Асимптотика распределения размера d-мерной модели открытой струны

В. И. АЛХИМОВ
Московский городской психолого-педагогический университет
e-mail: alvaliv@list.ru

УДК 519.2

Ключевые слова: асимптотика распределения, открытая модель струны, уравнение Дайсона, ренормализационная группа.

Аннотация

В данной работе дано статистическое описание конфигурации d-мерной модели открытой струны, избегающей самопересечения. Для распределения расстояния между концами струны получено точное интегральное уравнение, аналогичное известному уравнению Дайсона в квантовой теории поля. Полученное уравнение инвариантно относительно непрерывной группы ренормировочных преобразований, что позволяет использовать ренормгрупповой метод для установления асимптотики искомого распределения.

Abstract

V. I. Alkhimov, Asymptotic distribution of the size of a d-dimensional model of an open string, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 3—20.

In this paper, we propose a statistical description of the configuration of a d-dimensional model of an open string that avoids self-intersection. For the distribution of the distance between the ends of the string we have obtained an exact integral equation similar to the well-known Dyson equation in quantum field theory. The resulting equation is invariant under continuous transformations of the renormalization group, which allows one to use the renormalization group method to establish the desired asymptotic distribution.

1. Обсуждение модели

Рассмотрим в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$, $d \geqslant 2$, открытую струну (т. е. струну со свободными концами), распределение конфигурации которой определяется лишь внутренним физическим состоянием самой струны и взаимодействием её с окружающей средой. В качестве основной статистической величины, характеризующей размер струны в $\mathbf{R}^d$, мы примем расстояние R между её концами. Описание этой системы удобно начать с дискретной модели, а затем перейти к её непрерывному варианту с помощью предельного процесса.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 3—20.
© 2011/2012 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

Пусть исходная модель представляет собой цепь, состоящую из N упорядоченных прямолинейных сегментов струны, свободное сочленение которых обусловливает её гибкость. Концы сегментов, являющихся точками их соединения, будем называть элементами рассматриваемой модели. Принимая один из концов струны за нулевой элемент, обозначим через $\mathbf{q}_i \in \mathbf{R}^d$ радиус-вектор i-го элемента, а через $\mathbf{r}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}$ — i-й сегмент, соединяющий i-й и $(i-1)$-й элементы струны. Тогда

$$r_{ij} = \left| \sum_{k=i+1}^{j} \mathbf{r}_k \right|$$

есть пространственное расстояние между i-м и j-м её элементами, а

$$\bar{r}_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j} r_k \,—$$

расстояние по контуру цепи между ними. В рассматриваемой модели мы полагаем, что длины r_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, сегментов струны подчинены одному и тому же распределению, для которого средняя длина каждого сегмента равна h, а среднее значение контурной длины $\bar{r}_{ij}$ равно $\tilde{r}_{ij} = |j-i|h$. Отсюда следует, что $\tilde{r}_{0N} = Nh$ есть средняя контурная длина струны. В дальнейшем при построении непрерывной модели струны в определении $\tilde{r}_{0N}$ мы перейдём к пределу, устремив длину h к нулю, а число N к бесконечности таким образом, чтобы величина

$$L = \lim_{\substack{h \to 0,\\ N \to \infty}} Nh \tag{1}$$

оставалась конечной положительной величиной.

Потенциальную энергию U струны представим в виде суммы двух частей:

$$U = U_{\mathrm{lin}} + U_{\mathrm{vol}},$$

где линейная часть

$$U_{\mathrm{lin}} = \sum_{k=1}^{N} u(r_k)$$

есть сумма внутренних энергий всех сегментов, в то время как объёмная часть

$$U_{\mathrm{vol}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \sum V_{ij}$$

обозначает сумму энергий их попарных взаимодействий. Если $u(r_k)$ определяет значение «упругой» энергии k-го сегмента, то величина V_{ij}, описывающая пространственное взаимодействие i-го и j-го сегментов, обусловливает «гибкость» струны. Поскольку струна растяжима, то для линейного потенциала $u(r)$ мы примем известное приближение (закон Гука):

$$u(r) = \frac{MS}{2h} r^2, \tag{2}$$

где M — модуль упругости Юнга, а S — площадь сечения. Величина V_{ij} в этой модели определяется как

$$V_{ij} = h^2 V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij}),$$

где $V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})$ обозначает среднюю плотность энергии взаимодействия i-го и j-го сегментов струны. Таким образом, энергия взаимодействия V_{ij} двух сегментов зависит здесь как от пространственного расстояния r_{ij}, так и от средней контурной длины $\tilde{r}_{ij}$ между ними. При этом, чтобы учесть запрет на самопересечения струны, мы определим среднюю плотность $V(r, \tilde{r})$ следующим образом:

$$V(r, \tilde{r}) = V_0 \theta(r_0 - r)\theta(\tilde{r} - r_0), \tag{3}$$

где V_0 обозначает положительное постоянное значение функции $V(r, \tilde{r})$ в области $0 \leqslant r \leqslant r_0 \leqslant \tilde{r}$, r_0 — некоторая положительная величина, $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

В основу статистического описания пространственной конфигурации струны мы положим распределение Больцмана

$$w(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) = Q^{-1} \exp\left[-\frac{U}{T}\right].$$

Здесь Q — нормировочный множитель, T — энергетический параметр, характеризующий взаимодействие элементов струны с окружающей её средой. Согласно методу Маркова запишем искомую плотность вероятности расстояния R между концами струны следующим образом:

$$W_N(\mathbf{R}) = \int w(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)\delta(\mathbf{R} + \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_N) \prod_{i=1}^{N} d\mathbf{q}_i, \tag{4}$$

где $\delta(\mathbf{q})$ — дельта-функция Дирака. При этом один из концов струны можно считать фиксированным в начале координат, а другой свободным. Тогда в силу изотропности пространства $\mathbf{R}^d$ плотность распределения $W_N(\mathbf{R})$ будет зависеть лишь от расстояния R свободного конца струны от начала координат. В интеграле формулы (4) перейдём к новым переменным

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

и затем воспользуемся преобразованием Фурье функции $\delta(\mathbf{q})$. В результате мы получим для $W_N(\mathbf{R})$ выражение

$$W_N(\mathbf{R}) = Q_N^{-1} \int\limits_{\mathbf{R}^d} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{R} \cdot \mathbf{p}) g_N(p), \tag{5}$$

в котором $Q_N = Q/Q_0^N$,

$$Q_0 = \omega_d \int\limits_0^\infty \exp\left[-\frac{u(r)}{T}\right] r^{2s+1}\, dr,$$

