Оценки высоты в смысле Ширшова и на количество фрагментов малого периода

А. Я. БЕЛОВ
Московский институт открытого образования,
Университет Якобса, Бремен, Германия
e-mail: kanel@mccme.ru

М. И. ХАРИТОНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: mikhailo.kharitonov@gmail.com

УДК 512.5+512.64+519.1

Ключевые слова: теорема Ширшова о высоте, комбинаторика слов, n-разбиваемое слово, теорема Дилуорса, проблемы бернсайдовского типа, теория Рамсея.

Аннотация

Работа посвящена получению оценок в теореме Ширшова о высоте. Слово W называется *n-разбиваемым*, если его можно представить в виде $W = W_0 W_1 \cdots W_n$, где подслова $W_1, \ldots, W_n$ идут в порядке лексикографического убывания. Из не n-разбиваемых слов состоит базис алгебры с тождеством степени n. А. И. Ширшов показал, что множество слов, не являющихся n-разбиваемыми, над алфавитом из l букв имеет ограниченную высоту h над Y — множеством слов степени не выше $n-1$. Мы показываем, что $h < \Phi(n,l)$, где $\Phi(n,l) = 2^{87} l \cdot n^{12\log_3 n + 48}$.

Пусть l, n и $d \geqslant n$ — некоторые натуральные числа. Тогда все слова над l-буквенном алфавитом длины больше, чем $\Psi(n,d,l)$, либо содержат x^d, либо являются n-разбиваемыми, где $\Psi(n,d,l) = 2^{18} l (nd)^{3\log_3(nd)+13} d^2$.

В 1993 году Е. И. Зельманов поставил следующий вопрос в «Днестровской тетради»: пусть $F_{2,m}$ — свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по m? В работе показано, что в l-порождённой ассоциативной алгебре с тождеством $x^d = 0$ класс нильпотентности меньше, чем $\Psi(d,d,l)$. Тем самым получаются субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности ниль-алгебр для произвольной характеристики. Изначальная оценка высоты у А. И. Ширшова носила рекурсивный характер, в 1982 году была получена двойная экспонента, в 1992 году — экспоненциальная оценка.

Доказательство использует идею В. Н. Латышева, связанную с применением теоремы Дилуорса к исследованию не n-разбиваемых слов. Нам представляется, что теорема о высоте имеет глубокую связь с задачами современной комбинаторики, в частности рамсеевского типа. С помощью такого рода соображений получаются верхние и нижние оценки количества периодов длины 2, 3, $n-1$ в не n-разбиваемом слове, отличающиеся только постоянным множителем.

Abstract

A. Ya. Belov, M. I. Kharitonov, Subexponential estimates in the height theorem and estimates on numbers of periodic parts of small periods, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 21—54.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 21—54.

The paper is devoted to subexponential estimates in Shirshov's height theorem. A word W is *n-divisible* if it can be represented in the form $W = W_0W_1\cdots W_n$, where $W_1 \prec W_2 \prec \cdots \prec W_n$. If an affine algebra A satisfies a polynomial identity of degree n, then A is spanned by non n-divisible words of generators $a_1 \prec \cdots \prec a_l$. A. I. Shirshov proved that the set of non n-divisible words over an alphabet of cardinality l has bounded height h over the set Y consisting of all words of degree $\leqslant n-1$. We show that $h < \Phi(n,l)$, where $\Phi(n,l) = 2^{87}l\cdot n^{12\log_3 n+48}$.

Let l, n, and $d \geqslant n$ be positive integers. Then all words over an alphabet of cardinality l whose length is greater than $\Psi(n,d,l)$ are either n-divisible or contain the dth power of a subword, where $\Psi(n,d,l) = 2^{18}l(nd)^{3\log_3(nd)+13}d^2$.

In 1993, E. I. Zelmanov asked the following question in the Dniester Notebook: Suppose that $F_{2,m}$ is a 2-generated associative ring with the identity $x^m = 0$. Is it true that the nilpotency degree of $F_{2,m}$ has exponential growth? We give the definitive answer to E. I. Zelmanov by this result. We show that the nilpotency degree of the l-generated associative algebra with the identity $x^d = 0$ is smaller than $\Psi(d,d,l)$. This implies subexponential estimates on the nilpotency index of nil-algebras of arbitrary characteristic. Shirshov's original estimate was just recursive, in 1982 double exponent was obtained, and an exponential estimate was obtained in 1992.

Our proof uses Latyshev's idea of an application of the Dilworth theorem. We think that Shirshov's height theorem is deeply connected to problems of modern combinatorics. In particular, this theorem is related to the Ramsey theory. We obtain lower and upper estimates of the number of periods of length 2, 3, $n-1$ in some non n-divisible word. These estimates differ only by a constant.

1. Введение

1.1. Теорема Ширшова о высоте

В 1958 году А. И. Ширшов доказал свою знаменитую теорему о высоте [19, 20].

Определение 1.1. Назовём слово W *n-разбиваемым*, если W можно представить в виде $W = vu_1u_2\cdots u_n$ так, чтобы $u_1 \succ u_2 \succ \ldots \succ u_n$.

В этом случае при любой нетождественной перестановке σ подслов u_i получается слово $W_\sigma = vu_{\sigma(1)}u_{\sigma(2)}\cdots u_{\sigma(n)}$, лексикографически меньшее W. Это свойство некоторые авторы берут за основу определения понятия n-разбиваемости.

Определение 1.2. Назовём PI-алгебру A алгеброй *ограниченной высоты* $h = \mathrm{Ht}_Y(A)$ *над множеством слов* $Y = \{u_1, u_2, \ldots\}$, если h — минимальное число, такое что любое слово x из A можно представить в виде

$$x = \sum_i \alpha_i u_{j_{(i,1)}}^{k_{(i,1)}} u_{j_{(i,2)}}^{k_{(i,2)}} \cdots u_{j_{(i,r_i)}}^{k_{(i,r_i)}},$$

причём $\{r_i\}$ не превосходят h. Множество Y называется *базисом Ширшова* для A.

Теорема Ширшова о высоте [19, 20]. *Множество всех не n-разбиваемых слов в конечно порождённой алгебре с допустимым полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту H над множеством слов степени не выше $n-1$.*

Из теоремы о высоте вытекает решение ряда проблем теории колец (см. ниже). Проблемы бернсайдовского типа, связанные с теоремой о высоте, рассмотрены в обзоре [41]. Авторы убеждены, что теорема Ширшова о высоте является фундаментальным фактом комбинаторики слов безотносительно к приложениям к PI-теории. (Никакие наши доказательства не выходят за рамки работы со словами.) Специалисты по комбинаторике данный факт должным образом пока не оценили. Что касается самого понятия *n-разбиваемости*, то оно также представляется фундаментальным. Оценки, полученные В. Н. Латышевым на $\xi_n(k)$ — количество не n-разбиваемых полилинейных слов от k символов, — привели к фундаментальным результатам в PI-теории. Вместе с тем это количество есть не что иное, как количество расстановок чисел от 1 до k, таких что никакие n чисел (не обязательно стоящие подряд) не идут в порядке убывания. Это также перечисление всех перестановочно упорядоченных множеств диаметра n. (Множество называется *перестановочно упорядоченным*, если его порядок есть пересечение двух линейных порядков.)

Из теоремы о высоте вытекает положительное решение проблем бернсайдовского типа для PI-алгебр. В самом деле, пусть в ассоциативной алгебре над полем выполняется полиномиальное тождество $f(x_1,\ldots,x_n)=0$. Тогда в ней выполняется и допустимое полилинейное тождество (т. е. полиномиальное тождество, у которого хотя бы один коэффициент при членах высшей степени равен единице)

$$x_1x_2\cdots x_n=\sum_\sigma \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)},$$

где α_σ принадлежат основному полю. В этом случае если

$$W=vu_1u_2\cdots u_n$$

является n-разбиваемым, то для любой перестановки σ слово

$$W_\sigma=vu_{\sigma(1)}u_{\sigma(2)}\cdots u_{\sigma(n)}$$

лексикографически меньше слова W, т. е. n-разбиваемое слово можно представить в виде линейной комбинации лексикографически меньших слов. Значит, PI-алгебра имеет базис из не n-разбиваемых слов. В силу теоремы Ширшова о высоте PI-алгебра имеет ограниченную высоту. Как следствие, имеем, что если в PI-алгебре выполняется тождество $x^n=0$, то эта алгебра нильпотентна, т. е. все её слова длины больше, чем некоторое N, тождественно равны 0. Обзоры, посвящённые теореме о высоте, содержатся в [15, 22, 30—32].

Из этой теоремы вытекает положительное решение проблемы Куроша и других проблем бернсайдовского типа для PI-колец. Ведь если Y — базис Ширшова и все элементы из Y алгебраичны, то алгебра A конечномерна. Тем самым теорема Ширшова явно указывает множество элементов, алгебраичность которых ведёт к конечномерности всей алгебры. Из этой теоремы вытекает следствие.

Следствие 1.3 (А. Береле). *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра. Тогда*

$$\mathrm{GK}(A)<\infty.$$

$\mathrm{GK}(A)$ — это *размерность Гельфанда—Кириллова алгебры* A,

$$\mathrm{GK}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln V_A(n)}{\ln(n)},$$

где $V_A(n)$ — *функция роста алгебры* A, т. е. размерность векторного пространства, порождённого словами степени не выше n от образующих A.

В самом деле, достаточно заметить, что число решений неравенства

$$k_1|v_1| + \ldots + k_h|v_h| \leqslant n,$$

где $h \leqslant H$, превосходит N^H, и потому $\mathrm{GK}(A) \leqslant \mathrm{Ht}(A)$.

Число $m = \deg(A)$ будет обозначать *степень алгебры*, или минимальную степень тождества, которое в ней выполняется. $n = \mathrm{Pid}(A)$ — *сложность* алгебры A, или максимальное k, такое что $\mathbb{M}_k$ — алгебра матриц размера k — принадлежит многообразию $\mathrm{Var}(A)$, порождённому алгеброй A.

Вместо понятия *высоты* иногда удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты*.

Определение 1.4. Алгебра A имеет *существенную высоту* $h = H_{\mathrm{Ess}}(A)$ над конечным множеством Y, называемым *s-базисом алгебры* A, если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что A линейно представима элементами вида $t_1 \cdot \ldots \cdot t_l$, где $l \leqslant 2h+1$ и для всех i $t_i \in D$ или $t_i = y_i^{k_i}$, $y_i \in Y$, причём множество таких i, что $t_i \notin D$, содержит не более h элементов. Аналогично определяется *существенная высота* множества слов.

Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и «прокладок» ограниченной длины. Существенная высота — это число таких периодических кусков, а обычная ещё учитывает «прокладки».

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы.

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте?
2. Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту? В частности, какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?
3. Как устроен вектор степеней $(k_1, \ldots, k_h)$? Прежде всего, какие множества компонент этого вектора являются существенными, т. е. какие наборы k_i могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота? Верно ли, что множество векторов степеней обладает теми или иными свойствами регулярности?
4. Как оценить высоту?

Перейдём к обсуждению поставленных вопросов.

1.2. Неассоциативные обобщения

Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близких к ассоциативным. С. В. Пчелинцев [12] доказал её для альтернативного и $(-1,1)$ случаев, С. П. Мищенко [11] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В [1] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, асимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.

1.3. Базисы Ширшова

Пусть A — PI-алгебра и подмножество $M \subseteq A$ является её s-базисом. Тогда если все элементы множества M алгебраичны над K, то алгебра A конечномерна (проблема Куроша). Ограниченность существенной высоты над Y влечёт «положительное решение проблемы Куроша над Y». Обратное утверждение менее тривиально.

Теорема 1.5 (А. Я. Белов).

