Комультипликационные модули над некоммутативными кольцами*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: комультипликационный модуль.

Аннотация

Исследуются комультипликационные модули над не обязательно коммутативными кольцами.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Comultiplication modules over noncommutative rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 217—224.

Comultiplication modules over not necessarily commutative rings are studied.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Используя выражения, подобные «A — инвариантное кольцо», мы подразумеваем, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Если A — кольцо и M — правый A-модуль, то для любого подмножества B в A через $\mathrm{l}_M(B)$ обозначается левый аннулятор $\{m \in M \mid mB = 0\}$ для B в M. В соответствии с [2] модуль M_A называется *комультипликационным*, если для любого его подмодуля X существует такой идеал B кольца A, что $X = \mathrm{l}_M(B)$. Комультипликационные модули изучались во многих работах (см., например, [1—6]), причём в основном изучались комультипликационные модули над коммутативными кольцами.

Теорема 1 [1]. *Пусть A — коммутативное кольцо и M — комультипликационный A-модуль.*

1. *M — существенное расширение прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей, и любой подмодуль модуля M, разлагающийся в конечную прямую сумму циклических модулей, является циклическим модулем.*
2. *Если модуль M несингулярен, то M — проективный полупростой модуль.*

*Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00693-а «Структурная теория колец».

В связи с теоремой 1 мы докажем теорему 2, которая является основным результатом данной работы.

Теорема 2. *Пусть A — кольцо и M — комультипликационный правый A-модуль.*

1. *Любой подмодуль модуля M, разлагающийся в конечную прямую сумму циклических модулей, является циклическим модулем.*
2. *Если A — инвариантное кольцо с коммутативным умножением идеалов, то M — существенное расширение прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей; кроме того, если модуль M несингулярен, то M — проективный полупростой модуль.*

В связи с теоремой 2 заметим, что класс всех инвариантных колец с коммутативным умножением идеалов включает в себя все коммутативные кольца, кольца формальных степенных рядов от одной переменной над телами, все фактор-кольца любых прямых произведений тел и все строго регулярные кольца. (Кольцо A называется *строго регулярным*, если каждый его главный односторонний идеал порождается центральным идемпотентом.)

Доказательство теоремы 2 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые определения и обозначения. Кольцо называется *инвариантным справа*, если все его правые идеалы являются идеалами. Кольцо A называется *дуальным*, если $B = \mathrm{r}_A(\mathrm{l}_A)(B)$ для любого его правого идеала B и $C = \mathrm{l}_A(\mathrm{r}_A)(C)$ для любого его левого идеала C. Через $J(M)$ обозначается *радикал Джекобсона* модуля M, т. е. $J(M)$ — пересечение всех максимальных подмодулей в M, причём $J(M) = M$, если M не имеет максимальных подмодулей. Через $\mathrm{Soc}(M)$ обозначается *цоколь* модуля M, т. е. $\mathrm{Soc}(M)$ — сумма всех минимальных подмодулей в M, причём $\mathrm{Soc}(M) = 0$, если M не имеет минимальных подмодулей. Кольцо A называется *полусовершенным*, если $A/J(A)$ — артиново кольцо и все его идемпотенты поднимаются до идемпотентов кольца A. Циклический модуль M называется *локальным*, если модуль $M/J(M)$ прост. Подмодуль X модуля M называется *существенным*, если X имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым подмодулем в M. В этом случае говорят, что M — *существенное расширение* модуля X. Модуль M_A называется *несингулярным*, если M не имеет ненулевых элементов, аннуляторы которых являются существенными правыми идеалами кольца A. Модуль M называется *коциклическим*, если M — существенное расширение простого модуля. Модуль M называется *конечномерным*, если M не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Модуль M называется *вполне конечномерным*, если все фактор-модули модуля M конечномерны. Подмодуль X модуля M называется *малым* (в M), если $X + Y \neq M$ для любого собственного подмодуля Y в M. Подмодуль фактор-модуля называется *подфактором*. Модуль M_A называется *точным*, если $\mathrm{r}_A(M) = 0$.

