О l-первичном радикале решёточно упорядоченных алгебр

Ю. В. КОЧЕТОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: jkochetova@mail.ru

УДК 512.552+512.545

Ключевые слова: решёточно упорядоченная алгебра, первичный идеал, первичный радикал, нижний слабо разрешимый l-радикал.

Аннотация

Рассматривается подход к упорядочению алгебр, предложенный В. М. Копытовым. Изучается возможность обобщения понятия первичного радикала на класс решёточно упорядоченных алгебр над частично упорядоченным полем. Дано поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебр над частично упорядоченными и над направленными полями. Введено понятие и доказаны свойства нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебры, а также получены условия его совпадения с l-первичным радикалом l-алгебры.

Abstract

J. V. Kochetova, On l-prime radicals of lattice ordered algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 55—68.

The Kopytov order for any algebras over a field is considered. The purpose of this paper is to investigate a generalization of the concept of prime radical to lattice ordered algebras over partially ordered fields. Prime radicals of l-algebras over partially ordered and directed fields are described. Some results concerning properties of the lower weakly solvable l-radical of l-algebras are obtained. Necessary and sufficient conditions for the l-prime radical of an l-algebra to be equal to the lower weakly solvable l-radical of an l-algebra are presented.

Введение

Пусть K — частично упорядоченное поле и $L = \langle L; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над полем K.

Определение 1. Будем говорить, что на алгебре L над частично упорядоченным полем K определён *порядок В.М. Копытова* $\leqslant$, если

1) $\langle L; +; \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа [5];
2) из того, что $a \leqslant b$, следует, что $\lambda a \leqslant \lambda b$ для всех $a, b \in L$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in K$;
3) из того, что $0 \leqslant a$, следует, что $0 \leqslant a + ab$ и $0 \leqslant a + ba$ для всех $b \in L$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 55—68.

Если при этом группа $\langle L; +; \leqslant \rangle$ является линейно упорядоченной (l-группой), то алгебра L называется *линейно упорядоченной* (*l-алгеброй*).

Введение В. М. Копытовым [3] в 1972 году такого определения упорядочения для алгебр Ли дало возможность в 70—80-х годах прошлого века построить содержательную теорию линейно упорядочиваемых алгебр Ли над линейно упорядоченным полем. Ряд основных результатов этой теории был получен В. М. Копытовым, Н. Я. Медведевым, С. А. Агалаковым и А. С. Штерном (см. [1, 3—5, 13—15]).

В [3] В. М. Копытов указывает на то, что введённое им определение порядка на алгебре Ли можно рассматривать не только для этих алгебр, но и для произвольных алгебр над упорядоченным полем.

Отметим, что условие 3) определения 1 можно заменить на эквивалентное ему условие

3′) из того, что $0 < a$, следует, что $\lambda(ab) \leqslant a$ и $\lambda(ba) \leqslant a$ для всех $b \in L$ и $\lambda \in K$.

В данной статье изучаются свойства порядка Копытова для произвольных линейных алгебр над частично упорядоченным полем.

Для многих алгебраических систем, в том числе и упорядоченных, исследован их первичный радикал, в частности, получено его поэлементное описание (см. [9, 16—19, 21]). Полезным является получение внутренней характеризации l-первичного радикала l-алгебр по аналогии с тем, как это делается для l-групп и l-колец.

Цель данной работы — характеризация l-первичного радикала решёточно упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем с точки зрения свойств его элементов, а также с точки зрения его совпадения с нижним слабо разрешимым l-радикалом.

Напомним, что *двусторонним идеалом* (или *идеалом*) линейной алгебры L над полем K называется такое подпространство I в L, что $xy, yx \in I$ для любых элементов $x \in I$ и $y \in L$. Идеал I частично упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем K называется *выпуклым*, если I — выпуклое подмножество в L. Выпуклый идеал l-алгебры, являющийся подрешёткой этой алгебры, называется *l-идеалом*.

Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем, $M \subseteq L$ — подмножество в L и $\{M_i \mid i \in \mathfrak{I}\}$ — семейство всех l-идеалов алгебры L, для которых $M \subseteq M_i$, то обозначим через $I_M = \bigcap\limits_{i \in \mathfrak{I}} M_i$ наименьший l-идеал в L, содержащий множество M. Если $M = \{a\}$, то данный идеал будем обозначать I_a.

В разделе 1 дано описание l-идеала I_a для элемента a произвольной l-алгебры над направленным полем, а именно доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *В любой l-алгебре L над направленным полем наименьший l-идеал I_a, содержащий элемент a, совпадает с множеством*

$$M = \{x \in L \mid |x| \leqslant \gamma_x |a|,\ \gamma_x \in K\}.$$

Рассмотрим для решёточно упорядоченной по Копытову линейной алгебры L над частично упорядоченным полем K и её l-идеалов J_1, J_2 множество

$$J_1J_2 = \left\{ z \in L \;\middle|\; z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} x_i y_i,\ x_i \in J_1,\ y_i \in J_2 \right\},$$

являющееся подпространством в алгебре L. Для l-идеала J в L множество JJ будем обозначать через J^2. Отметим, что даже если J_1J_2 — идеал в L, то, вообще говоря, J_1J_2 уже не будет l-идеалом. Для того чтобы восполнить этот недостаток, рассмотрим наименьший l-идеал $I_{J_1J_2}$, содержащий множество J_1J_2, который будем называть *l-произведением* l-идеалов J_1 и J_2.

Назовём l-алгебру L над частично упорядоченным полем K *l-первичной*, если из $I_{UV} = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$ для любых двух l-идеалов U, V в L; l-идеал P l-алгебры L будем называть *l-первичным* идеалом, если L/P — l-первичная l-алгебра.

В первом разделе также рассматриваются свойства l-первичных идеалов l-алгебры над частично упорядоченным полем, в частности, доказывается следующее утверждение.

Теорема 2 [8, теорема 1]. *Для l-идеала P l-алгебры L над частично упорядоченным полем K следующие условия эквивалентны*:

1) *P — l-первичный идеал*;
2) *для любых l-идеалов I_1 и I_2 l-алгебры L из того, что $I_1I_2 \subseteq P$, следует хотя бы одно из соотношений $I_1 \subseteq P$, $I_2 \subseteq P$*;
3) *для любых l-идеалов I_1, I_2 в L из того, что $I_{I_1I_2} \subseteq P$, следует, что $I_1 \subseteq P$ или $I_2 \subseteq P$*;
4) *для всех $a, b \in L$ из того, что $I_aI_b \subseteq P$, следует, что $a \in P$ или $b \in P$.*

Определение 2. l-первичным радикалом $l\text{-rad}(L)$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем K называется пересечение всех l-первичных идеалов l-алгебры L.

Второй раздел содержит поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебр над частично упорядоченными и направленными полями. В этом разделе приводятся доказательства следующих утверждений.

Теорема 3. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем K, $l\text{-rad}(L)$ — её l-первичный радикал. Тогда для элемента $a \in L$ следующие условия эквивалентны*:

1) $a \in l\text{-rad}(L)$;
2) *любая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in I_{(I_{a_i})^2}$, содержит нуль*;
3) *в любой последовательности $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ вида $a_1 = a$, $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2$, начиная с некоторого места все элементы равны нулю.*

Теорема 4. *Пусть L — l-алгебра над направленным полем K, $l\text{-rad}(L)$ — её l-первичный радикал. Тогда для элемента $a \in L$ следующие условия эквивалентны*:

1) $a \in l\text{-rad}(L)$;
2) *любая последовательность* $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, *в которой* $a_1 = a$ *и* $a_{i+1} = x_i y_i$, где $0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i |a_i|$, $0 \leqslant y_i \leqslant \beta_i |a_i|$ *и* $\alpha_i, \beta_i \in K$, *содержит нуль.*

Определение 3. l-идеал J l-алгебры L над частично упорядоченным полем называется l-разрешимым l-идеалом, если существует цепочка идеалов

$$J \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_k = \{0\},$$

в которой J_{i+1} является l-идеалом в J_i, а фактор-алгебры J_i/J_{i+1} — алгебры с нулевым умножением.