1. *Пусть A — градуированная PI-алгебра, Y — конечное множество однородных элементов. Тогда если при всех n алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то Y — s-базис A. Если при этом Y порождает A как алгебру, то Y — базис Ширшова алгебры A.*
2. *Пусть A — PI-алгебра, $M \subseteq A$ — некоторое курошево подмножество в A. Тогда M — s-базис алгебры A.*

$Y^{(n)}$ обозначает идеал, порождённый n-ми степенями элементов из Y. Множество $M \subset A$ называется *курошевым*, если любая проекция $\pi\colon A \otimes K[X] \to A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$. Мотивировкой этого понятия служит следующий пример. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция π, такая что $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является s-базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Таким образом, ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение свойства *целости*.

Описание базисов Ширшова, состоящих из слов, заключено в следующей теореме.

Теорема 1.6 [22, 23]. *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \mathrm{Pid}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряжённое к некоторой степени слова u.*

Аналогичный результат был независимо получен Г. П. Чекану и В. Дренским. Вопросы, связанные с локальной конечностью алгебр и с алгебраическими множествами слов, степени не выше сложности алгебры, исследовались в [14,15,25—28,40]. В этих же работах обсуждались вопросы, связанные с обобщением теоремы о независимости.

1.4. Существенная высота

Ясно, что размерность Гельфанда—Кириллова оценивается существенной высотой и что s-базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он порождает A как алгебру. В представимом случае имеет место и обратное утверждение.

Теорема 1.7 (А. Я. Белов [22]). *Пусть A — конечно порождённая представимая алгебра, и пусть $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A) < \infty$. Тогда $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A) = \mathrm{GK}(A)$.*

Следствие 1.8 (В. Т. Марков). *Размерность Гельфанда—Кириллова конечно порождённой представимой алгебры — целое число.*

Следствие 1.9. *Если $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A) < \infty$ и алгебра A представима, то $H_{\mathrm{Ess}\,Y}(A)$ не зависит от выбора s-базиса Y.*

В этом случае размерность Гельфанда—Кириллова также равна существенной высоте в силу локальной представимости относительно свободных алгебр.

Хотя в представимом случае размерность Гельфанда—Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо, тем не менее даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо, а именно может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных диофантовых уравнений [22]. Вот почему существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален [2].

1.5. n-разбиваемость и теорема Дилуорса

Значение понятия *n-разбиваемости* выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества (*полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раза). В. Н. Латышев применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не являющихся m-разбиваемыми полилинейных слов степени n над алфавитом $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (см. [36]). Эта оценка — $(m-1)^{2n}$, и она близка к реальности. Напомним эту теорему.

Теорема Дилуорса. *Пусть n — наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на n попарно непересекающихся цепей.*

Рассмотрим полилинейное слово W из n букв. Положим $a_i \succ a_j$, если $i > j$ и буква a_i стоит в слове W правее a_j. Условие не m-разбиваемости означает отсутствие антицепи из m элементов. Тогда по теореме Дилуорса все позиции (и, соответственно, буквы a_i) разбиваются на $m-1$ цепь. Поставим в соответствие каждой цепи свой цвет. Тогда раскраска позиций и раскраска букв однозначно определяет слово W, а число таких раскрасок не превосходит $(n-1)^m \times (n-1)^m = (n-1)^{2m}$.

Из данной оценки следует, что выполняются полилинейные тождества, отвечающие неприводимому модулю, диаграмма Юнга которого содержит квадрат n^4. Это, в свою очередь, во-первых, позволило получить прозрачное доказательство теоремы Регева о том, что тензорное произведение PI-алгебр снова является PI-алгеброй (см. [36]), во-вторых, установить существование разреженного тождества в общем случае, а также тождества Капелли в случае конечной порождённости (тем самым, в частности, доказать теорему о нильпотентности радикала) и, в-третьих, осуществить «супертрюк» А. Р. Кемера, сводящий изучение тождеств общих алгебр к изучению супертождеств конечнопорождённых супералгебр в нулевой характеристике. Смежные вопросы рассмотрены в [24, 38].

Вопросы, связанные с перечислением полилинейных слов, не являющихся n-разбиваемыми, имеют самостоятельный интерес. (Например, существует биекция между не 3-разбиваемыми словами и числами Каталана.) С одной стороны, это чисто комбинаторная задача, с другой стороны, она связана с рядом коразмерностей для алгебры общих матриц. Исследование полилинейных слов представляется чрезвычайно важным. В. Н. Латышев (см., например, [10]) поставил проблему конечной базируемости множества старших полилинейных слов для T-идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок. Из этой проблемы вытекает проблема Шпехта для полилинейных многочленов, имеется тесная связь с проблемой слабой нётеровости групповой алгебры бесконечной финитарной симметрической группы над полем положительной характеристики (для нулевой характеристики результат был установлен А. Залесским). Для решения проблемы Латышева надо уметь переводить свойства T-идеалов на язык полилинейных слов. В [1, 22] была предпринята попытка осуществить программу перевода структурных свойств алгебр на язык комбинаторики слов. На язык полилинейных слов такой перевод осуществить проще, в дальнейшем можно получить информацию и о словах общего вида.

В данной работе мы переносим технику В. Н. Латышева на неполилинейный случай, что позволяет получить субэкспоненциальную оценку в теореме Ширшова о высоте. Г. Р. Челноков предложил идею этого переноса в 1996 году.

1.6. Оценки высоты

Первоначальное доказательство А. И. Ширшова, хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им для алгебр Ли, в частности в доказательстве теоремы о свободе), давало только упрощённые рекурсивные оценки. Позднее А. Т. Колотов [8] получил оценку $\mathrm{Ht}(A) \leqslant l^{l^n}$ ($n = \deg(A)$, l — число образующих). А. Я. Белов в [21] показал, что $\mathrm{Ht}(n,l) < 2nl^{n+1}$. Экспоненциальная оценка теоремы Ширшова о высоте изложена также в [17, 23, 29]. Данные оценки улучшались в работах А. Клейна [34, 35]. В 2001 году Е. С. Чибриков в [18] доказал, что $\mathrm{Ht}(4,l) \geqslant (7k^2 - 2k)$. М. И. Харитонов получил в [16, 17, 33] верхние и нижние оценки на структуру кусочной периодичности. В 2011 году А. А. Лопатин [37] получил следующий результат.

Теорема 1.10. *Пусть $C_{n,l}$ — степень нильпотентности свободной l-порождённой алгебры, удовлетворяющей тождеству $x^n = 0$. Пусть p — характеристика* *базового поля алгебры — больше $n/2$. Тогда*

$$C_{n,l} < 4 \cdot 2^{n/2} l. \tag{1}$$

По определению $C_{n,l} \leqslant \Psi(n,n,l)$. Заметим, что для малых n оценка (1) меньше, чем полученная в данной работе оценка $\Psi(n,n,l)$, но при росте n оценка $\Psi(n,n,l)$ асимптотически лучше оценки (1).

Е. И. Зельманов поставил следующий вопрос в «Днестровской тетради» [7] в 1993 году.

Вопрос 1.11. Пусть $F_{2,m}$ — свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по m?

Наша работа отвечает на вопрос Е. И. Зельманова следующим образом: в действительности искомый класс нильпотентности растёт субэкспоненциально.

1.7. Полученные результаты

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1.12. *Высота множества не n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n,l)$, где*

$$\Phi(n,l) = E_1 l \cdot n^{E_2 + 12\log_3 n},$$

$E_1 = 4^{21\log_3 4 + 17}$, $E_2 = 30\log_3 4 + 10$.

Из данной теоремы путём некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $n \to \infty$

$$\Phi(n,l) < 2^{87} l \cdot n^{12\log_3 n + 48} = n^{12(1+o(1))\log_3 n},$$

а при фиксированном n и $l \to \infty$

$$\Phi(n,l) < C(n) l.$$

Доказательство теоремы 1.12 содержится также в [5].

Следствие 1.13. *Высота l-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n не превышает $\Phi(n,l)$.*

Кроме того, доказывается субэкспоненциальная оценка, которая лучше при малых n.

Теорема 1.14. *Высота множества не n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n,l)$, где*

$$\Phi(n,l) = 2^{40} l \cdot n^{38 + 8\log_2 n}.$$

Как следствие получаются субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности l-порождённых ниль-алгебр степени n для произвольной характеристики.

Другим основным результатом нашей работы является следующая теорема.

Теорема 1.15. *Пусть l, n и $d \geqslant n$ — некоторые натуральные числа. Тогда все l-порождённые слова длины не меньше $\Psi(n,d,l)$, где*

$$\Psi(n,d,l) = 4^{5+3\log_3 4} l (nd)^{3\log_3(nd)+(5+6\log_3 4)} d^2,$$

либо содержат x^d, либо являются n-разбиваемыми.

Из данной теоремы путём некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $nd \to \infty$

$$\Psi(n,d,l) < 2^{18} l (nd)^{3\log_3(nd)+13} d^2 = (nd)^{3(1+o(1))\log_3(nd)},$$

а при фиксированных n, d и $l \to \infty$

$$\Psi(n,d,l) < C(n,d)l.$$

Следствие 1.16. *Пусть l, d — некоторые натуральные числа. Пусть в ассоциативной l-порождённой алгебре A выполнено тождество $x^d = 0$. Тогда её индекс нильпотентности меньше, чем $\Psi(d,d,l)$.*

Кроме того, доказывается субэкспоненциальная оценка, которая лучше при малых n и d.

Теорема 1.17. *Пусть l, n и $d \geqslant n$ — некоторые натуральные числа. Тогда все l-порождённые слова длины не меньше $\Psi(n,d,l)$, где*

$$\Psi(n,d,l) = 256 l (nd)^{2\log_2(nd)+10} d^2,$$

либо содержат x^d, либо являются n-разбиваемыми.

Обозначение 1.18. Для вещественного числа x положим $\ulcorner x \urcorner := -[-x]$. Таким образом, мы округляем нецелые числа в большую сторону.

В процессе доказательства теоремы 1.12 доказывается следующая теорема, оценивающая существенную высоту.

Теорема 1.19. *Существенная высота l-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n меньше, чем $\Upsilon(n,l)$, где*

$$\Upsilon(n,l) = 2n^{3\ulcorner \log_3 n \urcorner + 4} l.$$

С целью дальнейшего улучшения оценок вводятся следующие определения.

Определение 1.20. Число h называется *малой выборочной высотой* с границей k слова W над множеством слов Z, если h — такое максимальное число, что у слова W найдётся h попарно непересекающихся циклически несравнимых подслов вида z^m, где $z \in Z$, $m > k$.

Определение 1.21. Число h называется *большой выборочной высотой* с границей k слова W над множеством слов Z, если h — такое максимальное число, что у слова W найдётся h попарно непересекающихся подслов вида z^m, где $z \in Z$, $m > k$, причём соседние подслова из этой выборки несравнимы.

Здесь и далее $k = 2n$.

Определение 1.22. Множество слов V имеет малую (большую) выборочную высоту h над некоторым множеством слов Z, если h является точной верхней гранью малых (больших) выборочных высот над Z его элементов.

Затем доказываются следующие нижние и верхние оценки на кусочную периодичность.

Теорема 1.23. *Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 2 не больше $\daleth(2,l,n)$, где*

$$\daleth(2,l,n) = \frac{(2l-1)(n-1)(n-2)}{2}.$$

Теорема 1.24. *Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 2 при фиксированном n больше, чем $\Psi(n,l)$, где*

$$\Psi(n,l) = \frac{n^2 l}{2}\bigl(1 - o(l)\bigr).$$

Более точно,

$$\Psi(n,l) = \frac{(l-2^{n-1})(n-2)(n-3)}{2}.$$

Теорема 1.25. *Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 3 не больше $\daleth(3,l,n)$, где*

$$\daleth(3,l,n) = (2l-1)(n-1)(n-2).$$

Доказательства теорем 1.23—1.25 содержатся также в [16].