Следующие два утверждения известны и могут быть также проверены непосредственно.

Лемма 3 [1, лемма 1.2]. *Пусть A — кольцо, B — идеал в A и M — правый A-модуль со свойством $MB = 0$. Тогда M — комультипликационный A-модуль тогда и только тогда, когда M — комультипликационный A/B-модуль.*

Лемма 4 [2, теорема 3.17, лемма 3.7]. *Пусть A — кольцо и M — правый A-модуль. Равносильны следующие условия:*

1) *M — комультипликационный модуль;*
2) *$X = \mathrm{l}_M\big(\mathrm{r}_A(X)\big)$ для каждого подмодуля X модуля M;*
3) *каждый подмодуль модуля M — комультипликационный модуль.*

Лемма 5. *Пусть A — кольцо, M — комультипликационный правый A-модуль и X — ненулевой подмодуль в M.*

1. *X — комультипликационный $A/\mathrm{r}_A(X)$-модуль и $f(X) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f\colon X \to M$. В частности, M не содержит прямую сумму двух изоморфных ненулевых модулей.*
2. *Если $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ — подмодуль в M и существует такой модуль N, что каждый модуль X_i является гомоморфным образом модуля N, то X — гомоморфный образ модуля N.*
3. *Если $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ — подмодуль в M и каждый модуль X_i цикличен, то X — циклический модуль.*
4. *В M каждый конечно порождённый полупростой подмодуль цикличен.*
5. *Если существует элемент $m \in M$ со свойством $\mathrm{r}_A(m) = 0$, то A — комультипликационный правый A-модуль.*
6. *Если кольцо A инвариантно справа и M содержит точный циклический подмодуль mA, то A — комультипликационный правый A-модуль.*
7. *Если модуль M несингулярен и умножение правых идеалов кольца A коммутативно, то M — проективный полупростой модуль.*

Доказательство. 1. По третьему утверждению леммы 4 и лемме 3 X — комультипликационный $A/\mathrm{r}_A(X)$-модуль. Так как M — комультипликационный модуль, то $X = \mathrm{r}_M(B)$ для некоторого идеала B в A. Тогда

$$f(X)B \subseteq f(XB) = f(0) = 0,$$

откуда следует, что $f(X) \subseteq \mathrm{r}_M(B) = X$.

2. По условию существуют эпиморфизмы $h_i\colon N \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через h гомоморфизм $h_1 + \ldots + h_n$ из N в $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$. Пусть π_i — естественная проекция модуля X на модуль X_i, $i = 1, \ldots, n$. По утверждению 1 $\pi_i\big(h(N)\big) \subseteq h(N)$ для всех i. Поэтому

$$h(N) = \pi_1\big(h(N)\big) \oplus \ldots \oplus \pi_n\big(h(N)\big) = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n = X$$

и h — искомый эпиморфизм модуля N на модуль X.

3. Так как каждый модуль X_i цикличен, то существуют эпиморфизмы $h_i\colon A_A \to X_i$, $i = 1, \ldots, n$. По утверждению 2 существует эпиморфизм модуля A_A на модуль X. Поэтому X — циклический модуль.

4. Так как каждый конечно порождённый полупростой модуль является конечной прямой суммой простых модулей, то утверждение вытекает из утверждения 3 и того, что каждый простой модуль цикличен.

5. По лемме 4 mA_A — комультипликационный модуль. Кроме того, mA_A — свободный циклический модуль со свободным образующим m. Теперь непосредственно проверяется, что A_A — комультипликационный модуль.

6. Так как кольцо A инвариантно справа, то $\mathrm{r}_A(mA) = \mathrm{r}_A(m)$. Поэтому утверждение 6 следует из утверждения 5.