$\omega_d = 2\pi^{s+1}/\Gamma(s+1)$ — поверхность сферы единичного радиуса в $\mathbf{R}^d$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, $s = (d-2)/2$, а функция $g_N(\mathbf{p})$ определяется равенством

$$g_N(\mathbf{p}) = \int P_{1N} \prod_{k=1}^{N} Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_k)\, d\mathbf{r}_k, \tag{6}$$

где

$$P_{1N} = \exp\Big[-\frac{h^2}{T} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})\Big], \tag{7}$$

$$Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = Q_0^{-1} \exp\left[-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \frac{u(r)}{T}\right]. \tag{8}$$

Из формул (6)—(8) следует, что

$$|g_N(\mathbf{p})| \leqslant g_N(\mathbf{0}), \tag{9}$$

где величина $g_N(\mathbf{0})$ удовлетворяет неравенствам

$$\exp\left(-\frac{N^2h^2V_0}{2T}\right) \leqslant g_N(\mathbf{0}) \leqslant 1. \tag{10}$$

В случае отсутствия объёмных взаимодействий, т. е. если $V_0 = 0$, функция $g_N(\mathbf{p})$ согласно равенству (6) преобразуется к виду $g_N^{(0)}(\mathbf{p}) = g^N(\mathbf{p})$, где

$$g(\mathbf{p}) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \omega_d Q_0^{-1} \int\limits_0^\infty \Lambda_s(pr) \exp\left[-\frac{u(r)}{T}\right] r^{2s+1}\, dr, \tag{11}$$

$\Lambda_s(x) = \Gamma(s+1)(2/x)^s J_s(x)$, $J_s(x)$ — функция Бесселя, откуда следует, что $\Lambda_s(0) = 1$ и $g(0) = 1$. Теперь в формуле (11) воспользуемся выражением (2) в виде $u(r)/T = r^2/4hl$, где величина $l = T/2MS$ есть некоторая характеристическая длина участка струны, в котором полученная из окружающей среды энергия преобразуется в упругую энергию. Тогда интегрирование в равенстве (11) даёт

$$g(\mathbf{p}) = \exp(-hlp^2). \tag{12}$$

Отсюда согласно (5) получаем равенство $Q_N^{(0)} = 1$ и предельное выражение для плотности вероятности $W_N^{(0)}(\mathbf{R})$:

$$\lim_{(1)} W_N^{(0)}(\mathbf{R}) \equiv W^{(0)}(\mathbf{R}, L) = (4\pi lL)^{-d/2} \exp\left(-\frac{R^2}{4lL}\right).$$

Найденное с помощью последней формулы значение среднеквадратичного расстояния $\langle R^2\rangle_L^{(0)} = 2dlL$ между концами струны может служить в этом случае дополнением к приведённой выше характеристике величины l.

2. Основное уравнение

Приступим теперь к поиску асимптотики плотности вероятности

$$W(\mathbf{R}, L) = \lim_{(1)} W_N(\mathbf{R}), \tag{13}$$

когда $R/l \to \infty$ и $L/l \to \infty$. С этой целью обратимся к формулам (5), (6) и, наряду с определением в (7), введём следующие обозначения:

$$P_{mn} = \prod_{m \leqslant i < j \leqslant n} (1 + \varepsilon_{ij}), \tag{14}$$

$$\varepsilon_{ij} = \exp\left(-\frac{V_{ij}}{T}\right) - 1. \tag{15}$$

Далее разложим произведение P_{1N} в ряд по ε_{ij}:

$$P_{1N} = 1 + \sum_{k \geqslant 1}\left(\sum_{i_1 < j_1}\sum_{i_2 < j_2}\ldots\sum_{i_k < j_k}\varepsilon_{i_1 j_1}\varepsilon_{i_2 j_2}\ldots\varepsilon_{i_k j_k}\right), \tag{16}$$

где индексы в каждом из сомножителей $\varepsilon_{i_1 j_1}, \varepsilon_{i_2 j_2}, \ldots, \varepsilon_{i_k j_k}$ расположены в порядке возрастания, т. е. $i_k < j_k$ для $k \geqslant 1$, причём первые индексы этих сомножителей в каждом члене указанной суммы образуют неубывающую последовательность, т. е. $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k$, и ни одна пара индексов не совпадает: $(i_l j_l) \neq (i_m j_m)$ при $l \neq m$. Сомножители $\varepsilon_{i_m j_m}$ и $\varepsilon_{i_n j_n}$ называются связанными, если контурные участки струны $\sum\limits_{k=i_m+1}^{j_m} r_k$ и $\sum\limits_{k=i_n+1}^{j_n} r_k$ содержат хотя бы один общий её сегмент, и несвязанными в противном случае. Любое произведение сомножителей в (16), расположенных в порядке неубывания их первых индексов, назовём комплексом, если в этом произведении каждый сомножитель начиная со второго связан по крайней мере с одним из предшествующих сомножителей. Тогда любой член суммы в (16) либо является комплексом, либо распадается на произведение некоторого числа комплексов. Обозначим через f_{ij} сумму всех комплексов, зависящих от векторов $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \ldots, \mathbf{r}_j$, где $i < j$, и назовём её блоком. Это означает, что

$$\begin{gathered} f_{ij} = \varepsilon_{ij} P_{ij} + \sum_{i<k<l<j} \varepsilon_{il}\varepsilon_{kj} P_{ik} P_{kl} P_{lj} + \\ + \sum_{i<k<l<m<n<j} (\varepsilon_{il}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{mj} + \varepsilon_{in}\varepsilon_{km}\varepsilon_{lj} + \varepsilon_{im}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ln} + \varepsilon_{im}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{lj}) P_{ik} P_{kl} P_{lm} P_{mn} P_{nj} + \ldots, \end{gathered} \tag{17}$$

где в правой части под знаком первой суммы находится всего лишь один представитель комплексов второго порядка по ε_{ij}, в то время как под знаком второй суммы находятся четыре неэквивалентных представителя комплексов третьего порядка относительно ε_{ij}. Для полного числа N_n неэквивалентных представителей комплексов n-го порядка по ε_{ij} имеет место асимптотическая оценка: $N_n = O\big((2n-1)!!\big)$ при $n \to \infty$. Нетрудно убедиться, что произведение P_{1N}

теперь можно разложить по блокам f_{ij} так, что каждый член суммы является либо блоком, либо произведением некоторого числа блоков:

$$P_{1N} = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \Bigg[\sum_{1 \leqslant i_1 < i_1 + j_1 < \ldots < i_k < i_k + j_k \leqslant N} f_{i_1 i_1 + j_1} \cdots f_{i_k i_k + j_k} \Bigg]. \tag{18}$$