Теорема 1.26. *Малая выборочная высота множества не сильно n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины $n-1$ не больше $\daleth(n-1,l,n)$, где*

$$\daleth(n-1,l,n) = (l-2)(n-1).$$

Теорема 1.27. *Существенная высота l-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n меньше, чем $\Upsilon(n,l)$, где*

$$\Upsilon(n,l) = 8(l+1)^n n^5 (n-1).$$

Доказательства теорем 1.26, 1.27 содержатся также в [17].

Теорема 1.27 с помощью кодировки обобщает теорему 1.23 до доказательства ограниченности существенной высоты множества не n-разбиваемых слов.

Малую и большую выборочные высоты связывает следующая теорема.

Теорема 1.28. *Большая выборочная высота l-порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством нециклических слов длины k меньше $2(n-1)\daleth(k,l,n)$.*

В [6] установлено, что индекс нильпотентности l-порождённого ниль-полукольца степени n совпадает с индексом нильпотентности l-порождённого ниль-кольца степени n, причём сложение не обязательно коммутативно. (Там же приведены примеры ненильпотентных ниль почти колец индекса 2.) Таким образом, наши результаты распространяются и на случай полуколец.

1.8. О нижних оценках

Сравним полученные результаты с нижней оценкой для высоты. Высота алгебры A не меньше её размерности Гельфанда—Кириллова $\mathrm{GK}(A)$. Для алгебры l-порождённых общих матриц порядка n данная размерность равна $(l-1)n^2+1$ (см. [3,39]). В то же время минимальная степень тождества этой алгебры равна $2n$ согласно теореме Амицура—Левицкого. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.29. *Высота l-порождённой PI-алгебры степени n, а также множества не n-разбиваемых слов над l-буквенным алфавитом не меньше, чем $(l-1)n^2/4+1$.*

Нижние оценки на индекс нильпотентности были установлены Е. Н. Кузьминым в [9]. Е. Н. Кузьмин привёл пример 2-порождённой алгебры с тождеством $x^n=0$, индекс нильпотентности которой строго больше $(n^2+n-2)/2$. Вопрос нахождения нижних оценок рассматривается в [16].

В то же время для случая нулевой характеристики и счётного числа образующих Ю. П. Размыслов (см., например, [13]) получил верхнюю оценку на индекс нильпотентности, равную n^2.

Вначале мы докажем теорему 1.15. После этого займёмся оценками существенной высоты, т. е. оценками количества различных периодических фрагментов в не n-разбиваемом слове. Далее будет доказана основная теорема 1.12. Затем будут оценены перспективы улучшения полученных оценок.

Авторы признательны В. Н. Латышеву, А. В. Михалёву и всем участникам семинара «Теория колец», а также А. М. Райгородскому и всем участникам его семинара за внимание к работе.

2. Оценки на появление степеней подслов

2.1. План доказательства теоремы 1.15

В леммах 2.3, 2.4 и 2.6 описываются достаточные условия для присутствия периода длины d в не n-разбиваемом слове W. В лемме 2.7 связываются понятия

n-разбиваемости слова W и множества его хвостов. После этого определённым образом выбирается подмножество множества хвостов слова W, для которого можно применить теорему Дилуорса. Затем мы раскрашиваем хвосты и их первые буквы в соответствии с принадлежностью к цепям, полученным при применении теоремы Дилуорса.

Необходимо изучить, в какой позиции начинают отличаться соседние хвосты в каждой цепи. Интересно знать, с какой «частотой» эта позиция попадает в p-хвост для некоторого $p \leqslant n$. Потом мы несколько обобщаем наши рассуждения, деля хвосты на сегменты по несколько букв, а затем рассматривая, в какой сегмент попадает позиция, в которой начинают отличаться друг от друга соседние хвосты в цепи. В лемме 3.4 связываются рассматриваемые «частоты» для p-хвостов и kp-хвостов для $k = 3$.

В завершение доказательства строится иерархическая структура на основе применения леммы 3.4. Мы рассматриваем сначала сегменты n-хвостов, потом подсегменты этих сегментов и т. д. Далее рассматривается наибольшее возможное количество хвостов из подмножества, для которого была применена теорема Дилуорса, после чего оценивается сверху общее количество хвостов, а значит, и букв слова W.

2.2. Свойства периодичности и n-разбиваемости

Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ — алфавит, над которым проводится построение слов. Порядок $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_l$ индуцирует лексикографический порядок на словах над заданным алфавитом. Для удобства введём следующие определения.

Определение 2.1.

1. Если в слове v содержится подслово вида u^t, то будем говорить, что в слове v содержится период длины t.
2. Если слово u является началом слова v, то такие слова называют *несравнимыми*.
3. Слово v — *хвост* слова u, если найдётся слово w, такое что $u = wv$.
4. Слово v — *k-хвост* слова u, если v состоит из k первых букв некоторого хвоста u.

4′. *k-начало* — это то же самое, что и k-хвост.

5. Слово u *левее* слова v, если начало слова u левее начала слова v.

Обозначение 2.2.

1. Для вещественного числа x положим $\ulcorner x \urcorner := -[-x]$.
2. Обозначим через $|u|$ длину слова u.

Для доказательства потребуются следующие достаточные условия наличия периода.

Лемма 2.3. *В слове W длины x либо первые $[x/d]$ хвостов попарно сравнимы, либо найдётся период длины d.*

Доказательство. Пусть в слове W не нашлось слова вида u^d. Рассмотрим первые $[x/d]$ хвостов. Предположим, что среди них нашлись два несравнимых хвоста v_1 и v_2. Пусть $v_1 = u \cdot v_2$. Тогда $v_2 = u \cdot v_3$ для некоторого v_3. Следовательно, $v_1 = u^2 \cdot v_3$. Применяя такие рассуждения, получим, что $v_1 = u^d \cdot v_{d+1}$, так как $|u| < x/d$, $|v_2| \geqslant (d-1)x/d$. Противоречие. □

Лемма 2.4. *Если в слове V длины $k \cdot t$ не больше k различных подслов длины k, то V включает в себя период длины t.*

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k. База при $k = 1$ очевидна. Если находится не больше $k-1$ различных подслов длины $k-1$, то применяем индукционное предположение. Если существуют k различных подслов длины $k-1$, то каждое подслово длины k однозначно определяется своими первыми $k-1$ буквами. Значит, $V = v^t$, где v — k-хвост V. □

Определение 2.5.

1. Слово W — *n-разбиваемо в обычном смысле*, если найдутся $u_1, u_2, \ldots, u_n$, такие что $W = v \cdot u_1 \ldots u_n$, при этом $u_1 \succ \ldots \succ u_n$.
2. В текущем доказательстве слово W будем называть *n-разбиваемым в хвостовом смысле*, если найдутся хвосты $u_1, \ldots, u_n$, такие что $u_1 \succ u_2 \succ \ldots \succ u_n$ и для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ начало u_i левее начала u_{i+1}. Если не оговорено противное, то под *n-разбиваемыми* словами мы подразумеваем n-разбиваемые в хвостовом смысле слова.
3. Слово W *n-сократимое*, если либо W n-разбиваемо в обычном смысле, либо имеется слово вида $u^d \subseteq W$.

Теперь опишем достаточное условие n-сократимости и его связь с n-разбиваемостью.

Лемма 2.6. *Если в слове W найдутся n одинаковых непересекающихся подслов u длины $n \cdot d$, то W n-сократимое.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — хвосты слова u, которые начинаются с каждой из его первых n букв. Перенумеруем хвосты так, чтобы выполнялись неравенства $u_1 \succ \ldots \succ u_n$. Из леммы 2.3 следует, что они несравнимые. Рассмотрим подслово u_1, лежащее в самом левом экземпляре слова u, подслово u_2 — во втором слева,…, u_n — в n-м слева. Получили n-разбиение слова W. Противоречие. □

Лемма 2.7. *Если слово W является $4nd$-разбиваемым, то оно n-сократимое.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим порядковые номера позиций букв a_i, где $a_1 < a_2 < \ldots < a_{4nd}$, с которых начинаются хвосты u_i, разбивающие W. Положим $a_{4nd+1} = |W|$. Если W не n-сократимое, то найдётся такое число i, $1 \leqslant i \leqslant 4(n-1)d + 1$, что для любых $i \leqslant b < c \leqslant d < e \leqslant i + 4d$ $(a_c - a_b)$-хвост u_b и $(a_e - a_d)$-хвост u_d несравнимы. Сравним числа $a_{i+2d} - a_i$ и $a_{i+4d} - a_{i+2d}$. Можно считать, что $a_{i+4d} - a_{i+2d} \geqslant a_{i+2d} - a_i$. Пусть $a_{j+1} - a_j = \inf\limits_k (a_{k+1} - a_k)$, $0 \leqslant j < 2d$. Сравним числа j и d. Можно считать, что $j < d$. По предположению $(a_{2d} - a_j)$-хвост u_j и $(a_{2d} - a_{j+1})$-хвост u_{j+1} несравнимы с $(a_{4d} - a_{2d})$-хвостом u_{2d}. Так как $a_{4d} - a_{2d} \geqslant a_{2d} - a_j > a_{2d} - a_{j+1}$, то $(a_2d - a_j)$-хвост u_j и $(a_{2d} - a_{j+1})$-хвост u_{j+1} несравнимы между собой. Так как $(a_{2d} - a_j)/(a_{2d} - a_{j+1}) \leqslant (d+1)/d$, то $(a_{j+1} - a_j)$-хвост u_j в степени d содержится в $(a_2d - a_j)$-хвосте u_j. Противоречие. $\square$

Следствие 2.8. *Если слово W не n-разбиваемо в обычном смысле, то W не $4nd$-разбиваемо* (*в хвостовом смысле*).

Обозначение 2.9. Положим $p_{n,d} := 4nd - 1$.

Пусть W — не n-сократимое слово. Рассмотрим U — $[|W|/d]$-хвост слова W. Тогда W не $(p_{n,d}+1)$-разбиваемое. Пусть Ω — множество хвостов слова W, которые начинаются в U. Тогда по лемме 2.3 любые два элемента из Ω сравнимы. Естественным образом строится биекция между Ω, буквами U и натуральными числами от 1 до $|\Omega| = |U|$.

Введём такое слово θ, что θ лексикографически меньше любого слова.

Замечание 2.10. В доказательстве теоремы 1.15 все хвосты мы предполагаем лежащими в Ω.

3. Оценки на появление периодических фрагментов

Применим теорему Дилуорса. Для хвостов u и v положим $u < v$, если $u \prec v$ и, кроме того, u левее v. Тогда по теореме Дилуорса Ω можно разбить на $p_{n,d}$ цепей, где в каждой цепи $u \prec v$, если u левее v. Покрасим начальные позиции хвостов в $p_{n,d}$ цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Фиксируем натуральное число p. Каждому натуральному числу i от 1 до $|\Omega|$ поставим в соответствие $B^p(i)$ — упорядоченный набор из $p_{n,d}$ слов $\{f(i,j)\}$, построенных по следующему правилу: для каждого $j = 1, 2, \ldots, p_{n,d}$ положим

$$f(i,j) = \{\max f \leqslant i\colon f \text{ покрашено в цвет } j\}.$$

Если такого f не найдётся, то слово из $B^p(i)$ на позиции j считаем равным θ, в противном случае это слово считаем равным p-хвосту, который начинается с $f(i,j)$-й буквы.

Неформально говоря, мы наблюдаем, с какой скоростью хвосты «эволюционируют» в своих цепях, если рассматривать последовательность позиций слова W как ось времени.