7. Докажем сначала, что M — полупростой модуль. Пусть Y — подмодуль в M. По лемме Цорна существует такой подмодуль Z в M, что $Y \cap Z = 0$ и $Y \oplus Z$ — существенный подмодуль в M. Обозначим $N = Y \oplus Z$. Достаточно доказать, что $M = N$. Допустим противное. Тогда существует ненулевой элемент $m \in M \setminus N$. Так как M — комультипликационный модуль, то найдётся такой идеал B кольца A, что $N = \mathrm{l}_M(B)$. Тогда $mB \neq 0$. Так как N — существенный подмодуль в M, то $mC \subseteq N$ для некоторого существенного правого идеала C кольца A. Тогда $mCB = 0$. Так как умножение правых идеалов кольца A коммутативно, то $mBC = mCB = 0$, $C \subseteq \mathrm{r}_A(mB)$ и $\mathrm{r}_A(mB)$ — существенный правый идеал. Так как модуль M несингулярен, то $mB = 0$ и получаем противоречие. Поэтому модуль M полупрост и $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$, где все S_i — несингулярные простые модули.

Докажем, что модуль M проективен. Пусть $i \in I$ и $S_i \cong A_A/P$, где P — максимальный правый идеал кольца A. Достаточно доказать, что модуль S_i проективен. Так как модуль A_A/P несингулярен, то правый идеал P не является существенным. Поэтому $P \cap Q = 0$ для некоторого ненулевого правого идеала Q. Тогда $A_A = P \oplus Q$, $S_i \cong Q$ и модуль S_i проективен. □

Лемма 6. *Пусть A — инвариантное кольцо. Если $\mathrm{r}_A(B) = \mathrm{l}_A(B)$ для каждого идеала B кольца A (это так, например, если кольцо A полупервично или A — кольцо с коммутативным умножением идеалов), то равносильны следующие условия:*

1) *A — дуальное кольцо;*
2) *A — комультипликационный правый A-модуль;*
3) *существует комультипликационный правый A-модуль M, содержащий точный циклический подмодуль.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) и импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) проверяются непосредственно. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из утверждения 6 леммы 5. □

Лемма 7. *Пусть A — инвариантное справа кольцо, B — идеал в A, n — натуральное число и M — n-порождённый правый A-модуль с образующими $m_1, \ldots, m_n$.*

1. *$B(1-b) \subseteq (1-b)B$ для любого элемента $b \in B$.*
2. *Пусть $n \geqslant 2$ и $N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A$. Если $M = MB$, то $A = B + (m_n A \,\dot{.}\, N)$ и $N = NB$.*

3. *Если $M = MB$, то $M(1-b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$.*

Доказательство. 1. Пусть $b_1 \in B$. Так как кольцо A инвариантно справа, то $(1-b)A$ — идеал. Поэтому $b_1(1-b) = (1-b)a$ для некоторого элемента $a \in A$. Тогда

$$a = (1-b)a + ba = b_1(1-b) + ba \in B, \quad B(1-b) \subseteq (1-b)B.$$

2. Обозначим

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2, \\ \sum\limits_{i=2}^{n-1} m_i A, & \text{если } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Для каждого m_i существует такой элемент $b_i \in B$, что

$$m_i \in M = MB = \sum_{j=1}^{n} m_j B, \quad m_i(1-b_i) \in \sum_{j \neq i} m_j B.$$

Тогда

$$m_n A(1-b_n) \subseteq NB = m_1 B + YB, \quad m_1 A(1-b_1) \in YB + m_n B,$$

поскольку A инвариантно справа. Кроме того, $B(1-b_1) \subseteq (1-b_1)B$ по утверждению 1. Поэтому $A = B + (m_n A \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)$ и

$$\begin{aligned} m_1 A(1-b_1)(1-b_n) &\subseteq (YB + m_n B)(1-b_n) \subseteq \\ &\subseteq YB + m_n B(1-b_n) \subseteq YB + m_n(1-b_n)B \subseteq YB + m_1 B = NB. \end{aligned}$$

Тогда существует такой элемент $b^* \in B$, что

$$m_1(1-b_1)(1-b_n) - m_1 b^* \in YB, \quad m_1[(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in YB.$$

Обозначим $b = 1 - [(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in B$. Тогда

$$m_1 = m_1 b + m_1(1-b) = m_1 b + m_1[(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in m_1 B + YB = NB.$$

Поэтому $m_1 A \subseteq NB$. Аналогично можно доказать, что $m_i A \subseteq NB$ при $i = 2, \ldots, n-1$. Поэтому $N = NB$.