Подставляя разложение (18) в равенство (6), мы получим после надлежащего интегрирования формулу

$$g_N(\mathbf{p}) = \sum_{m \geqslant 0} \sum_{n=0}^{N} \frac{(N-n+m)!}{(N-n)!\, m!} g^{N-n}(\mathbf{p}) F_n^{(m)}(\mathbf{p}), \tag{19}$$

где

$$F_n^{(0)}(\mathbf{p}) \equiv 0, \quad F_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \sum_{n_1 + \ldots + n_m = n} f_{n_1}(\mathbf{p}) \cdots f_{n_m}(\mathbf{p}), \quad m \geqslant 1, \tag{20}$$

$$f_1(\mathbf{p}) \equiv 0, \quad f_n(\mathbf{p}) = \int f_{1n} \prod_{k=1}^{n} Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_k)\, d\mathbf{r}_k, \quad n \geqslant 1, \tag{21}$$

f_{1n}, как указано выше, обозначает блок, составленный из всех комплексов, зависящих от сегментов $\mathbf{r}_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а множитель $(N-n+m)!/(N-n)!\,m!$ равен числу способов размещения m частичных отрезков, состоящих последовательно из $n_1, n_2, \ldots, n_m$ звеньев (их общее число равно n) и расположенных внутри одного отрезка, состоящего из N звеньев, так, чтобы при этом сохранялась последовательность расположения частичных отрезков. С помощью формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dz\, z^{n_1 + \ldots + n_m - n - 1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{m} n_j = n, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{j=1}^{m} n_j \neq n, \end{cases}$$

в которой замкнутый контур γ охватывает начало координат на комплексной z-плоскости, равенство (20) приводится к виду

$$F_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1}} f^m(\mathbf{p}, z), \tag{22}$$

где

$$f(\mathbf{p}, z) \equiv \sum_{n \geqslant 0} z^n f_n(\mathbf{p}). \tag{23}$$

Подставим теперь выражение (22) в (19) и распространим суммирование по m от 0 до ∞, а по n — от $-\infty$ до N, что не оказывает влияния на конечный результат. Тогда, используя формулу

$$(1 - x - y)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!\, n!} x^m y^n, \quad |x + y| < 1,$$

приведём выражение (19) к виду

$$g_N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^{N+1}}[1 - zg(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}, z)]^{-1}, \tag{24}$$

где замкнутый контур γ, охватывающий начало координат $z = 0$, выбран так, чтобы выполнялось неравенство

$$|zg(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p}, z)| < 1.$$

Наконец, если определить производящую функцию

$$g(\mathbf{p}, z) \equiv \sum_{N\geqslant 0} z^N g_N(\mathbf{p}), \tag{25}$$

то из равенства (24) следует основное уравнение [1]:

$$g^{-1}(\mathbf{p}, z) = g_0^{-1}(\mathbf{p}, z) - f(\mathbf{p}, z), \tag{26}$$

в котором

$$g_0^{-1}(\mathbf{p}, z) = 1 - zg(\mathbf{p}).$$

Однако для того чтобы уравнение (26) было замкнутым, необходимо установить непосредственную связь между производящими функциями $f(\mathbf{p}, z)$ и $g(\mathbf{p}, z)$. С этой целью подставим определённое в (17) выражение для f_{1n} в равенство (21) и запишем величину ε_{mn} в форме

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon\left(\Big|\sum_{m<k\leqslant n}\mathbf{r}_k\Big|, |m-n|h\right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}i}\oint\limits_{\gamma} dz\, z^{(m-n)}\int d\mathbf{p}\,\exp\left[-i\mathbf{p}\cdot\sum_{j=m+1}^{n}\mathbf{r}_j\right]\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}, z),$$

где функция $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}, z)$ определена равенством

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}, z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n \int \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\left\{\exp\left[-\frac{h^2}{T}V(r, nh)\right] - 1\right\} d\mathbf{r} \tag{27}$$

в соответствии с определениями ε_{mn} в (15). Выполняя затем интегрирование в (21) по $\{\mathbf{r}_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, приходим к равенству

$$f_n(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}i}\oint\limits_{\gamma}\frac{dz_1}{z_1{}^{n+1}}\int d\mathbf{p}_1\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1)g_n(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) + \\ + \sum_{1\leqslant l<m<n}\frac{1}{[(2\pi)^{d+1}i]^2}\oint\limits_{\gamma}\frac{dz_1}{z_1^{m+1}}\oint\limits_{\gamma}\frac{dz_2}{z_2^{n-l+1}}\iint d\mathbf{p}_1\,d\mathbf{p}_2\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1)\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_2, z_2)\times \\ \times g_l(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)g_{m-l}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)g_{n-m}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2) + \ldots. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (23), мы получим для $f(\mathbf{p}, z)$ ряд

$$f(\mathbf{p}, z) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1} i} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1} \int d\mathbf{p}_1 \, \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1) g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, \frac{z}{z_1}\right) +$$
$$+ \frac{1}{[(2\pi)^{d+1} i]^2} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz_1}{z_1} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz_2}{z_2} \iint d\mathbf{p}_1 \, d\mathbf{p}_2 \, \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1, z_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_2, z_2) \times$$
$$\times g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, \frac{z}{z_1}\right) g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \frac{z}{z_1 z_2}\right) g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, \frac{z}{z_2}\right) + \ldots, \tag{29}$$

посредством которого описывается искомая связь между функциями $f(\mathbf{p}, z)$ и $g(\mathbf{p}, z)$. Ряд в (29) удобно представить в символической форме

$$f(\mathbf{p}, z) = \sum_{n \geqslant 1} N_n \oint\limits_{\gamma} \left\{ \frac{dz'}{2\pi i z'} \right\}^n \int \left\{ \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d} \right\}^n \{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}', z')\}^n \left\{ g\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \frac{z}{z'}\right) \right\}^{2n-1}$$

с целью продемонстрировать инвариантность уравнения (26) относительно мультипликативных преобразований

$$g \to g' = \alpha g, \quad g_0 \to g_0' = \alpha g_0, \quad \tilde{\varepsilon} \to \tilde{\varepsilon}' = \alpha^{-2} \tilde{\varepsilon}, \quad f \to f' = \alpha^{-1} f, \tag{30}$$

где α — отличный от нуля параметр. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую обычно ренормгруппой, в связи с чем свойство (30) является исходной точкой для применения ренормгруппового метода в исследуемой здесь задаче.