3.1. Наборы $B^p(i)$, процесс на позициях

Лемма 3.1 (о процессе). *Дана последовательность S длины $|S|$, составленная из слов длины $k-1$. Каждое из них состоит из $k-2$ символов 0 и одного 1. Пусть S удовлетворяет следующему условию: если для некоторого $0 < s \leqslant k-1$ найдутся $p_{n,d}$ слов, в которых 1 стоит на s-м месте, то между первым и $p_{n,d}$-м* *из этих слов найдётся слово, в котором* 1 *стоит строго меньше чем на* s*-м месте*; $L(k-1)=\sup\limits_S |S|$. *Тогда* $L(k-1)\leqslant p_{n,d}^{k-1}-1$.

Доказательство. Справедливо $L(1)\leqslant p_{n,d}-1$. Пусть $L(k-1)\leqslant p_{n,d}^{k-1}-1$. Покажем, что $L(k)\leqslant p_{n,d}^{k}-1$. Рассмотрим слова, у которых символ 1 стоит на первом месте. Их не больше $p_{n,d}-1$. Между любыми двумя из них, а также перед первым и после последнего количество слов не больше $L(k-1)\leqslant p_{n,d}^{k-1}-1$. Получаем, что

$$L(k)\leqslant p_{n,d}-1+p_{n,d}\big((p_{n,d})^{k-1}-1\big)=p_{n,d}^{k}-1. \qquad \square$$

Нам требуется ввести некоторую величину, которая бы численно оценивала скорость «эволюции» наборов $B^p(i)$.

Определение 3.2. Положим

$$\psi(p):=\{\max k\colon B^p(i)=B^p(i+k-1)\}.$$

В частности, по лемме 2.4 $\psi(p_{n,d})\leqslant p_{n,d}d$.

Для заданного α определим разбиение последовательности первых $|\Omega|$ позиций i слова W на классы эквивалентности $\sim_\alpha$ следующим образом: $i\sim_\alpha j$, если $B^\alpha(i)=B^\alpha(j)$.

Предложение 3.3. *Для любых натуральных* $a<b$ *имеем, что* $\psi(a)\leqslant\psi(b)$.

Лемма 3.4 (основная). *Для любых натуральных чисел* a, k *верно неравенство*

$$\psi(a)\leqslant p_{n,d}^{k}\psi(k\cdot a)+k\cdot a.$$

Доказательство. Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $\sim_{k\cdot a}$. Получим последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все i_j и $B^{k\cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по $\sim_a$. Пусть он состоит из $B^{k\cdot a}(i_j)$ при $i_j\in[b,c)$. Обозначим через $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j\in[b,c-k\cdot a)$.

Фиксируем некоторое натуральное число r, $1\leqslant r\leqslant p_{n,d}$. Назовём все $(k\cdot a)$-начала цвета r, начинающиеся с позиций слова W из $\{i_j\}'$, представителями типа r. Все представители типа r будут попарно различны, так как они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $\sim_{k\cdot a}$. Разобьём каждый представитель типа r на k сегментов длины a. Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа r слева направо числами от 0 до $k-1$. Если найдутся $p_{n,d}+1$ представителей типа r, у которых совпадают первые $t-1$ сегментов, но которые попарно различны в t-м, где t — натуральное число, $1\leqslant t\leqslant k-1$, то найдутся две первые буквы t-го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по $\sim_a$.

Применим лемму 3.1 следующим образом: во всех представителях типа r, кроме самого правого, будем считать сегменты *единичными*, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа r отличается от предыдущего. Остальные сегменты считаем *нулевыми*.

Теперь можно применить лемму о процессе с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $p_{n,d}^{k-1}$ представителей типа r. Тогда в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $p_{n,d}^k$ членов. Таким образом, $c-b \leqslant p_{n,d}^k \psi(k\cdot a)+k\cdot a$. □

3.2. Завершение доказательств теорем 1.15 и 1.17

Пусть

$$a_0 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner}, \quad a_1 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner - 1}, \dots, \quad a_{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner} = 1.$$

При этом $|W| \leqslant d|\Omega| + d$ в силу леммы 2.3.

Так как набор $B^1(i)$ принимает не более $1+p_{n,d}l$ различных значений, то

$$|W| \leqslant d(1+p_{n,d}l)\psi(1)+d.$$

По лемме 3.4

$$\psi(1) < (p_{n,d}^3+p_{n,d})\psi(3) < (p_{n,d}^3+p_{n,d})^2\psi(9) < \dots < \\ < (p_{n,d}^3+p_{n,d})^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner}\psi(p_{n,d}) \leqslant (p_{n,d}^3+p_{n,d})^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner} p_{n,d} d.$$

Подставляя $p_{n,d}=4nd-1$, получаем $|W| < 4^{5+3\log_3 4} l (nd)^{3\log_3(nd)+(5+6\log_3 4)} d^2$. Отсюда получаем утверждение теоремы 1.15.

Доказательство теоремы 1.17 завершается так же, только вместо последовательности

$$a_0 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner}, \quad a_1 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner - 1}, \dots, \quad a_{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner} = 1$$

рассматривается последовательность

$$a_0 = 2^{\ulcorner \log_2 p_{n,d} \urcorner}, \quad a_1 = 2^{\ulcorner \log_2 p_{n,d} \urcorner - 1}, \dots, \quad a_{\ulcorner \log_2 p_{n,d} \urcorner} = 1.$$

4. Оценка существенной высоты

В данном разделе мы продолжаем доказывать основную теорему 1.12. Попутно доказывается теорема 1.19. Будем смотреть на позиции букв слова W как на ось времени, т. е. подслово u встретилось раньше подслова v, если u целиком лежит левее v внутри слова W.

4.1. Вычленение различных периодических фрагментов в слове W

Обозначим через s количество подслов слова W с периодом длины меньше n, в которых период повторяется больше $2n$ раз и которые попарно разделены сравнимыми с предыдущим периодом подсловами длины больше n. Пронумеруем их от начала к концу слова: $x_1^{2n}, x_2^{2n}, \dots, x_s^{2n}$. Таким образом,

$$W = y_0 x_1^{2n} y_1 x_2^{2n} \dots x_s^{2n} y_s.$$

Если найдётся такое i, что слово x_i длины не меньше n, то в слове x_i^2 найдутся n попарно сравнимых хвостов, а значит, слово x_i^{2n} n-разбиваемое. Получаем, что число s не меньше, чем существенная высота слова W над множеством слов длины меньше n.

Определение 4.1. Слово u назовём *нециклическим*, если u нельзя представить в виде v^k, где $k > 1$.

Определение 4.2. *Словоцикл* u — слово u со всеми его сдвигами по циклу.

Определение 4.3. *Циклическое слово* u — цикл из букв слова u, где после его последней буквы идёт первая.

Определение 4.4. Если любые два циклических сдвига слов u и v сравнимы, то назовём слова u и v *сильно сравнимыми*. Аналогично определяется сильная сравнимость словоциклов и циклических слов.

Далее мы будем пользоваться естественной биекцией между словоциклами и циклическими словами.

Определение 4.5. Слово W называется *сильно n-разбиваемым*, если его можно представить в виде $W = W_0W_1 \cdots W_n$, где подслова $W_1, \ldots, W_n$ идут в порядке лексикографического убывания и каждое из слов W_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, начинается с некоторого слова $z_i^k \in Z$, все z_i различны.

Лемма 4.6. *Если найдётся такое число m, $1 \leqslant m < n$, что существуют $2n-1$ попарно несравнимых слов длины m $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2n-1}}$, то W n-разбиваемое.*

Доказательство. Положим $x{:=}x_{i_1}$. Тогда в слове W найдутся непересекающиеся подслова $x^{p_1}v_1', \ldots, x^{p_{2n-1}}v_{2n-1}'$, где $p_1, \ldots, p_{2n-1}$ — некоторые натуральные числа, большие n, а $v_1', \ldots, v_{2n-1}'$ — некоторые слова длины m, сравнимые с x, $v_1' = v_{i_1}$. Тогда среди слов $v_1', \ldots, v_{2n-1}'$ найдутся либо n лексикографически больших x, либо n лексикографически меньших x. Можно считать, что $v_1', \ldots, v_n'$ лексикографически больше x. Тогда в слове W найдутся подслова $v_1', xv_2', \ldots, x^{n-1}v_n'$, идущие слева направо в порядке лексикографического убывания. □

Рассмотрим некоторое число m, $1 \leqslant m < n$. Разобьём все x_i длины m на классы эквивалентности по сильной несравнимости и выберем по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Пусть это слова $x_{i_1}, \ldots, x_{i'_s}$, где s' — некоторое натуральное число. Так как подслова x_i являются периодами, будем рассматривать их как словоциклы.

Обозначение 4.7. $v_k := x_{i_k}$.

Пусть $v(k,i)$, где i — натуральное число от 1 до m, — циклический сдвиг слова v_k на $k-1$ позиций вправо, т. е. $v(k,1) = v_k$, а первая буква слова $v(k,2)$ является второй буквой слова v_k. Таким образом, $\{v(k,i)\}_{i=1}^m$ — словоцикл слова v_k. Заметим, что для любых $1 \leqslant i_1,\ i_2 \leqslant p$, $1 \leqslant j_1,\ j_2 \leqslant m$ слово $v(i_1, j_1)$ сильно несравнимо со словом $v(i_2, j_2)$.

Замечание 4.8. Случаи $m = 2, 3, n-1$ более подробно рассмотрены в [16,17].

4.2. Применение теоремы Дилуорса

Рассмотрим множество $\Omega' = \{v(i,j)\}$, где $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Введём следующий порядок на словах $v(i,j)$: $v(i_1,j_1) \succ v(i_2,j_2)$, если

1) $v(i_1,j_1) > v(i_2,j_2)$;
2) $i_1 > i_2$.

Лемма 4.9. *Если в множестве Ω' для порядка $\succ$ найдётся антицепь длины n, то слово W n-разбиваемо.*

Доказательство. Пусть нашлась антицепь длины n из слов

$$v(i_1,j_1), v(i_2,j_2), \ldots, v(i_n,j_n), \quad i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n.$$

Если все неравенства между i_k строгие, то слово W n-разбиваемое по определению.

Предположим, что для некоторого числа r нашлись $i_{r+1} = \ldots = i_{r+k}$, где либо $r = 0$, либо $i_r < i_{r+1}$. Кроме того, пусть k — такое натуральное число, что либо $k = n - r$, либо $i_{r+k} < i_{r+k+1}$.

Слово $s_{i_{r+1}}$ периодическое, следовательно, оно представляется в виде произведения n экземпляров слова $v^2_{i_{r+1}}$. Слово $v^2_{i_{r+1}}$ содержит словоцикл $v_{i_{r+1}}$. Значит, в слове $s_{i_{r+1}}$ можно выбрать непересекающиеся подслова, идущие в порядке лексикографического убывания, равные $v(i_{r+1}, j_{r+1}), \ldots, v(i_{r+k}, j_{r+k})$ соответственно. Таким же образом поступаем со всеми множествами равных индексов в последовательности $\{i_r\}_{r=1}^n$. Получаем n-разбиваемость слова W. Противоречие. □

Значит, множество Ω' можно разбить на $n-1$ цепь.

Обозначение 4.10. Положим $q_n = (n-1)$.