3. Проведём индукцию по n.

Допустим, что $n = 1$ и $M = m_1 A$. Обозначим $m = m_1$. Так как A инвариантно справа, то $\mathrm{r}(M) = \mathrm{r}(m)$ и $mA = mAB = mB$. Поэтому $m(1-b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$. Тогда $M(1-b) = 0$.

Допустим, что $n > 1$ и утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших n. Обозначим $N = \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_i A$. По утверждению 2 $A = B + (m_n A \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)$ и $N = NB$. По предположению индукции $A = B + \mathrm{r}(N)$. Тогда

$$\begin{aligned} M(m_n A \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)\mathrm{r}(N) &= (N + m_n A)(m_n A \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)\mathrm{r}(N) = \\ &= N(m_n A \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)\mathrm{r}(N) + m_n A(m_n A \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)\mathrm{r}(N) \subseteq N\mathrm{r}(N) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $(m_nA \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)\mathrm{r}(N) \subseteq \mathrm{r}(M)$ и

$$A = A \cdot A = \big(B + (m_nA \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)\big)\big(B + \mathrm{r}(N)\big) \subseteq \\ \subseteq B + (m_nA \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)\mathrm{r}(N) \subseteq B + \mathrm{r}(M) \subseteq A. \quad \square$$

Лемма 8 [7]. *Пусть A — дуальное кольцо и $J = J(A)$.*

1. *A — полусовершенное кольцо и $\mathrm{r}(J) = \mathrm{l}(J)$.*
2. *Каждый конечно порождённый правый (левый) A-модуль вполне конечномерен.*
3. *Если Y — ненулевое неразложимое прямое слагаемое модуля A_A, то Y — локальный коциклический модуль, причём $Y/J(Y)$ и $\mathrm{Soc}(Y)$ — изоморфные простые модули.*

Лемма 9. *Пусть A — инвариантное кольцо с коммутативным умножением идеалов, M — ненулевой комультипликационный правый A-модуль и X — ненулевой циклический подмодуль в M.*

1. *$A/\mathrm{r}_A(X)$ — дуальное кольцо, X — свободный циклический комультипликационный правый $A/\mathrm{r}_A(X)$-модуль, X — конечная прямая сумма циклических неразложимых модулей, и модуль X_A вполне конечномерен.*
2. *$A/\mathrm{r}_A(X)$ — конечное прямое произведение локальных дуальных инвариантных коциклических колец $A_1, \ldots, A_n$ с коммутативным умножением идеалов, где для любого i все простые правые A_i-модули изоморфны между собой, причём не существует таких $j \neq i$ и простого правого A-модуля S, что оба правых A-модуля A_i и A_j имеют подфакторы, изоморфные модулю S.*
3. *X — существенное расширение циклического модуля $Y = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, где S_i — попарно неизоморфные простые модули, аннуляторы которых являются не совпадающими максимальными идеалами $P_1, \ldots, P_n$ инвариантного кольца A. Кроме того, $Y = \mathrm{Soc}(X)$, $YP = 0$ и $XP = J(X)$ — малый подмодуль в X, где $P = P_1 \cap \ldots \cap P_n$.*
4. *Пусть $X = Y \oplus Z$ и $Y \neq 0$. Тогда не существует такого простого модуля S, что оба модуля Y и Z имеют подфакторы, изоморфные модулю S. Если модуль Y неразложим, то Y — локальный коциклический модуль, причём $Y/J(Y)$ и $\mathrm{Soc}(Y)$ — изоморфные простые модули. В частности, X содержит простой подмодуль.*
5. *X — существенное расширение циклического модуля, являющегося конечной прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей.*
6. *Если B — идеал кольца A и $\mathrm{l}_M(B) = 0$, то существует такой элемент $b \in B$, что $X(1 - b) = 0$.*

Доказательство. 1. По утверждению 1 леммы 5 X — комультипликационный $A/\mathrm{r}_A(X)$-модуль. Так как кольцо A инвариантно, то X — свободный циклический $A/\mathrm{r}_A(X)$-модуль. По лемме 6 $A/\mathrm{r}_A(X)$ — дуальное кольцо. По утверждению 2 леммы 8 модуль X_A вполне конечномерен. Поэтому X — конечная прямая сумма циклических неразложимых модулей.