3. Переход к непрерывной модели

Для того чтобы перейти к непрерывной модели, введём новую переменную E посредством равенства

$$z = z(E) \equiv \exp(-Eh), \quad \operatorname{Re} E > 0, \tag{31}$$

и запишем основное уравнение (26) после несложных преобразований в символической форме

$$\left[hg\bigl(\mathbf{p}, z(E)\bigr)\right]^{-1} = h^{-1}(1 - \exp[-h(E + lp^2)]) -$$
$$- \sum_{n \geqslant 1} N_n \oint\limits_{\gamma} \left\{ \frac{dz(E')}{2\pi i z(E')} \right\}^n \int \left\{ \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d} \right\}^n \times$$
$$\times \left\{ h^{-2} \tilde{\varepsilon}\bigl(\mathbf{p}', z(E')\bigr) \right\}^n \left\{ hg\left(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \frac{z(E)}{z(E')}\right) \right\}^{2n-1}, \tag{32}$$

принимая во внимание свойство (30). Тогда вследствие неравенства

$$|g(\mathbf{p}, z(E)| < [1 - \exp(-h \operatorname{Re} E)]^{-1}, \tag{33}$$

вытекающего из (9), (10), (25) и (31), аналитическая в области $|z| < 1$ функция $(1-z)g(\mathbf{p}, z)$ является ограниченной внутри этой области и поэтому существует предел [5]

$$\lim_{h\to 0} hg\bigl(\mathbf{p}, z(E)\bigr) \equiv \varphi(\mathbf{p}, E), \tag{34}$$

для которого из (33) выводим неравенство

$$|\varphi(\mathbf{p}, E)| \leqslant (\operatorname{Re} E)^{-1}. \tag{35}$$

Далее воспользуемся равенствами

$$z^{-1}(E)\, dz(E) = -h\, dE$$

и

$$h^{-1}\tilde{\varepsilon}\bigl(\mathbf{p}, z(E)\bigr) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} h\exp(-nhE) \int\limits_{\mathbf{R}^d} \exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) \left\{\exp\left[-\frac{h^2}{T}V(r, nh)\right] - 1\right\} h^{-2}\, d\mathbf{r}, \tag{36}$$

вытекающими из (31) и (27) соответственно, и затем перейдём к пределу в уравнении (32) при $h \to 0$. Тогда, принимая во внимание равенства (30), (32), (34), (36) и определение

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\tilde{\varepsilon}\bigl(\mathbf{p}, z(E)\bigr) \equiv \sigma(\mathbf{p}, E) = -\frac{1}{T}\int\limits_0^{\infty} d\tilde{r} \int\limits_{\mathbf{R}^d} \exp[i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E\tilde{r}]V(r, \tilde{r})\, d\mathbf{r}, \tag{37}$$

мы получим для функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ уравнение

$$\varphi^{-1}(\mathbf{p}, E) = \varphi_0^{-1}(\mathbf{p}, E) - F(\mathbf{p}, E; \sigma; \varphi), \tag{38}$$

где

$$\varphi_0^{-1}(\mathbf{p}, E) = E + lp^2, \tag{39}$$

а функция $F(\mathbf{p}, E; \sigma; \varphi)$ определяется при помощи ряда

$$F(\mathbf{p}, E; \sigma; \varphi) = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_1}{2\pi i}\sigma(\mathbf{p}_1, E_1)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1, E-E_1) + \\ + \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_1}{2\pi i} \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE_2}{2\pi i}\sigma(\mathbf{p}_1, E_1)\sigma(\mathbf{p}_2, E_2) \times \\ \times \varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1, E-E_1)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2, E-E_1-E_2)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2, E-E_2) + \ldots\,. \tag{40}$$

Согласно равенству (37) фигурирующая в (40) величина $\sigma(\mathbf{p}, E)$ является $(d+1)$-мерной спектральной плотностью функции $-V(r, \tilde{r})/T$. Подставляя выражение (3) в (37), находим, что

$$\sigma(\mathbf{p}, E) = -\sigma_0\Lambda_{s+1}(pr_0)E^{-1}\exp(-Er_0), \tag{41}$$

где $\sigma_0 = \upsilon V_0/T$, $\upsilon = (\pi r_0^2)^{s+1}/\Gamma(s+2)$ — d-мерный объём шара радиуса r_0. Воспользуемся теперь выражением (41) во всех членах ряда (40) и выполним в них соответствующие интегрирования по переменным $E_1, E_2, \ldots$. С этой целью в комплексной плоскости каждой из переменных $\{E_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, проведём разрез вдоль положительной вещественной оси и сместим контур интегрирования $(C - i\infty, C + i\infty)$ бесконечно далеко в правую полуплоскость, обходя при этом особые точки подынтегральных функций. Тогда, принимая во внимание неравенство (35) при интегрировании в (40) по указанным переменным, находим, что

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}, E; \sigma; \varphi) = -\sigma_0 \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_1) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E) + \\ + \sigma_0^2 \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_1) \Lambda_{s+1}(r_0 p_2) \times \\ \times \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, E) \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, E) - \ldots . \end{aligned} \quad (42)$$

Выражение (42) запишем в символической форме

$$F(\mathbf{p}, E; \sigma; \varphi) = \sum_{n \geqslant 1} N_n (-\sigma_0)^n \int \left\{ \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^d} \right\}^n \{\Lambda_{s+1}(r_0 \tilde{p})\}^n \{\varphi(\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{p}}, E)\}^{2n-1}, \quad (43)$$

чтобы продемонстрировать очевидность ренормгрупповой инвариантности уравнения (38):

$$\varphi \to \varphi' = \alpha\varphi, \quad \varphi_0 \to \varphi_0' = \alpha\varphi_0, \quad \sigma_0 \to \sigma_0' = \alpha^{-2}\sigma_0, \quad F \to F' = \alpha^{-1} F. \quad (44)$$

Предложение. *Величина $F(0, E; \sigma; \varphi)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\operatorname{Re} E \leqslant |E - F(0, E; \sigma; \varphi)| \leqslant \Phi(E, L), \quad (45)$$

где

$$\Phi(E, L) = L^{-1} \exp\left[\frac{L^2 V_0}{6T} + \frac{L}{2} \operatorname{Re} E\right].$$

Доказательство. Согласно неравенствам (10) и равенству (31) имеем

$$\sum_{n=0}^{N} \exp\left[-\frac{n^2 h^2 V_0}{2T} - nh \operatorname{Re} E\right] \leqslant \sum_{n=0}^{N} |z(E)|^n g_n(\mathbf{0}) \leqslant \sum_{n=0}^{N} |z(E)|^n. \quad (46)$$