4.3. Наборы $C^\alpha(i)$, процесс на позициях

Покрасим первые буквы слов из Ω' в q_n цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Покрасим также числа от 1 до $|\Omega'|$ в соответствующие цвета. Фиксируем натуральное число $\alpha \leqslant m$. Каждому числу i от 1 до $|\Omega'|$ поставим в соответствие упорядоченный набор слов $C^\alpha(i)$, состоящий из q_n слов по следующему правилу: для каждого $j = 1, 2, \ldots, q_n$ положим

$$\begin{aligned} f(i,j) = \{&\max f \leqslant i\colon \text{существует такое } k, \text{ что } v(f,k) \text{ раскрашено в цвет } j \\ &\text{и } \alpha\text{-хвост, который начинается с } f, \text{ состоит только из букв,} \\ &\text{являющихся первыми буквами хвостов из } \Omega'\}. \end{aligned}$$

Если такого f не найдётся, то слово из $C^\alpha(i)$ считаем равным θ, в противном случае это слово считаем равным α-хвосту слова $v(f,k)$.

Обозначение 4.11. Положим

$$\phi(a) = \{\max k\colon \text{для некоторого } i \text{ верно } C^a(i) = C^a(i+k-1)\}.$$

Для заданного $a \leqslant m$ определим разбиение последовательности словоциклов $\{i\}$ слова W на классы эквивалентности следующим образом: $i \sim_a j$, если $C^a(i) = C^a(j)$.

Заметим, что построенная конструкция во многом аналогична построенной в доказательстве теоремы 1.15. Обращаем внимание на схожесть $B^a(i)$ и $C^a(i)$, а также $\psi(a)$ и $\phi(a)$.

Лемма 4.12. $\phi(m) \leqslant q_n/m$.

Доказательство. Напомним, что словоциклы были пронумерованы. Рассмотрим словоциклы с номерами $i, i+1, \ldots, i+[q_n/m]$. Ранее было показано, что каждый словоцикл состоит из m различных слов. Рассмотрим теперь слова в словоциклах $i, i+1, \ldots, i+[q_n/m]$ как элементы множества Ω'. При таком рассмотрении у первых букв из словоциклов появляются свои позиции. Всего рассматриваемых позиций не меньше n. Следовательно, среди них найдутся две позиции одного цвета. Тогда в силу сильной несравнимости словоциклов имеет место утверждение леммы. □

Предложение 4.13. *Для любых натуральных $a < b$ имеем $\phi(a) \leqslant \phi(b)$.*

Лемма 4.14 (основная). *Для натуральных чисел a, k, таких что $ak \leqslant m$, верно неравенство*

$$\phi(a) \leqslant p_{n,d}^k \phi(k \cdot a).$$

Доказательство. Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $\sim_{k\cdot a}$. Получим последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все i_j и $C^{k\cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по $\sim_a$. Пусть он состоит из $C^{k\cdot a}(i_j)$ при $i_j \in [b, c)$. Обозначим через $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j \in [b, c)$.

Фиксируем некоторое натуральное число r, $1 \leqslant r \leqslant q_n$. Назовём все $k{\cdot}a$-начала цвета r, начинающиеся с позиций слова W из $\{i_j\}'$, представителями типа r. Все представители типа r будут попарно различны, так как они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $\sim_{k\cdot a}$. Разобьём каждый представитель типа r на k сегментов длины a. Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа r слева направо числами от 0 до $k-1$. Если найдутся q_n+1 представителей типа r, у которых совпадают первые $t-1$ сегментов, но которые попарно различны в t-м, где t — натуральное число, $1 \leqslant t \leqslant k-1$, то найдутся две первые буквы t-го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по $\sim_a$.

Применим лемму 3.1 следующим образом: во всех представителях типа r, кроме самого правого, будем считать сегменты *единичными*, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа r отличается от предыдущего. Остальные сегменты будем считать *нулевыми*.

Теперь мы можем применить лемму о процессе с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более q_n^{k-1} представителей типа r. Тогда в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более q_n^k членов. Таким образом, $c - b \leqslant q_n^k \phi(k \cdot a)$. □

4.4. Завершение доказательства теоремы 1.19

Пусть

$$a_0 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner}, \quad a_1 = 3^{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner - 1}, \ldots, \quad a_{\ulcorner \log_3 p_{n,d} \urcorner} = 1.$$

Подставляя эти a_i в леммы 4.14 и 4.12, получаем, что

$$\phi(1) \leqslant q_n^3 \phi(3) \leqslant q_n^9 \phi(9) \leqslant \ldots \leqslant q_n^{3^{\ulcorner \log_3 m \urcorner}} \phi(m) \leqslant q_n^{3^{\ulcorner \log_3 m \urcorner + 1}}.$$

Так как C_i^1 принимает не более $1 + q_n l$ различных значений, то

$$|\Omega'| < q_n^{3^{\ulcorner \log_3 m \urcorner + 1}} (1 + q_n l) < n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner + 2}} l.$$

По лемме 4.6 получаем, что количество x_i длины m меньше $2n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner + 3}} l$. Имеем, что количество всех x_i меньше $2n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner + 4}} l$, т. е. $s < 2n^{3^{\ulcorner \log_3 n \urcorner + 4}} l$. Таким образом, теорема 1.19 доказана.

5. Доказательство теоремы 1.14 и основной теоремы 1.12

5.1. План доказательства

Снова будем под *n-разбиваемым словом* подразумевать *n-разбиваемое* в обычном смысле. Сначала мы найдём необходимое количество фрагментов с длиной периода не меньше $2n$ в слове W. Это можно сделать, просто разбив слово W на подслова большой длины, к которым применяется теорема 1.15. Однако мы можем улучшить оценку, если сначала выделим в слове W периодический фрагмент с длиной периода не менее $4n$, а затем рассмотрим W_1 — слово W с «вырезанным» периодическим фрагментом u_1. У слова W_1 выделяем фрагмент с длиной периода не менее $4n$, после чего рассматриваем W_2 — слово W_1 с «вырезанным» периодическим фрагментом u_2. У слова W_2 так же вырезаем периодический фрагмент. Продолжаем этот процесс, подробнее описанный в алгоритме 5.2. Затем по вырезанным фрагментам мы восстанавливаем первоначальное слово W. После этого показывается, что в слове W подслово u_i чаще всего не является произведением большого количества несклеенных подслов. В лемме 5.4 доказывается, что применение алгоритма 5.2 даёт необходимое количество подслов слова W с длиной периода не меньше $2n$ среди вырезанных подслов.

5.2. Суммирование существенной высоты и степени нильпотентности

Обозначение 5.1. $\mathrm{Ht}(w)$ — высота слова w над множеством слов степени не выше n.

Рассмотрим слово W с высотой $\mathrm{Ht}(W) > \Phi(n,l)$. Теперь к нему применим следующий алгоритм.

Алгоритм 5.2.

Шаг 1. По теореме 1.15 в слове W найдётся подслово с длиной периода $4n$. Пусть $W_0 = W = u_1' x_{1'}^{4n} y_1'$, причём слово $x_{1'}$ нециклическое. Представим y_1' в виде $y_1' = x_{1'}^{r_2} y_1$, где r_2 — максимально возможное число. Слово u_1' представим как $u_1' = u_1 x_{1'}^{r_1}$, где r_1 наибольшее возможное. Обозначим через f_1 слово

$$W_0 = u_1 x_{1'}^{4n+r_1+r_2} y_1 = u_1 f_1 y_1.$$

Назовём позиции, входящие в слово f_1, *скучными*, последнюю позицию слова u_1 — *скучной типа* 1, вторую с конца позицию u_1 — *скучной типа* 2 и т. д., n-ю с конца позицию u_1 — *скучной типа* n. Положим $W_1 = u_1 y_1$.

Шаг k. Рассмотрим слова u_{k-1}, y_{k-1}, $W_{k-1} = u_{k-1} y_{k-1}$, построенные на предыдущем шаге. Если $|W_{k-1}| \geqslant \Phi(n,l)$, то применим теорему 1.15 к слову W с условием, что процесс в основной лемме 3.4 будет вестись только по позициям, не являющимся скучными, и скучным позициям типа больше ka, где k и a — параметры леммы 3.4. Таким образом, в слове W_{k-1} найдётся нециклическое подслово с длиной периода $4n$, так что

$$W_{k-1} = u_k' x_{k'}^{4n} y_k'.$$

При этом положим

$$r_1 := \sup\{r\colon u_k' = u_k x_{k'}^r\}, \quad r_2 := \sup\{r\colon y_k' = x_{k'}^r y_k\}.$$

(Отметим, что слова в наших рассуждениях могут быть пустыми.) Определим f_k из равенства

$$W_{k-1} = u_k x_{k'}^{4n+r_1+r_2} y_k = u_k f_k y_k.$$

Назовём позиции, входящие в слово f_k, *скучными*, последнюю позицию слова u_k — *скучной типа* 1, вторую с конца позицию u_k — *скучной типа* 2 и т. д., n-ю с конца позицию u_k — *скучной типа* n. Если позиция в процессе алгоритма определяется как скучная двух типов, то будем считать её скучной меньшего типа. Положим $W_k = u_k y_k$.

Обозначение 5.3. Проведём $4t+1$ шагов алгоритма 5.2. Рассмотрим первоначальное слово W. Для каждого натурального i из отрезка $[1, 4t]$ имеет место равенство

$$W = w_0 f_i^{(1)} w_1 f_i^{(2)} \cdots f_i^{(n_i)} w_{n_i}$$

для некоторых подслов w_j. Здесь $f_i = f_i^{(1)} \cdots f_i^{(n_i)}$. Также мы считаем, что при $1 \leqslant j \leqslant n_i - 1$ подслово w_j непустое. Пусть $s(k)$ — количество таких индексов $i \in [1, 4t]$, что $n_i = k$.

Для доказательства теоремы 1.15 требуется найти как можно больше длинных периодических фрагментов. Помочь в этом может следующая лемма.

Лемма 5.4. $s = s(1) + s(2) \geqslant 2t$.

Доказательство. Назовём подслово U слова W *монолитным*, если

1) U является произведением слов вида $f_i^{(j)}$;
2) U не является подсловом слова, для которого выполняется предыдущее свойство.

Пусть после $(i-1)$-го шага алгоритма 5.2 в слове W содержится k_{i-1} монолитных подслов. Заметим, что $k_i \leqslant k_{i-1} - n_i + 2$. Тогда если $n_i \geqslant 3$, то $k_i \leqslant k_{i-1} - 1$. Если же $n_i \leqslant 2$, то $k_i \leqslant k_{i-1} + 1$. При этом $k_1 = 1$, $k_t \geqslant 1 = k_1$. Лемма доказана. □

Следствие 5.5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leqslant 10t \leqslant 5s.$$

Доказательство. Из доказательства леммы 5.4 получаем, что $\sum\limits_{n_i \geqslant 3} (n_i - 2) \leqslant$ $\leqslant 2t$. По определению $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s(k) = 4t$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2s(k) = 8t$. Складывая эти два неравенства и применяя лемму 5.4, получаем требуемое неравенство. □

Предложение 5.6. *Высота слова W будет не больше*

$$\Psi(n, 4n, l) + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leqslant \Psi(n, 4n, l) + 5s.$$

Далее будем рассматривать только f_i с $n_i \leqslant 2$.

Обозначение 5.7. Если $n_i = 1$, положим $f_i' := f_i$.

Если $n_i = 2$, положим $f_i' := f_i^{(j)}$, где $f_i^{(j)}$ — слово с наибольшей длиной между $f_i^{(1)}$ и $f_i^{(2)}$.

Слова f_i' упорядочим в соответствии с их близостью к началу W. Получим последовательность $f_{m_1}', \ldots, f_{m_{s}}'$, где $s' = s(1) + s(2)$. Положим $f_i'' := f_{m_i}'$. Пусть $f_i'' = w_i' x_{i''}^{p_{i''}} w_i''$, где хотя бы одно из слов w_i', w_i'' пустое.

Замечание 5.8. Можно считать, что первыми шагами алгоритма 5.2 мы выбрали все те f_i, для которых $n_i = 1$.

