавливается деформацией[3] универсальной обёртывающей после расщепления (см. [7]) метабелевой алгебры Ли по естественной возрастающей фильтрации.

Начало этого этапа завершается с введением электромагнитного потенциала и созданием Минковским и Пуанкаре основ релятивистской механики, в которой привычные гамильтонианы классического параболического типа заменяются релятивистскими — гиперболическими.

[1]Henry Wotton: «There is no such thing as a good influence, Mr. Gray. All influence is immoral. Immoral from the scientific point of view. The aim of life is self development. That is what each of us is here for» (The portrait of Dorian Gray).

[2]Генри Уоттон: «Посол — это муж добрый, отправленный на чужбину, дабы там лгать во благо своего отечества» (История дипломатии. Т. 1. М., ОГИЗ, 1941).

[3]Именно в этом месте была оставлена широко распахнутой калитка, за которой открывался путь к новой существенно некоммутативной теории — квантовой механике, в которой классические параболические гамильтонианы обрели вторую жизнь. Эта возможность намного опередила своё время, так как содержала соотношения Гейзенберга как важный, но весьма частный случай в классе метабелевых лиевых алгебр.

Дальнейшая экспансия этого направления происходила в полном соответствии с тремя принципами успешного менеджмента в науке и образовании:

1) когда науке не хватает аргументов, она расширяет свой словарь;
2) уродливые факты убивают красивые гипотезы;
3) всему своё время.

3.7. *Jackpot*. В частности, остался невостребованным формализм Г. Вейля, предложившего использовать соотношения Капелли не только для сепарирования различных классов траекторий (см. 1.5.1, 1.5.2 и 1.8.1, 1.8.2), но и для отыскания разумных типов гамильтонианов в безбрежном океане разрабатываемых теорий.

Следуя за ним (см. [1]), мы оставим «горный массив топологии» и дебри римановой геометрии вместе с теориями струн, суперструн, космогоний и вернёмся с небес (см. пионерскую работу [6]) к нашим героиням-студенткам.

(Кстати о помеле. Судьбы обеих в дальнейшем сложились вполне благополучно. Первая из них защитила диссертацию по серии работ о волчке (см. [4]). Второй мы обязаны альтернативной (более чем простой) квантово-механической моделью энергетических уровней атома водорода (см. [2, 3]).)

3.8. *Va banque: the differential-combinatorial glamour of an affine algebraic quadratic curve*. Из теоремы Н. Никчёмного следует, что для любых разумных решений $x(t)$, $y(t)$ уравнений 1.8.2, задающих квадратичный хаос Тихо Браге, должно выполняться равенство

$$\det\begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) & d'(t) \\ x''(t) & y''(t) & d''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & d'''(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t)}\right)^{-1/3}.$$

Из уравнений О. В. Герасимовой (см. 1.5.2, 1.6, 1.7) следует, что справедливо и обратное утверждение.

3.8.1. Теорема Герасимовой—Никчёмного. *Пусть аналитические функции $x(t)$, $y(t)$ таковы, что размерность подпространства $K\cdot x'(t)+K\cdot y'(t)$ равна двум. Тогда они являются решениями уравнений 1.8.2, задающих квадратичный хаос Тихо Браге, тогда и только тогда, когда для $x(t)$, $y(t)$ выполняются равенства*

$$x(t)\cdot y''(t) - x''(t)\cdot y(t) = 0,$$

$$\left| x'(t), y'(t), \left(\left(\frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t)}\right)^{-1/3}\right)' \right| = 0.$$

В связи с этой теоремой стоит отметить один результат, допускающий простую геометрическую интерпретацию.

3.8.2. Лемма (О. В. Герасимова). *Для любых действительных чисел* α, β, δ, γ *каждое бесконечно дифференцируемое решение* $x(t)$, $y(t)$ $(x(t)\cdot y'(t) - x'(t)\cdot y(t) \neq 0)$ *системы уравнений*

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{(\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta)^3}\cdot\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

лежит на своей кривой второго порядка, фокус которой находится в точке (a, b), *а директриса в смысле предложения Т. Браге определяется уравнением* $\alpha\cdot x + \beta\cdot y + \delta = 0$.

3.8.3. Теорема Ефимовской—Никчёмного. *Пусть аналитические функции* $x(t)$, $y(t)$ *таковы, что размерность подпространства* $K\cdot x'(t) + K\cdot y'(t)$ *равна двум. Тогда они являются решениями уравнений* 1.8.2, *задающих квадратичный хаос Тихо Браге, тогда и только тогда, когда для* $x(t)$, $y(t)$ *выполняются равенства*

$$x(t)\cdot y''(t) - x''(t)\cdot y(t) = 0,$$

$$\left| x^2(t), x(t)\cdot y(t), y^2(t), \left(\frac{x'(t)\cdot y''(t) - y'(t)\cdot x''(t)}{x(t)\cdot y'(t) - y(t)\cdot x'(t)}\right)^{-2/3} \right| = 0.$$

Здесь уместно отметить очень любопытный частный случай этой теоремы, известный, по-видимому, основоположникам теории ещё до Роберта Гука.

3.8.4. Лемма. *Для любых действительных чисел* γ, α_1, β_1, α_2, β_2 $(\alpha_1\cdot\beta_2 - \alpha_2\cdot\beta_1 \neq 0)$ *каждое бесконечно дифференцируемое решение* $x(t)$, $y(t)$ $(x(t)\cdot y'(t) - x'(t)\cdot y(t) \neq 0)$ *системы уравнений*

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = -\frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha_1\cdot x + \beta_1\cdot y)\cdot(\alpha_2\cdot x + \beta_2\cdot y)}^3}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

лежит на своей кривой второго порядка, касающейся обеих прямых, определяемых равенствами $\alpha_1\cdot x + \beta_1\cdot y = 0$, $\alpha_2\cdot x + \beta_2\cdot y = 0$.

3.8.5. *Ключевое уравнение центрально-квадратичной динамики.* Из любой из теорем 3.8.1, 3.8.3 непосредственно выводится, что отношение

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x'\cdot y'' - x''\cdot y'}{x\cdot y' - x'\cdot y}$$

удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$9\cdot\Delta'''\cdot\Delta^2 - 45\cdot\Delta''\cdot\Delta'\cdot\Delta + 40\cdot(\Delta')^3 + 9\cdot(\Delta)'\cdot(\Delta)^3 = 0$$

(см. закон катящихся симплексов).

Литература

[1] Вейль Г. Классические группы. Их инварианты и представления. — М.: Изд. иностр. лит., 1947.

[2] Герасимова О. В. Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — № 6. — С. 71—74.

[3] Герасимова О. В. Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода // Успехи мат. наук. — 2009. — Т. 64, № 4. — С. 177—178.

[4] Ефимовская О. В. Алгебраические аспекты теории интегрируемых волчков: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 2005.

[5] Размыслов Ю. П. Роллинг и соизмеримость симплексов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 5. — С. 55—58.

[6] Kaluza Th. Zum Unitätsproblem der Physik // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.). — 1921. — S. 966—972.

[7] Petrogradsky V. M., Razmyslov Yu. P., Shishkin E. O. Wreath products and Kaluzhnin—Krasner embedding for Lie algebras // Proc. Am. Math. Soc. — 2007. — Vol. 135, no. 3. — P. 625—636.