Если преобразовать левую часть системы неравенств в (46) с помощью известного неравенства

$$\left[\prod_{n=1}^{N} t_n\right]^{1/N} \leqslant \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} t_n, \quad t_n > 0,$$

то нетрудно убедиться, что она не меньше величины

$$N \exp\left[-\frac{(N^2-1)}{6} \frac{h^2 V_0}{T} - \frac{(N+1)}{2} h \operatorname{Re} E\right].$$

Учитывая последнее замечание, умножим все части неравенств в (46) на h и в полученной системе неравенств перейдём к пределу, устремляя длину h к нулю, а число N к бесконечности так, чтобы выполнялось условие (1). В результате мы приходим к соотношению

$$\Phi^{-1}(E,L) \leqslant |\varphi(0,E)| \leqslant (\operatorname{Re} E)^{-1}, \tag{47}$$

которое вместе с уравнением (38) доказывает (45). □

Отсюда следует, что ряд в правой части равенства (42) (или (43)) сходится при $p=0$, что обусловливает также сходимость интегралов в членах этого ряда. Но поскольку $\Lambda_{s+1}(r_0 p) \to 1$, если $p \to 0$, и $\Lambda_{s+1}(r_0 p) = O(p^{-s-3/2})$, если $p \to \infty$, то благодаря сходимости этих интегралов можно указать допустимые значения параметров, определяющих асимптотическое поведение функции $\varphi(\mathbf{p},0)$ на концах интервала $0<p<\infty$.

В самом деле, пусть E_0 — наиболее удалённая вправо на действительной оси переменной E особая точка функции $\varphi(0,E)$, определяемая согласно (38) уравнением

$$\varphi^{-1}(0,E_0) \equiv 0, \tag{48}$$

или $E_0 - F(0,E_0;\sigma;\varphi) \equiv 0$. Вследствие неравенства (47) из уравнения (48) получаем, что $E_0 = 0$ и $F(0,0;\sigma;\varphi)=0$. С другой стороны, из уравнения (38) следует, что $\varphi^{-1}(\mathbf{p},0) = lp^2 - F(\mathbf{p},0;\sigma;\varphi)$. Отсюда видно, что запрет на самопересечения струны обусловит распределение её размера, существенно отличное от нормального распределения, если поведение функции $\varphi^{-1}(\mathbf{p},0)$ при малых значениях p будет определяться главным образом зависимостью от p функции $F(\mathbf{p},0;\sigma;\varphi)$. Последнее условие означает, что $F(\mathbf{p},0;\sigma;\varphi) = O(p^{2(1-\mu)})$ или $\varphi(\mathbf{p},0) = O(p^{2(\mu-1)})$ при $p\to 0$, где $0<\mu<1$. Но из равенства (43) следует, что при $E=0$ и $p=0$ всякий переход от одного члена ряда к следующему сопровождается добавлением интеграла вида

$$I(\mathbf{p}_1) = -\sigma_0 \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_2)\varphi(\mathbf{p}_2,0)\varphi(\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_1,0).$$

Вычисление последнего интеграла по малому объёму шара радиуса $p_2 = p_0$ с центром в точке $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ при фиксированном значении $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ даёт величину порядка $O(p_0^{4\mu+2s-2})$, когда $p_0 \to 0$. Отсюда тогда вытекает следующее условие сходимости рассматриваемого интеграла: $1-s<2\mu$. Объединяя последнее неравенство с рассматриваемым случаем $d \geqslant 2$ ($s \geqslant 0$), мы приходим к условию $2 \leqslant d < 4$ ($0 \leqslant s < 1$), выполнение которого обеспечивает сходимость интегралов во всех членах рассматриваемого ряда.

4. Ренормгрупповые уравнения

Далее воспользуемся формулой обращения для равенства (25) с целью выразить функцию $g_N(\mathbf{p})$ через $g(\mathbf{p},z)$ и затем перейдём к пределу в (13), учитывая равенства (31) и (34). В результате имеем

$$W(\mathbf{R}, L) = \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i} \exp(LE)\psi(\mathbf{R}, E), \tag{49}$$

$$\psi(\mathbf{R}, E) = \int\limits_{\mathbf{R}^d} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp(-i\mathbf{R}\cdot\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p}, E), \tag{50}$$

тем самым определение плотности распределения $W(\mathbf{R}, L)$ сводится к решению уравнения (38).

Однако более реалистичной задачей является нахождение асимптотики функции $W(\mathbf{R}, L)$ при $R/l \to \infty$ и $L/l \to \infty$. Из формул (49), (50) следует, что для отыскания асимптотики функции $W(\mathbf{R}, L)$ необходимо знать поведение функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ при малых значениях p и $|E|$. Если теперь обозначить через $p_\pm \equiv \pm i\eta$ ($\mathrm{Re}\,\eta > 0$) ближайшие к началу $p = 0$ корни уравнения $\varphi^{-1}(\mathbf{p}, E) = 0$, в котором значения E принадлежат окрестности точки $E = 0$, то, полагая $p = i\eta$ в (38), получим тождество

$$\varphi^{-1}(i\eta, E) \equiv 0, \tag{51}$$

определяющее связь между величинами E и η^2:

$$E \equiv l\eta^2 + F(i\eta, E; \sigma; \varphi). \tag{52}$$

С помощью тождества (52) преобразуем уравнение (38) к более удобной форме:

$$\varphi^{-1} = l\chi^2 + F(i\eta, E; \sigma; \varphi) - F(p, E; \sigma; \varphi), \tag{53}$$

где $\chi^2 \equiv p^2 + \eta^2$. Система уравнений (52), (53) составляет основу для отыскания асимптотики величины $W(\mathbf{R}, L)$, когда $R/l \to \infty$ и $L/l \to \infty$. Эта задача, по существу, сводится к вычислению показателя степени μ ($0 < \mu < 1$) в асимптотическом поведении функции φ:

$$\varphi = O\bigl(\chi^{2(\mu-1)}\bigr), \quad \chi \to 0, \tag{54}$$

и установлению асимптотической зависимости между переменными E и η:

$$E = O(\eta^{2\nu}), \quad 0 < \nu < 1, \quad \eta \to 0.$$

Для реализации этого подхода воспользуемся ренормгрупповой инвариантностью (47) основного уравнения. Разделим обе части уравнения (38) на $l\chi^2$ и представим искомую функцию φ как

$$\varphi = \frac{X}{l\chi^2}, \tag{55}$$

где новая неизвестная величина X удовлетворяет уравнению

$$X^{-1} = 1 + (l\chi^2)^{-1}\Psi(\chi^2, \eta^2; \sigma; \varphi), \tag{56}$$

в котором

$$\Psi(\chi^2, \eta^2; \sigma; \varphi) = F(i\eta, E; \sigma; \varphi) - F(p, E; \sigma; \varphi). \tag{57}$$