2. По утверждению 1 леммы 8 кольцо A полусовершенно. Инвариантное полусовершенное кольцо A является конечным прямым произведением локальных инвариантных колец $A_1, \dots, A_n$. Оставшиеся утверждения проверяются с помощью леммы 8.

3. Утверждение 3 вытекает из утверждения 2.

4. Утверждение 4 вытекает из утверждения 2.

5. Утверждение 5 вытекает из утверждения 4 и утверждений 1 и 4 леммы 5.

6. По утверждению 2 существуют такие не совпадающие максимальные идеалы $P_1, \dots, P_n$, являющиеся аннуляторами простых подмодулей $S_1, \dots, S_n$ в X, что $YP = 0$ и XP — малый подмодуль в X, где $Y = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ и $P = P_1 \cap \dots \cap P_n$. Если идеал B содержится в некотором максимальном идеале P_i, то $0 \neq S_i \subseteq \mathrm{l}_M(B) = 0$ и получаем противоречие. Поэтому $B + P_i = A$ для всех i. Тогда $B + P = A$. Следовательно, $X = XB + XP$. Кроме того, XP — малый подмодуль в X. Поэтому $X = XB$, откуда следует, что $X(1 - b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$. $\square$

Лемма 10. *Пусть A — инвариантное кольцо с коммутативным умножением идеалов и M — ненулевой комультипликационный правый A-модуль.*

1. *M — существенное расширение прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей.*
2. *Либо M — существенное расширение конечной прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей, либо M содержит бесконечную строго возрастающую цепь $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ циклических полупростых подмодулей.*
3. *Если M — модуль со свойством максимальности для циклических полупростых подмодулей, то M — конечномерный модуль, являющийся существенным расширением конечной прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей.*

Доказательство. 1. По утверждению 4 леммы 9 каждый подмодуль в M содержит простой подмодуль. Поэтому M — существенное расширение прямой суммы простых модулей S_i, $i \in I$. По утверждению 1 леммы 5 $S_i \ncong S_j$ при $i \neq j$.

2. По утверждению 4 леммы 5 каждый конечно порождённый полупростой подмодуль модуля M цикличен. Поэтому утверждение вытекает из утверждения 1.

3. Утверждение 3 вытекает из утверждения 2. $\square$

Окончание доказательства теоремы 2. 1. Утверждение 1 доказано в пункте 3 леммы 5.

2. Утверждение 2 вытекает из утверждения 1 леммы 10 и утверждения 7 леммы 5. $\square$

Литература

[1] Al-Shaniafi Y., Smith P. F. Comultiplication modules over commutative rings // J. Commut. Algebra. — 2011. — Vol. 3, no. 1. — P. 1—29.

[2] Ansari-Toroghy H., Farshadifar H. The dual notion of multiplication modules // Taiwanese J. Math. — 2007. — Vol. 11, no. 4. — P. 1189—1201.

[3] Ansari-Toroghy H., Farshadifar H. Comultiplication modules and related results // Honam Math. J. — 2008. — Vol. 30, no. 1. — P. 91—99.

[4] Ansari-Toroghy H., Farshadifar H. On comultiplication modules // Korean Ann. Math. — 2008. — Vol. 25, no. 1-2. — P. 57—66.

[5] Ansari-Toroghy H., Farshadifar H. On endomorphisms of multiplication and comultiplication modules // Arch. Math. (Brno). — 2008. — Vol. 44, no. 1. — P. 9—15.

[6] Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., Mast-Zohouri M. Some remarks on multiplication and comultiplication modules // Int. Math. Forum. — 2009. — Vol. 4, no. 5-8. — P. 287—291.

[7] Hajarnavis C. R., Norton N. C. On dual rings and their modules // J. Algebra. — 1985. — Vol. 93, no. 2. — P. 253—266.