Теперь рассмотрим z_j' — подслова W вида

$$z_j' = x_{(2j-1)''}^{p_{(2j-1)''} + \daleth} v_j, \quad \daleth \geqslant 0, \quad |v_j| = |x_{(2j-1)''}|,$$

при этом v_j не равно $x_{(2j-1)''}$, начало подслова z_j' совпадает с началом периодического подслова в f_{2j-1}''. Покажем, что z_j' не пересекаются как подслова слова W.

В самом деле, если $f_{2j-1}'' = f_{m_{2j-1}}$, то $z_j' = f_{m_{2j-1}} v_j$. Если же $f_{2j-1}'' = f_{m_{2j-1}}^{(k)}$, $k = 1, 2$, а подслово z_j' пересекается с подсловом z_{j+1}', то $f_{2j}'' \subset z_i'$. Так как слова $x_{(2j)''}$ и $x_{(2j-1)''}$ нециклические, то $|x_{(2j)''}| = |x_{(2j-1)''}|$. Но тогда длина периода в z_j' не меньше $4n$, что противоречит замечанию 5.8.

Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 5.9. *В слове W высоты не более $\Psi(n,4n,l)+5s'$ найдётся не менее s' непересекающихся периодических подслов, в которых период повторится не менее $2n$ раз. Кроме того, между любыми двумя элементами данного множества периодических подслов найдётся подслово с длиной периода более левого из выбранных элементов.*

5.3. Завершение доказательств теоремы 1.14 и основной теоремы 1.12

Подставляя в лемму 5.9 вместо числа s' значение s из доказательства теоремы 1.19, получаем, что высота W не больше, чем

$$\Psi(n,4n,l)+5s < E_1 l\cdot n^{E_2+12\log_3 n},$$

где $E_1 = 4^{21\log_3 4+17}$, $E_2 = 30\log_3 4+10$. Тем самым мы получили утверждение основной теоремы 1.12.

Доказательство теоремы 1.14 завершается так же, только в пункте 4.4 вместо последовательности

$$a_0 = 3^{\ulcorner\log_3 p_{n,d}\urcorner},\quad a_1 = 3^{\ulcorner\log_3 p_{n,d}\urcorner-1},\ldots,\quad a_{\ulcorner\log_3 p_{n,d}\urcorner}=1$$

рассматривается последовательность

$$a_0 = 2^{\ulcorner\log_2 p_{n,d}\urcorner},\quad a_1 = 2^{\ulcorner\log_2 p_{n,d}\urcorner-1},\ldots,\quad a_{\ulcorner\log_2 p_{n,d}\urcorner}=1,$$

а значение $\Psi(n,4n,l)$ соответствует значению из теоремы 1.17.

6. Оценки кусочной периодичности

Представленная вниманию читателя техника, по всей видимости, позволяет улучшить полученную в данную работе оценку, но при этом она останется только субэкспоненциальной. Для получения полиномиальной оценки, если она существует, требуются новые идеи и методы.

В начале представленного решения при использовании теоремы Ширшова подслова большого слова используются прежде всего в качестве множества независимых элементов, а не набора тесно связанных друг с другом слов. Далее используется то, что буквы внутри подслов раскрашены. При учёте раскраски только первых букв подслов получается экспоненциальная оценка. При рассмотрении раскраски всех букв подслов опять получается экспонента. Данный факт имеет место из-за построения иерархической системы подслов. Не исключено, что подробное рассмотрение приведённой связи подслов вместе с изложенным выше решением позволит улучшить полученную оценку вплоть до полиномиальной.

Интересно также получить оценки на высоту алгебры над множеством слов степени не выше сложности алгебры (в англоязычной литературе «PI-degree»).

В [22] получены экспоненциальные оценки, а для слов, не являющихся линейной комбинацией лексикографически меньших, в [4] получены надэкспоненциальные оценки.

Далее приводятся оценки на количество периодических подслов с периодом длины 2, 3, $n-1$ произвольного не n-разбиваемого слова W. Рассмотрение случая периодов длины 2, 3 при помощи кодировки обобщается до доказательства ограниченности существенной высоты. Кроме того, получена нижняя оценка на число подслов с периодом 2, и эта оценка при достаточно большом l отличается от верхней в четыре раза.

Как и ранее, будем считать, что слова строятся над алфавитом $\mathbb{A}$ из букв $\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$, на которых введён лексикографический порядок, причём $a_i < a_j$, если $i < j$. Для следующих ниже доказательств будем отождествлять буквы a_i с их индексами i (т. е. будем писать не слово $a_i a_j$, а слово ij).

6.1. Доказательство теоремы 1.23

Пусть слово W не сильно n-разбиваемо. Рассмотрим некоторое множество Ω'' попарно непересекающихся циклических сравнимых подслов W вида z^m, где $m > 2n$, z — нециклическое двухбуквенное слово. Будем называть элементы этого множества *представителями*, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось t таких представителей. Пронумеруем их в порядке положения в слове W (первое — самое левое) числами от 1 до t. В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно два различных двухбуквенных слова.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

1) u лексикографически меньше v;
2) представитель, содержащий u, левее представителя, содержащего v.

Из того, что W не сильно n-разбиваемо, получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $n-1$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых двухбуквенных слов на $n-1$ цепь. Раскрасим слова в $n-1$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям.

Введём соответствие между следующими четырьмя объектами:

1) натуральными числами от 1 до t;
2) классами эквивалентности по сильной сравнимости;
3) содержащимися в классах эквивалентности по сильной сравнимости циклическими словами длины 2;
4) парами цветов, в которые раскрашены сдвиги по циклу этого словоцикла.

Буквы словоцикла раскрасим в цвета, в которые раскрашены сдвиги по циклу, начинающиеся с этих цветов.

Рассмотрим граф Γ с вершинами вида (k, i), где $0 < k < n$ и $0 < i \leqslant l$. Первая координата соответствует цвету, а вторая — букве. Две вершины (k_1, i_1), (k_2, i_2) соединяются *ребром с весом* j, если

1) в j-м представителе содержится словоцикл из букв i_1, i_2;
2) буквы j-го представителя раскрашены в цвета k_1, k_2 соответственно.

Посчитаем число рёбер между вершинами вида (k_1, i_1) и вершинами вида (k_2, i_2), где k_1, k_2 фиксированы, i_1, i_2 произвольны. Рассмотрим два ребра l_1 и l_2 из рассматриваемого множества с весами $j_1 < j_2$ с концами в некоторых вершинах $A = (k_1, i_{1_1})$, $B = (k_2, i_{2_1})$ и $C = (k_1, i_{1_2})$, $D = (k_2, i_{2_2})$ соответственно. Тогда по построению одновременно выполняются неравенства $i_{1_1} \leqslant i_{1_2}$, $i_{2_1} \leqslant i_{2_2}$. При этом, так как рассматриваются представители классов эквивалентности по сильной сравнимости, одно из неравенств строгое. Значит, $i_{1_1} + i_{2_1} < i_{1_2} + i_{2_2}$. Так как вторые координаты вершин ограничены числом l, то вычисляемое число рёбер будет не более $2l - 1$.

Так как первая координата вершин меньше n, то всего рёбер в графе будет не более $(2l-1)(n-1)(n-2)/2$. Таким образом, теорема 1.23 доказана.

6.2. Доказательство теоремы 1.25

Пусть слово W не сильно n-разбиваемо. Рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся циклических несравнимых подслов слова W вида z^m, где $m > 2n$, z — нециклическое трёхбуквенное слово. Будем называть элементы этого множества представителями, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось t таких представителей. Пронумеруем их в порядке положения в слове W (первое — ближе всех к началу слова) числами от 1 до t. В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно три различных трёхбуквенных слова.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

1) u лексикографически меньше v;
2) представитель, содержащий u, левее представителя, содержащего v.

Из того, что слово W не сильно n-разбиваемо, получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $n-1$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых трёхбуквенных слов на $n-1$ цепь. Раскрасим слова в $n-1$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям.

Можно заметить, что до этого момента доказательство теоремы 1.25 практически полностью повторяет доказательство теоремы 1.23. Однако для дальнейшего доказательства необходимо использовать ориентированный аналог графа Γ, который вводится далее.

Рассмотрим теперь уже ориентированный граф G с вершинами вида (k, i), где $0 < k < n$ и $0 < i \leqslant l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву. *Ребро с некоторым весом* j выходит из (k_1, i_1) в (k_2, i_2), если для некоторых i_3, k_3

1) в j-м представителе содержится словоцикл $i_1 i_2 i_3$;

2) буквы i_1, i_2, i_3 j-го представителя раскрашены в цвета k_1, k_2, k_3 соответственно.

Таким образом, граф G состоит из ориентированных треугольников с рёбрами одинакового веса. Однако в отличие от графа Γ из доказательства теоремы 1.23, могут появляться кратные рёбра, то есть рёбра с общими началом и концом, но разным весом. Для дальнейшего доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6.1 (основная). *Пусть A, B и C — вершины графа G, и пусть $A \to B \to C \to A$ — ориентированный треугольник с рёбрами некоторого веса j, кроме того, существуют другие рёбра $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$ с весами a, b, c соответственно. Тогда среди a, b, c есть число, большее j.*

Доказательство. Предположим противное. Если два числа из набора a, b, c равны друг другу, то $a = b = c = j$, так как в противном случае есть два треугольника $A \to B \to C \to A$, в каждом из которых веса всех трёх рёбер совпадают между собой. Тогда в Ω'' есть два не сильно сравнимых слова, что противоречит определению Ω''. Без ограничения общности можно считать, что a — наибольшее из чисел a, b и . Рассмотрим треугольник из рёбер веса a. Этот треугольник будет иметь общую с $\triangle ABC$ сторону AB и некоторую третью вершину C'. Если вторая координата вершины C' совпадает со второй координатой вершины C (т. е. совпали соответствующие C и C' буквы алфавита), то $\triangle ABC$ и $\triangle ABC'$ соответствуют не сильно сравнимым словам из множества Ω''. Снова получено противоречие с определением множества Ω''. По предположению $a < j$, а значит, из монотонности цвета k_A (первой координаты вершины A) следует, что слово $i_A i_B i_{C'}$, составленное из вторых координат вершин A, B, C' соответственно, лексикографически меньше слова $i_A i_B i_C$. Значит, $i_{C'} < i_C$. Тогда слово $i_B i_{C'}$ лексикографически меньше слова $i_B i_C$. Из монотонности цвета k_B получаем, что $b > a$. Противоречие. □

Завершим доказательство теоремы 1.25. Рассмотрим граф G_1, полученный из графа G заменой между каждыми двумя вершинами кратных рёбер на ребро с наименьшим весом. Тогда по лемме 6.1 в графе G_1 встретятся рёбра всех весов от 1 до t.

Посчитаем число рёбер из вершин вида (k_1, i_1) в вершины вида (k_2, i_2), где k_1, k_2 фиксированы, i_1, i_2 произвольны. Рассмотрим два ребра из рассматриваемого множества с весами $j_1 < j_2$ с концами в некоторых вершинах (k_1, i_{1_1}), (k_2, i_{2_1}) и (k_1, i_{1_2}), (k_2, i_{2_2}) соответственно. Тогда по построению $i_{1_1} \leqslant i_{1_2}$, $i_{2_1} \leqslant i_{2_2}$, причём, так как рассматриваются представители классов эквивалентности по сильной сравнимости, одно из неравенств строгое. Так как вторые координаты вершин ограничены числом l, вычисляемое число рёбер будет не более $2l - 1$.

Так как первая координата вершин меньше n, то всего рёбер в графе будет не более $(2l-1)(n-1)(n-2)$. Таким образом, теорема 1.25 доказана.