Допустим, что при некотором отличном от нуля значении $\chi^2 = \lambda$ выполняется равенство

$$\Psi(\lambda, \eta^2; \sigma; \varphi) = 0,$$

где $\lambda = \lambda(\eta^2; \sigma_0)$ — так называемая точка нормировки. Уравнение (56) можно переписать следующим образом:

$$X^{-1} = 1 + \left(\frac{\lambda}{\chi^2}\right) \tilde{\Psi} \left(\frac{\chi^2}{\lambda}, \frac{\eta^2}{\lambda}; \frac{\sigma_0}{l^2\lambda^{1-s}}; \frac{\lambda}{\chi^2} X\right).$$

Отсюда следует, что безразмерная величина X в окрестности точек $p = 0$ и $E = 0$ представима как функцию безразмерных переменных:

$$X = X(x, y; b),$$

где

$$x = \frac{\chi^2}{\lambda}, \quad y = \frac{\eta^2}{\lambda}, \quad b = \frac{\sigma_0}{l^2\lambda^{1-s}};$$

здесь число b представляет собой безразмерную комбинацию величин λ, l и σ_0. В самом деле, если в каждом интеграле формулы (43) выполнить переход к безразмерным переменным $\tilde{p}^2/\lambda$ и $(\lambda/\chi^2)X$, что удобно описать в символической форме как

$$\tilde{p}^d = \lambda^{d/2} \left\{\frac{\tilde{p}^2}{\lambda}\right\}^{d/2}, \quad \{\varphi\}^2 = (\lambda l)^{-2} \left\{\frac{\lambda}{\chi^2} X\right\}^2,$$

то в результате этой замены переменных перед интегралом появится множитель $-b$. При этом в точке $x = 1$ выполняется условие нормировки

$$X(1, y; b) = 1. \tag{58}$$

Отсюда нетрудно вывести, что согласно ренормгрупповому свойству уравнения (56) умножение функции $X = X(x, y; b)$ на число a^{-1} приводит к изменению её точки нормировки, $\chi^2 = \lambda'(\eta^2, \sigma_0')$, и параметра b, $b' = a^{-2}\tau^{s-1}b$, где $\sigma_0' = a^{-2}\sigma_0$, $\tau = \lambda'/\lambda$, т. е.

$$aX(x, y; b) = X\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}; b'\right).$$

Если в последнем равенстве положить $x = \tau$ и учесть условие нормировки

$$X\left(1, \frac{y}{\tau}; b'\right) = 1,$$

то $a^{-1} = X(\tau, y; b)$, а указанное равенство преобразуется к виду

$$X(x, y; b) = X(\tau, y; b) X\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}; b\tau^{s-1}X^2(\tau, y; b)\right). \tag{59}$$

Возведём в квадрат обе части уравнения (59) и затем умножим его на bx^{s-1}. В результате находим, что величина

$$B(x, y; b) = bx^{s-1}X^2(x, y; b), \tag{60}$$

называемая здесь инвариантным ренормгрупповым параметром, удовлетворяет уравнению

$$B(x,y;b) = B\left(\frac{x}{\tau},\frac{y}{\tau};B(\tau,y;b)\right) \tag{61}$$

с нормировочным условием

$$B(1,y;b) = b. \tag{62}$$

Уравнение (61) замкнуто и может быть решено в общем виде [3, 4]. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальным уравнением Ли, соответствующим непрерывной ренормгруппе:

$$x\frac{\partial B(x,y;b)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x};B(x,y;b)\right), \tag{63}$$

где

$$\beta(y;b) = \left[\frac{\partial B(x,y;b)}{\partial x}\right]_{x=1}, \tag{64}$$

а равенство (62) играет роль граничного условия для уравнения (63). Если теперь в уравнениях (63) и (64) перейти к пределу при $y \to 0$, то уравнение для функции

$$B(x;b) = \lim_{y\to 0} B(x,y;b) \tag{65}$$

можно привести к виду

$$x\frac{\partial B(x;b)}{\partial x} = \beta\big(B(x;b)\big) \tag{66}$$

или к интегральной форме

$$\int\limits_b^{B(x;b)} \frac{da}{\beta(a)} = \ln x, \tag{67}$$

где

$$\beta(b) = \left[\frac{\partial B(x;b)}{\partial x}\right]_{x=1}, \tag{68}$$

при этом соответствующее граничное условие выглядит как $B(1;b) = b$. Таким образом, эффективным параметром, характеризующим объёмный эффект в малой окрестности точек $p = 0$ и $\eta = 0$, является инвариантный ренормгрупповой параметр B, определение которого позволило бы найти асимптотику функции φ. Обычно для этой цели используется теория возмущений, применением которой удаётся получить информацию о поведении $\beta(b)$ лишь в малой окрестности точки $b = 0$, где $\beta(b) = 0$. В самом деле, если $\beta(b) > 0$ в этой окрестности, то $B(x;b) \to 0$ при $x \to 0$ и, стало быть, точка $b = 0$ является стабильным нулём. Если же $\beta(b) < 0$ вблизи нуля, то величина $B(x;b)$ возрастает при $x \to 0$ и теория возмущений становится неприменимой. Согласно выражениям (60) и (56) $B(x;b) \to 0$ при $x \to 0$, если

$$X(x,b) = o\big(x^{(1-s)/2}\big), \quad x \to 0. \tag{69}$$

Отсюда следует, что если $X(x,b) = O(x^{\mu})$ при $x \to 0$, то согласно (54) и (55) условие

$$1 - s < 2\mu \tag{70}$$

является необходимым для определения функции $\beta(b)$ в окрестности точки $b = 0$. Выше было показано, что условие (70) также необходимо для сходимости интегралов во всех членах ряда, представляющего функцию $F(\mathbf{p}, E; \sigma; \varphi)$ в окрестности точек $\mathbf{p} = 0$ и $E = 0$. Но значение μ не зависит от переменной y, и поэтому функция $X(x, y; b)$ тоже должна вести себя как $X(x, y; b) = O(x^{\mu})$ при $x \to 0$, а функция φ, в соответствии с (54), как

$$\varphi = O(x^{\mu-1}), \quad x \to 0. \tag{71}$$

Для того чтобы вычислить функцию $\beta(b)$, необходимо оценить функцию $F(\mathbf{p}, 0; \sigma; \varphi)$ в (42) для значений p в окрестности точки $p = 0$.