Так же, как при построении нижнего ниль-радикала в ассоциативных алгебрах, обозначим через $\mathfrak{N}(L)$ сумму всех l-разрешимых l-идеалов l-алгебры L и будем называть $\mathfrak{N}(L)$ *l-радикалом* l-алгебры L над частично упорядоченным полем по аналогии с тем, как это делается в l-кольцах. То есть $\mathfrak{N}(L)$ — идеал, порождённый множеством $\{J_\alpha \mid \alpha \in I\}$ всех l-разрешимых l-идеалов из L, который по [6, теорема 1] является l-идеалом в L и состоит из всевозможных конечных сумм вида $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}$, где $x_{\alpha_k} \in J_{\alpha_k}$ и $\alpha_k \in I$.

В третьем разделе изучены свойства l-разрешимых l-идеалов и свойства l-радикала решёточно упорядоченных алгебр над частично упорядоченным полем. В частности, в данном разделе доказаны следующие утверждения.

Предложение 1. *Каждый l-разрешимый l-идеал l-алгебры L над частично упорядоченным полем содержится в l-первичном радикале l-алгебры L.*

Следствие 1. *Для любой l-алгебры L над частично упорядоченным полем выполняется включение* $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$.

В четвёртом разделе введено понятие и описаны свойства нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебры над частично упорядоченным полем. В этом разделе, в частности, получена теорема о совпадения l-первичного радикала l-алгебры с её нижним слабо разрешимым l-радикалом.

Теорема 5. *В любой решёточно упорядоченной алгебре L над направленным полем K нижний слабо разрешимый l-радикал $\mathfrak{B}(L)$ совпадает с l-первичным радикалом $l\text{-rad}(L)$.*

В статье используется общепринятая терминология для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [5, 20]).

1. Свойства l-первичных идеалов l-алгебр

Сначала опишем строение l-идеала I_a для произвольного элемента a l-алгебры над направленным полем. Для этого рассмотрим несколько вспомогательных утверждений, которые будут необходимы нам при дальнейшем изложении.

Предложение 2 [6, предложение 1; 10, предложение 16]. *В l-алгебре L над частично упорядоченным полем K для любых элементов $x, y, z \in L$ верны соотношения*

$$x = x^+ + x^-, \quad |x| = x^+ - x^-, \quad 0 \leqslant x^+ \leqslant |x|, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|.$$

Предложение 3. *В l-алгебре L над частично упорядоченным полем для любых элементов $x, y \in L$ выполняются неравенства $|xy| \leqslant |x|$ и $|yx| \leqslant |x|$.*

Доказательство. Используя предложение 2, получаем, что

$$|xy| = |(x^+ + x^-)y| = |x^+y + x^-y| \leqslant |x^+y| + |x^-y|.$$

Так как $x^+ > 0$, то по пункту 3) определения 1 имеем, что $x^+y \leqslant x^+$ и $-(x^+y) \leqslant x^+$. Следовательно, $|x^+y| = x^+y \vee -(x^+y) \leqslant x^+$. Аналогично $|x^-y| = | - x^-y| \leqslant -x^-$. Отсюда, учитывая предложение 2, получаем, что $|xy| \leqslant x^+ - x^- = |x|$. □

Лемма 1. *Пусть L — l-алгебра над направленным полем K. Для любых элементов $x \in L$, $\lambda \in K$ найдётся элемент $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \in K$, такой что $|\lambda x| \leqslant \alpha |x|$.*

Доказательство. Так как порядок $\leqslant$ в частично упорядоченном поле K направленный, то для элементов $\lambda, -\lambda \in K$ найдётся элемент $\lambda' \in K$, являющийся их верхней гранью, т. е. удовлетворяющий условиям $\lambda' \geqslant \lambda$ и $\lambda' \geqslant -\lambda$. Кроме того, в силу направленности порядка на поле K существует такой элемент $\alpha \in K$, что $\alpha \geqslant \lambda'$ и $\alpha \geqslant 0$. Применяя определение 1 к соотношениям $\alpha - \lambda \geqslant 0$ и $x^+ \geqslant 0$, получим, что $\alpha x^+ \geqslant \lambda x^+$. Из неравенств $\alpha + \lambda \geqslant 0$ и $x^- \leqslant 0$ по определению 1 вытекает, что $-\alpha x^- \geqslant \lambda x^-$. По предложению 2 из полученных неравенств следует, что

$$\alpha |x| = \alpha(x^+ - x^-) = \alpha x^+ - \alpha x^- \geqslant \lambda x^+ + \lambda x^- = \lambda x,$$

т. е. $\alpha |x| \geqslant \lambda x$.