6.3. Доказательство теоремы 1.26

Пусть слово W не n-разбиваемо. Как и прежде, рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся несравнимых подслов слова W вида z^m, где $m > 2n$, z — $(n-1)$-буквенное нециклическое слово. Будем называть элементы этого множества *представителями*, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось t таких представителей. Пронумеруем их в порядке положения в слове W (первое ближе всех к началу слова) числами от 1 до t. В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно $n-1$ различное $(n-1)$-буквенное слово.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

1) u лексикографически меньше v;
2) представитель, содержащий u, левее представителя, содержащего v.

Из того, что W не сильно n-разбиваемо, получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $n-1$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых $(n-1)$-буквенных слов на $n-1$ цепь. Раскрасим слова в $n-1$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям. Раскрасим позиции, с которых начинаются слова, в те же цвета, что и соответствующие слова.

Рассмотрим ориентированный граф G с вершинами вида (k, i), где $0 < k < n$ и $0 < i \leqslant l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву.

Ребро с некоторым весом j выходит из (k_1, i_1) в (k_2, i_2), если

1) для некоторых $i_3, i_4, \ldots, i_{n-1}$ в j-м представителе содержится словоцикл $i_1 i_2 \ldots i_{n-1}$;
2) позиции, на которых стоят буквы i_1, i_2, раскрашены в цвета k_1, k_2 соответственно.

Таким образом, граф G состоит из ориентированных циклов длины $n-1$ с рёбрами одинакового веса. Теперь нам требуется найти показатель, который бы рос строго монотонно с появлением каждого нового представителя при движении от начала к концу слова W. В теореме 1.25 таким показателем было число несократимых рёбер графа G. В доказательстве теоремы 1.26 будет рассматриваться сумма вторых координат неизолированных вершин графа G. Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 6.2 (основная). *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ — вершины графа G, $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{n-1} \to A_1$ — ориентированный цикл длины $n-1$ с рёбрами некоторого веса j. Тогда не найдётся другого цикла между вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ того же веса.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим наименьшее число j, для которого нашёлся другой одноцветный цикл между вершинами цикла цвета j. В силу минимальности j можно считать, что этот цикл имеет цвет

$k > j$. Пусть цикл цвета k имеет вид $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_{n-1}}$, где $\{j_p\}_{p=1}^{n-1} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Пусть (k_j, i_j) — координата вершины A_j. Рассмотрим наименьшее число $q \in \mathbb{N}$, такое что для некоторого r слово $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \ldots i_{j_{r+q-1}}$ лексикографически больше слова $i_{j_r} i_{j_r+1} \ldots i_{j_r+q-1}$ (здесь и далее сложение нижних индексов происходит по модулю $n-1$). Такое q существует, так как слова $i_1 i_2 \ldots i_{n-1}$ и $i_{j_1} i_{j_2} \ldots i_{j_{n-1}}$ сильно сравнимы. Кроме того, из-за совпадения множеств $\{j_p\}_{p=1}^{n-1}$ и $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ получаем, что $q \geqslant 2$. Так как q наименьшее, то для любого $s < q$ и любого r имеем равенство $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \cdots i_{j_{r+s-1}} = i_{j_r} i_{j_r+1} \cdots i_{j_r+s-1}$. Тогда для любого $s < q$ и любого r имеем $i_{j_{r+s-1}} = i_{j_r+s-1}$. Из монотонности слов каждого цвета следует, что для любого r $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \cdots i_{j_{r+q-1}}$ не больше $i_{j_r} i_{j_r+1} \cdots i_{j_r+q-1}$. Значит, для любого r верно неравенство $i_{j_{r+q-1}} \geqslant i_{j_r+q-1}$. По предположению найдётся такое r, что $i_{j_{r+q-1}} > i_{j_r+q-1}$. Так как обе последовательности $\{j_{r+q-1}\}_{r=1}^{n-1}$ и $\{j_r + q - 1\}_{r=1}^{n-1}$ пробегают элементы множества чисел $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ по одному разу, то

$$\sum_{r=1}^{n-1} j_{r+q-1} = \sum_{r=1}^{n-1} (j_r + q - 1)$$

(при вычислении числа $j_r + q - 1$ суммирование также проходит по модулю $n-1$). Но мы получили, что

$$\sum_{r=1}^{n-1} j_{r+q-1} > \sum_{r=1}^{n-1} (j_r + q - 1).$$

Противоречие. □

Завершим доказательство теоремы 1.26. Для произвольного j рассмотрим циклы длины $n-1$ весов j и $j+1$ для некоторого j. По основной лемме 6.2 найдутся такие числа k, i, что вершина (k, i) входит в цикл веса $j+1$, но не входит в цикл веса j. Пусть цикл веса j состоит из вершин вида $(k, i_{(j,k)})$, где $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Введём величину

$$\pi(j) = \sum_{k=1}^{n-1} i_{(j,k)}.$$

Тогда из основной леммы 6.2 и монотонности слов по цветам получаем, что $\pi(j+1) \geqslant \pi(j) + 1$. Так как рассматриваемые периоды не циклические, то найдётся такое k, что $i_{(1,k)} > 1$. Значит, $\pi(1) > n - 1$. Для всех j выполнено $i_{(j,k)} \leqslant l - 1$, а значит, $\pi(j) \leqslant (l-1)(n-1)$. Следовательно, $j \leqslant (l-2)(n-1)$. Значит, $t \leqslant (l-2)(n-1)$. Тем самым теорема 1.26 доказана.

6.4. Доказательство теоремы 1.24

Приведём пример. Из формулировки теоремы 1.24 следует, что можно положить l сколь угодно большим. Будем считать, что $l > 2^{n-1}$. Мы воспользуемся конструкциями, используемыми в доказательстве теоремы 1.23. Таким образом, процесс построения примера сводится к построению рёбер в графе на l вершинах. Разобьём этот процесс на несколько больших шагов. Пусть i — натуральное число от 1 до $l-2^{n-1}$. Пусть на i-м большом шаге в приведённом ниже порядке соединяются рёбрами следующие пары вершин:

$$(i,\, 2^{n-2}+i), \quad (i,\, 2^{n-2}+2^{n-3}+i), \quad (2^{n-2}+i,\, 2^{n-2}+2^{n-3}+i),$$
$$(i,\, 2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+i), \quad (2^{n-2}+i,\, 2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+i),$$
$$(2^{n-2}+2^{n-3}+i,\, 2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+i), \ldots,$$
$$(i,\, 2^{n-2}+\ldots+2+1+i), \ldots, (2^{n-2}+\ldots+2+i,\, 2^{n-2}+\ldots+2+1+i),$$

где $i = 2, 3, \ldots, l-2^{n-1}+1$. При этом никакое ребро не будет подсчитано два раза, так как вершина соединена рёбрами только с вершинами, значения в которых отличаются от значения в выбранной вершине на неповторяющуюся сумму степеней двойки.

Пусть *вершина типа* (k,i) — вершина, которая на i-м шаге соединяется с k вершинами, значения в которых меньше значения в ней самой. Для всех i имеются вершины типов $(0,i), (1,i), \ldots, (n-2,i)$.

Раскрасим в k-й цвет слова, которые для некоторого i начинаются с буквы типа (k,i) и заканчиваются в буквах, с которыми вершина типа (k,i) соединяется рёбрами на i-м большом шаге. Получим корректную раскраску в $n-1$ цвет, а значит, слово сильно n-разбиваемо;

На i-м большом шаге осуществляется $(n-2)(n-3)/2$ шагов. Значит, $q = (l-2^{n-1})(n-2)(n-3)/2$, где q — количество рёбер в графе Γ. Тем самым теорема 1.24 доказана.

6.5. Оценка существенной высоты с помощью теоремы 1.23

Из рассмотрения случая периодов длины 2 с помощью кодировки букв можно получить оценку на существенную высоту, которая будет расти полиномиально по числу образующих и экспоненциально по степени тождества. Для этого надо обобщить некоторые понятия, введённые ранее.

Конструкция 6.3. Рассмотрим алфавит $\mathbb{A}$ с буквами $\{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$. Введём на буквах лексикографический порядок: $a_i > a_j$, если $i > j$. Рассмотрим произвольное множество нециклических попарно сильно сравнимых словоциклов некоторой одинаковой длины t. Пронумеруем элементы этого множества натуральными числами начиная с 1. Введём порядок на словах, входящих в словоцикл, следующим образом: $u \prec v$, если

1) слово u — лексикографически меньше слова v;
2) словоцикл, содержащий слово u, имеет меньший номер, чем словоцикл, содержащий слово v.

Пронумеруем теперь позиции букв в словоциклах числами от 1 до t от начала к концу некоторого слова, входящего в словоцикл.

Обозначение 6.4.

1. Пусть $w(i,j)$ — слово длины t, которое начинается с j-й буквы в i-м словоцикле.
2. Пусть класс $X(t,l)$ — рассматриваемое множество словоциклов с введённым на его словах порядком $\prec$.

Определение 6.5. Назовём те классы X, в которых не найдётся антицепи длины n, *n-светлыми*. Соответственно те классы, в которых найдётся такая антицепь, назовём *n-тёмными*.

Из теоремы Дилуорса получаем, что слова в n-светлых классах X можно раскрасить в $n-1$ цвет, так что одноцветные слова образуют цепь. Далее требуется оценить число элементов в n-светлых классах X.

Определение 6.6. Пусть $\beth(t,l,n)$ — наибольшее возможное число элементов в n-светлом классе $X(t,l)$.

Замечание 6.7. Здесь и далее первый аргумент в функции $\beth(\cdot,\cdot,\cdot)$ меньше третьего.

Следующая лемма позволяет оценить $\beth(t,l,n)$ через случаи малых периодов.

Лемма 6.8. $\beth(t,l^2,n) \geqslant \beth(2t,l,n)$.

Доказательство. Рассмотрим n-светлый класс $X(2t,l)$. Разобьём во всех его словоциклах позиции на пары соседних так, чтобы каждая позиция попала ровно в одну пару. Затем рассмотрим алфавит $\mathbb{B}$ с буквами $\{b_{i,j}\}_{i,j=1}^{l}$, причём $b_{i_1,j_1} > b_{i_2,j_2}$, если $i_1\cdot l + j_1 > i_2 \cdot l + j_2$. Алфавит $\mathbb{B}$ состоит из l^2 букв. Каждая пара позиций из разбиения состоит из некоторых букв a_i, a_j. Заменим пару букв a_i, a_j буквой $b_{i,j}$. Поступая так с каждой парой, получаем новый класс $X(t,l^2)$. Он будет n-светлым, так как если в классе $X(t,l^2)$ есть антицепь длины n из слов $w(i_1,j_1), w(i_2,j_2),\ldots,w(i_n,j_n)$, то следует рассматривать прообразы слов $w(i_1,j_1), w(i_2,j_2),\ldots,w(i_n,j_n)$ в первоначально взятом классе $X(2t,l)$. Пусть эти прообразы — слова $w(i_1,j_1'), w(i_2,j_2'),\ldots,w(i_n,j_n')$. Тогда слова $w(i_1,j_1'), w(i_2,j_2'),\ldots,w(i_n,j_n')$ образуют в классе $X(2t,l)$ антицепь длины n. Получено противоречие с тем, что класс $X(2t,l)$ n-светлый. Тем самым лемма доказана. $\square$

Теперь оценим $\beth(t,l,n)$ через случаи малых алфавитов.

Лемма 6.9. $\beth(t,l^2,n) \leqslant \beth(2t,l,2n-1)$.