5. Асимптотика плотности вероятности

Для реализации изложенного выше подхода обратимся к уравнению (53), в правой части которого фигурирует выражение (57). Последнее с помощью равенства (42) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\Psi(\chi^2, \eta^2; \sigma; \varphi) = & -\sigma_0 \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_1)[\varphi(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_1, E) - \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E)] + \\
& + \sigma_0^2 \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d} \Lambda_{s+1}(r_0 p_1) \Lambda_{s+1}(r_0 p_2) \times \\
& \times [\varphi(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_1, E)\varphi(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, E)\varphi(\mathbf{p}_+ - \mathbf{p}_2, E) - \\
& - \varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1, E)\varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, E)\varphi(\mathbf{p} - \mathbf{p}_2, E)] - \ldots,
\end{aligned} \tag{72}$$

где для функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ воспользуемся некоторым «исходным» приближением $\tilde{\varphi}(p, \eta)$, выбор конкретной формы которого неоднозначен, если нас интересует асимптотическое поведение $\varphi(\mathbf{p}, E)$ при $p \to 0$ и $E \to 0$ ($\eta \to 0$). Указанный выбор функции $\tilde{\varphi}(p, \eta)$ определяется следующими требованиями. Во-первых, необходимо учесть вклад в величину $\tilde{\varphi}(p, \eta)$ только ближайшей к началу $p = 0$ точки $p_+ = i\eta$. Во-вторых, в соответствии с ренормгрупповым свойством уравнения (53) асимптотика $\tilde{\varphi}(p, \eta)$ в окрестности точки $p_+ = i\eta$ должна иметь следующий вид:

$$\tilde{\varphi}(p, \eta) = O\big(\chi^{2(\mu-1)}\big), \quad \chi^2 \to 0, \tag{73}$$

а связь между величинами η^2 и E должна осуществляться посредством равенства (52), которое в этом случае преобразуется к виду

$$E = l\eta^2 + F(i\eta, E; \sigma_0; \tilde{\varphi}). \tag{74}$$

Наконец, функция $\tilde{\varphi}(p, \eta)$ должна обеспечивать сходимость всех интегралов ряда в (72). При этом параметры, характеризующие вид функции $\tilde{\varphi}(p, \eta)$, будут определены с помощью ренормгрупповых свойств уравнения (38).

Приведённое выше обсуждение функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ допускает использование в качестве $\tilde{\varphi}(p,\eta)$ выражения

$$\tilde{\varphi}(p,\eta) = A\chi^{2(\mu-1)}\bar{K}_{1-\mu}(\xi\chi), \tag{75}$$

в котором $\bar{K}_\kappa(z) = z^\kappa K_\kappa(z)$, $K_\kappa(z)$ — функция Макдональда, а значения параметров A, ξ и $\mu = \mu(d)$, где $0 < \mu < 1$, когда $2 \leqslant d < 4$ $(0 \leqslant s < 1)$, должны быть ещё найдены. Тогда согласно формулам (49) и (75) соответствующее приближение для функции $\psi(\mathbf{R}, E)$ есть

$$\tilde{\psi}(R,\eta) = (2\pi)^{-d/2}A\varrho^{-2\nu}\bar{K}_\nu(\eta\varrho), \tag{76}$$

где $\varrho^2 = R^2 + \xi^2$, $\nu \equiv \mu + s$. Если учесть условие нормировки (58) функции

$$X(x,y,b) = l\chi^2\tilde{\varphi}(p,\eta) \tag{77}$$

в точке $\chi^2 = \lambda$, то из (75) и (77) следует, что $A^{-1} = l\lambda^\mu \bar{K}_{1-\mu}(\xi\sqrt{\lambda})$. Использование здесь функции $K_\kappa(z)$, когда $0 < \kappa < 1$, обусловлено её известными асимптотическими свойствами [2]

$$\frac{2^{1-\kappa}}{\Gamma(\kappa)}\bar{K}_\kappa(z) = 1 - \frac{\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa} + \frac{1}{(1-\kappa)}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + O\big(z^{2(1+\kappa)}\big), \quad z \to 0,$$

адекватно передающими характер поведения функции $\varphi(p,E)$ при $p \to 0$ и $E \to 0$ $(\eta \to 0)$. Подставляя выражение (75) в равенство (74) и учитывая, что основной вклад в величину $F(i\eta, E; \sigma_0; \tilde{\varphi})$ вносит интегрирование в (72) по тем областям, в которых значения переменных $p_1, p_2, \ldots$ малы, мы получим, что

$$E = \tilde{A}\sigma_0\eta^{2\nu} + O(l\eta^2), \quad \eta \to 0, \tag{78}$$

где $\tilde{A}/A = \Gamma(1-\nu)/(2\pi)^{1+s}2^{1+\nu}\nu$.

Чтобы найти значение параметра μ, воспользуемся условием нормировки

$$\int\limits_{\mathbf{R}^d} \tilde{W}_I(\mathbf{R}, L)\, d\mathbf{R} = 1 \tag{79}$$

для плотности вероятности $\tilde{W}(\mathbf{R}, L)$,

$$\tilde{W}_I(\mathbf{R}, L) = \Bigg[\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i}\exp(LE)\tilde{\varphi}(0,\eta)\Bigg]^{-1} \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i}\exp(LE)\tilde{\psi}(\mathbf{R},\eta), \tag{80}$$

определяемой в рассматриваемом приближении с помощью формул (49) и (50). Теперь мы можем получить асимптотическую оценку для $\tilde{W}(\mathbf{R}, L)$, когда $L \to \infty$, но при этом значение R остаётся фиксированным.