Доказательство. Рассмотрим $(2n-1)$-тёмный класс $X(2t,l)$. Можно считать, что n слов из антицепи, а именно $w(i_1,j_1), w(i_2,j_2),\ldots,w(i_n,j_n)$, начинаются с нечётных позиций словоциклов. Разобьём позиции во всех словоциклах класса на пары соседних так, чтобы каждая позиция попала ровно в одну пару и первая позиция в каждой паре была нечётной. Затем рассмотрим алфавит $\mathbb{B}$ с буквами $\{b_{i,j}\}_{i,j=1}^{l}$, причём $b_{i_1,j_1} > b_{i_2,j_2}$, если $i_1\cdot l+j_1 > i_2\cdot l+j_2$. Алфавит $\mathbb{B}$ состоит из l^2 букв. Каждая пара позиций из разбиения состоит из некоторых букв a_i, a_j. Заменим пару букв a_i, a_j буквой $b_{i,j}$. Поступая так с каждой парой, получаем новый класс $X(t,l^2)$. Пусть слова $w(i_1,j_1), w(i_2,j_2),\ldots,w(i_n,j_n)$ перешли в слова $w(i_1,j'_1), w(i_2,j'_2),\ldots,w(i_n,j'_n)$. Эти слова будут образовывать антицепь длины n в классе $X(t,l^2)$. Таким образом, получен n-тёмный класс $X(t,l^2)$ с тем же числом элементов, что и $(2n-1)$-тёмный класс $X(2t,l)$. Тем самым лемма доказана. □

Для дальнейшего рассуждения необходимо связать $\beth(t,l,n)$ для произвольного первого аргумента и для первого аргумента, равного степени двойки.

Лемма 6.10. *$\beth(t,l,n) \leqslant \beth(2^s, l+1, 2^s(n-1)+1)$, где $s = \ulcorner \log_2(t) \urcorner$.*

Доказательство. Рассмотрим n-светлый класс $X(t,l)$. Введём в алфавит $\mathbb{A}$ новую букву a_0, которая лексикографически меньше любой другой буквы из алфавита $\mathbb{A}$. Получим алфавит $\mathbb{A}'$. В каждый словоцикл из класса $X(t,l)$ добавим $(t+1)$-ю, $(t+2)$-ю,$\ldots$, 2^s-ю позиции, на которые поставим буквы a_0. Получим класс $X(2^s,l+1)$. Он будет $(2^s(n-1)+1)$-светлым, так как в противном случае в этом классе для некоторого j найдутся слова $w(i_1,j), w(i_2,j),\ldots,w(i_n,j)$, которые образуют антицепь в классе $X(2^s,l+1)$. Тогда

1) если $j > t$, то слова $w(i_1,1), w(i_2,1),\ldots,w(i_n,1)$ образуют антицепь в классе $X(t,l)$;
2) если $j \leqslant t$, то слова $w(i_1,j), w(i_2,j),\ldots,w(i_n,j)$ образуют антицепь в классе $X(t,l)$.

Получено противоречие с тем, что класс $X(t,l)$ n-светлый. Тем самым лемма доказана. □

Предложение 6.11. $\beth(t,l,n) \leqslant \beth(t,l,n+1)$.

По лемме 6.10 $\beth(t,l,n) \leqslant \beth(2^s,l+1,2^s(n-1)+1)$, где $s = \ulcorner \log_2(t) \urcorner$. В силу замечания 6.7 $t < n$. Значит, $2^s < 2n$. Следовательно,

$$\beth(2^s, l+1, 2^s(n-1)+1) \leqslant \beth(2^s, l+1, 2n^2).$$

По лемме 6.8 имеем, что

$$\beth(2^s, l+1, 2n^2) \leqslant \beth(2^{s-1}, (l+1)^2, 2n^2) \leqslant \beth(2^{s-2}, (l+1)^{2^2}, 2n^2) \leqslant \\ \leqslant \beth(2^{s-3}, (l+1)^{2^3}, 2n^2) \leqslant \ldots \leqslant \beth(2, (l+1)^{2^{s-1}}, 2n^2).$$

По теореме 1.23 имеем

$$\beth(2, (l+1)^{2^{s-1}}, 2n^2) < (l+1)^{2^{s-1}} \cdot 4n^4 < 4(l+1)^n n^4,$$

т. е. доказана следующая лемма.

Лемма 6.12. *$\beth(t,l,n) < 4(l+1)^n n^4$.*

Чтобы применить лемму 6.12 в доказательстве теоремы 1.27, требуется оценить число подслов не n-разбиваемого слова с одинаковыми периодами.

Лемма 6.13. *Если в некотором слове W найдутся $2n-1$ подслов, в которых период повторяется больше n раз и периоды попарно не сильно сравнимы, то W n-разбиваемое.*

Доказательство. Пусть в некотором слове W найдутся $2n-1$ подслов, в которых период повторяется больше n раз и периоды попарно не сильно сравнимы. Пусть x — период одного из этих подслов. Тогда в слове W найдутся непересекающиеся подслова $x^{p_1}v'_1, \ldots, x^{p_{2n-1}}v'_{2n-1}$, где $p_1, \ldots, p_{2n-1}$ — некоторые натуральные числа, большие n, а $v'_1, \ldots, v'_{2n-1}$ — некоторые слова длины $|x|$, сравнимые с x. Тогда среди $v'_1, \ldots, v'_{2n-1}$ найдутся либо n слов, лексикографически больших x, либо n слов, лексикографически меньших x. Можно считать, что $v'_1, \ldots, v'_n$ лексикографически больше x. Тогда в слове W найдутся подслова $v'_1, xv'_2, \ldots, x^{n-1}v'_n$, идущие слева направо в порядке лексикографического убывания. □

Из этой леммы получаем следствие 1.28.

Рассмотрим не n-разбиваемое слово W. Если в нём найдётся подслово, в котором нециклический период x длины не меньше n повторяется больше $2n$ раз, то в слове x^2 подслова, которые начинаются с первой, второй,..., n-й позиции, попарно сравнимы. Значит, слово x^{2n} является n-разбиваемым. Получаем противоречие с не n-разбиваемостью слова W. Из лемм 6.13 и 6.12 получаем, что существенная высота слова W меньше, чем

$$(2n-1)\sum_{t=1}^{n-1} \sqsupset(t,l,n) < 8(l+1)^n n^5(n-1).$$

Значит, $\Upsilon(n,l) < 8(l+1)^n n^5(n-1)$. Тем самым теорема 1.27 доказана.

Литература

[1] Белов А. Я. О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n // Мат. сб. — 1988. — Т. 135, № 31. — С. 373—384.

[2] Белов А. Я. О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр // Успехи мат. наук. — 1997. — Т. 52, № 2. — С. 153—154.

[3] Белов А. Я. Размерность Гельфанда—Кириллова относительно свободных ассоциативных алгебр // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 12. — С. 3—26.

[4] Белов А. Я. Проблемы бернсайдовского типа, теоремы о высоте и о независимости // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 19—79.

[5] Белов А. Я., Харитонов М. И. Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 4. — С. 81—102. — `arXiv:1101.4909`.

[6] Богданов И. И. Теорема Нагаты—Хигмана для полуколец // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 3. — С. 651—658.

[7] Днестровская тетрадь: оперативно-информ. сб. — Новосибирск: Изд-во Ин-та мат. СО АН СССР, 1993.

[8] Колотов А. Г. О верхней оценке высоты в конечно порождённых алгебрах с тождествами // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 1. — С. 187—189.
[9] Кузьмин Е. Н. О теореме Нагаты—Хигмана // Сб. трудов, посвящённый 60-летию акад. Илиева. — София, 1975. — С. 101—107.
[10] Латышев В. Н. Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 101—110.
[11] Мищенко С. П. Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли // Мат. заметки. — 1990. — Т. 47, № 4. — С. 83—89.
[12] Пчелинцев С. В. Теорема о высоте для альтернативных алгебр // Мат. сб. — 1984. — Т. 124, № 4. — С. 557—567.
[13] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.
[14] Уфнаровский В. А. Теорема о независимости и её следствия // Мат. сб. — 1985. — Т. 128 (170), № 1 (9). — С. 124—132.
[15] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1990. — Т. 57. — С. 5—177.
[16] Харитонов М. И. Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — № 2. — С. 24—28.
[17] Харитонов М. И. Оценки на структуру кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика.
[18] Чибриков Е. С. О высоте Ширшова конечнопорождённой ассоциативной алгебры, удовлетворяющей тождеству степени четыре // Изв. Алтайск. гос. ун-та. — 2001. — Т. 1 (19). — С. 52—56.
[19] Ширшов А. И. О кольцах с тождественными соотношениями // Мат. сб. — 1957. — Т. 43, № 2. — С. 277—283.
[20] Ширшов А. И. О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах // Мат. сб. — 1957. — Т. 41, № 3. — С. 381—394.
[21] Belov A. Ya. Some estimations for nilpotency of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20, no. 10. — P. 2919—2922.
[22] Belov A. Ya., Borisenko V. V., Latyshev, V. N. Monomial algebras // J. Math. Sci. — 1997. — Vol. 87, no. 3. — P. 3463—3575.
[23] Belov A. Ya., Rowen L. H. Computational Aspects of Polynomial Identities. — Wellesley: Peters, 2005. — (Research Notes Math.; Vol. 9).
[24] Berstel J., Perrin D. The origins of combinatorics on words // European J. Combin. — 2007. — Vol. 28. — P. 996—1022.
[25] Ciocanu Gh. Independence and quasiregularity in algebras. II // Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat. — 1997. — No. 70. — P. 70—77, 132, 134.
[26] Chekanu Gh. Local finiteness of algebras // Mat. Issled. — 1988. — Vol. 105. — P. 153—171, 198.
[27] Chekanu G. P., Kozhukhar E. P. Independence and nilpotency in algebras // Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat. — 1993. — No. 2. — P. 51—62, 92—93, 95.
[28] Chekanu G. P. Independence and quasiregularity in algebras // Dokl. Akad. Nauk. — 1994. — Vol. 337, no. 3.

[29] Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras: Graduate Course in Algebra. — Singapore: Springer, 2000.

[30] Drensky V., Formanek E. Polynomial Identity Ring. — Basel: Birkhäuser, 2004. — (Adv. Courses Math.).

[31] Kanel-Belov A., Rowen L. H. Perspectives on Shirshov's height theorem // Selected Papers of A. I. Shirshov. — Basel: Birkhäuser, 2009. — P. 3—20.

[32] Kemer A. R. Comments on the Shirshov's height theorem // Selected Papers of A. I. Shirshov. — Basel: Birkhäuser, 2009. — P. 41—48.

[33] Kharitonov M. Estimations of the particular periodicity in case of the small periods in Shirshov height theorem. — `arXiv:1108.6295`.

[34] Klein A. A. Indices of nilpotency in a PI-ring // Arch. Math. — 1985. — Vol. 44, no. 4. — P. 323—329.

[35] Klein A. A. Bounds for indices of nilpotency and nility // Arch. Math. — 2000. — Vol. 74, no. 1. — P. 6—10.

[36] Latyshev V. N. On Regev's theorem on indentities in a tensor product of PI-algebras // Usp. Mat. Nauk. — 1972. — Vol. 27. — P. 213—214.

[37] Lopatin A. A. On the nilpotency degree of the algebra with identity $x^n = 0$. — `arXiv:1106.0950v1`.

[38] Lothaire M. Algebraic Combinatorics on Words. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. — (Encycl. Math. Its Appl.; Vol. 90).

[39] Procesi C. Rings with Polynomial Identities. — New York, 1973.

[40] Ufnarovskii V. A., Chekanu G. P. Nilpotent matrices // Mat. Issled. — 1985. — Vol. 85. — P. 130—141, 155.

[41] Zelmanov E. On the nilpotency of nil algebras // Proc. 5th Nat. School in Algebra Held in Varna, Bulgaria, Sept. 24 — Oct. 4, 1986 / L. L. Avramov, K. B. Tchakerian, eds. — Berlin: Springer, 1988. — P. 227—240. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1352).