Для этого проведём разрез в комплексной плоскости переменной E вдоль отрицательной вещественной оси и в интегралах равенства (80) сдвинем вертикальный контур $(C - i\infty, C + i\infty)$ интегрирования по E бесконечно далеко в левую полуплоскость, обходя при этом особые точки подынтегральных функций. Среди всех особых точек точка $E_0 = 0$ имеет наибольшую вещественную часть, и поэтому наибольший вклад в величину $\tilde{W}(\mathbf{R}, L)$ при $L \to \infty$ вносит результат интегрирования в (80) по той части контура, которая охватывает разрез $(-\infty, 0]$ указанной плоскости. Если теперь обозначить через $E_- = z\exp(-i\pi)$ и $E_+ = z\exp(i\pi)$, где $z > 0$, значения переменной E соответственно на нижнем и на верхнем берегах разреза $(-\infty, 0]$ и в формуле (80) учесть результат интегрирования лишь по контуру, охватывающему этот разрез, то для асимптотики функции $\tilde{W}(\mathbf{R}, L)$ при $L \to \infty$ мы получим следующее выражение:

$$\tilde{W}_I(\mathbf{R}, L) \sim \Big[\int\limits_0^\infty \exp(-Lz)\Delta\tilde{\varphi}(z)\,dz\Big]^{-1} \int\limits_0^\infty \exp(-Lz)\Delta\tilde{\psi}(\mathbf{R}, z)\,dz, \quad L \to \infty, \quad (81)$$

где

$$\Delta\tilde{\varphi}(z) \equiv \tilde{\varphi}(0, \eta_+) - \tilde{\varphi}(0, \eta_-) = A\big[\eta_+^{2(\mu-1)}\bar{K}_{1-\mu}(\xi\eta_+) - \eta_-^{2(\mu-1)}\bar{K}_{1-\mu}(\xi\eta_-)\big],$$
$$\Delta\tilde{\psi}(\mathbf{R}, z) \equiv \tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta_+) - \tilde{\psi}(\mathbf{R}, \eta_-) = \frac{A}{(2\pi)^{d/2}\rho^{2\nu}}[\bar{K}_\nu(\rho\eta_+) - \bar{K}_\nu(\rho\eta_-)],$$

а переменные $\eta_- = \eta_-(z)$ и $\eta_+ = \eta_+(z)$ в соответствии с (78) связаны с величиной z вблизи точки $E_0 = 0$ равенствами

$$z\exp(-i\pi) = \tilde{A}\sigma_0\eta_-^{2\nu} + O(l\eta_-^2), \quad z\exp(i\pi) = \tilde{A}\sigma_0\eta_+^{2\nu} + O(l\eta_+^2), \quad \eta_\pm \to 0.$$

Асимптотическая оценка интегралов в (81) при $L \to \infty$ даёт

$$\tilde{W}_I(\mathbf{R}, L) \sim \frac{CR^{2(1-\nu)}}{(A\sigma_0 L)^{(2-\mu)/\nu}} \frac{\exp(i\pi/\nu) - \exp(-i\pi/\nu)}{\exp[i\pi(\mu-1)/\nu] - \exp[-i\pi(\mu-1)/\nu]}, \quad L \to \infty, \quad (82)$$

где C обозначает положительную постоянную, которая может принимать в разных формулах разные значения. Обратимся теперь к равенству (79), из которого вытекает условие

$$\operatorname{Im}\tilde{W}_I(\mathbf{R}, L) = 0. \quad (83)$$

Используя асимптотическое выражение (82) в равенстве (83) и принимая во внимание условие (70), находим, что

$$\mu = \frac{2}{3}(1-s) \quad \left(\mu = \frac{4-d}{3}\right), \quad \nu = \frac{s+2}{3} \quad \left(\nu = \frac{d+2}{6}\right), \quad (84)$$

и следовательно,

$$\tilde{W}_I(\mathbf{R}, L) \sim \frac{CR^\mu}{(A\sigma_0 L)^2}, \quad L \to \infty.$$

Здесь следует отметить, что отличие поведения последнего выражения от асимптотики

$$W^{(0)}(\mathbf{R}, L) \sim (4\pi l L)^{-d/2}, \quad L \to \infty,$$

уменьшается, когда размерность d увеличивается, приближаясь к $d = 4$. Этот вывод можно объяснить убыванием эффекта, обусловленного существованием запрета на самопересечения струны, с ростом размерности пространства $\mathbf{R}^d$.

Далее необходимо проверить, будет ли выражение (56) с приведённым в (82) значением μ удовлетворять уравнению (66). Для этого обратимся к формуле (72) и в рассматриваемом приближении вычислим асимптотику функции $\Psi(p^2, 0; \sigma; \varphi)$ при $p \to 0$. Равенство (56) примет вид

$$X^{-1} = 1 - \alpha A^3 \sigma_0^2 l^{-1} \ln(\xi^2 p^2) + \Omega(A, \xi) + O(\xi^2 p^2), \quad p \to 0, \tag{85}$$

где $\alpha = \Gamma^3(\nu)/16(2\pi)^d \Gamma(3\nu)$, а не зависящая от p величина $\Omega(A, \xi)$ связывает указанные в ней параметры с величинами l и σ_0. Чтобы определить значения параметров A и ξ, мы воспользуемся равенствами $[X]_{p^2=\lambda} = 1$ и $\alpha A^3 \sigma_0^2 = \mu l$, которые вместе с приведённым выше условием $Al\lambda^\mu \bar{K}_{1-\mu}(\xi\sqrt{\lambda}) = 1$ позволяют в принципе найти искомые параметры. Тогда из (85) следует что $[\partial X/\partial \ln p^2]_{p^2=\lambda} = \mu$.

Таким образом, соотношения между всеми параметрами в этой задаче установлены и тем самым функции $\tilde{\varphi}(p, \eta)$ и $\tilde{\psi}(R, \eta)$ в формулах (75) и (76) вполне определены. Это позволяет найти искомую асимптотику функции $\tilde{W}(\mathbf{R}, L)$, когда $R/l \to \infty$ и $L/l \to \infty$, но отношение R/L фиксировано и мало. В итоге главный член асимптотического разложения функции $\tilde{W}(\mathbf{R}, L)$ имеет вид

$$\tilde{W}(\mathbf{R}, L) \sim C_d \tilde{R}^{-d} Z^{(4-d)D/6} \exp(-Z^D)[1 + O(Z^{-D})],$$

где

$$Z = \frac{R}{\tilde{R}}, \quad \tilde{R} = c_d(\sigma_0 l L^3)^{1/(d+2)}, \quad D = \frac{d+2}{d-1},$$

а c_d и C_d — вполне определённые положительные постоянные.

Случай $d = 4$ является особым и требует отдельного изучения. Тем не менее полученный результат позволяет предположить, что в случае $d > 4$ асимптотика функции $\tilde{W}(\mathbf{R}, L)$ при указанных выше условиях будет иметь вид нормального распределения. Это означает, что запрет на самопересечения в этом случае не оказывает существенного влияния на характер распределения расстояния между концами рассматриваемой модели струны.

Литература

[1] Алхимов В. И. Случайный процесс в однородном гауссовском поле // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 3—21.

[2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1966.

[3] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.

[4] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[5] Титчмарш Э. Теория функций. — М.: Наука, 1980.