По определению 1 из того, что $\alpha + \lambda \geqslant 0$ и $x^+ \geqslant 0$, получаем, что $\alpha x^+ \geqslant -\lambda x^+$, а из того, что $\alpha - \lambda \geqslant 0$ и $x^- \leqslant 0$, следует, что $-\alpha x^- \geqslant -\lambda x^-$. Отсюда по предложению 2 заключаем, что

$$\alpha |x| = \alpha x^+ - \alpha x^- \geqslant -\lambda x^+ - \lambda x^- = -\lambda x.$$

Из соотношений $\alpha |x| \geqslant \lambda x$ и $\alpha |x| \geqslant -\lambda x$ по определению точной верхней грани выводим, что $\alpha |x| \geqslant \lambda x \vee (-\lambda x) = |\lambda x|$. □

Также нам понадобятся следующие свойства l-идеалов l-алгебры над частично упорядоченным полем.

Предложение 4 [6, предложение 3; 10, лемма 21]. *Следующие условия на идеал I l-алгебры L над частично упорядоченным полем K эквивалентны*:

1) *I — выпуклая подрешётка в L;*
2) *если $x \in I$, $y \in L$ и $|y| \leqslant |x|$, то $y \in I$ для любых $x \in I$, $y \in L$.*

Лемма 2. *Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем K, I — l-идеал в L и $a \in L$, то $a \in I$ в том и только в том случае, когда $|a| \in I$.*

Доказательство. Если $a \in I$, то для l-идеала I, являющегося подрешёткой в L, имеем $|a| = a \vee (-a) \in I$. Обратно, пусть $|a| \in I$. Из предложения 2 следует, что $a = a^+ + a^+ - |a|$. Поскольку $0 \leqslant a^+ \leqslant |a|$, а l-идеал I является выпуклым идеалом, то $a^+ \in I$. Значит, $a \in I$. □

Строение l-идеалов I_a в произвольной l-алгебре над направленным полем описывает теорема 1.

Доказательство теоремы 1. Так как $a \in I_a$ и l-идеал I_a является выпуклым, то по лемме 2 получаем, что $M \subseteq I_a$.

Докажем, что M — l-идеал в L, содержащий элемент a. Пусть $x, y \in M$ и $\lambda \in K$. Тогда $|x| \leqslant \gamma_x|a|$ и $|y| \leqslant \gamma_y|a|$. Используя предложение 2, получаем, что

$$|x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \gamma_x|a| + \gamma_y|a| = (\gamma_x + \gamma_y)|a|,$$

т. е. $x - y \in M$. Для $\lambda \in K$ по лемме 1 найдётся элемент $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \in K$, для которого $|\lambda x| \leqslant \alpha|x|$, откуда по определению 1 получаем, что $|\lambda x| \leqslant (\alpha\gamma_x)|a|$. Таким образом, $\lambda x \in M$.

Пусть $z \in L$. Так как $|xz| \leqslant |x|$ и $|zx| \leqslant |x|$ по предложению 3, то $xz, zx \in M$.

Поскольку для элементов $x \in M$, $y \in L$, удовлетворяющих условию $|y| \leqslant |x|$, верно $y \in M$, то по предложению 4 M — l-идеал l-алгебры L.

Если рассмотреть элемент $x = a$ и взять $\gamma_x = 1$, то получим верное неравенство $|a| \leqslant |a|$, поэтому $a \in M$. □

Для доказательства свойств l-первичных идеалов l-алгебры L нам понадобится следующее утверждение. Его доказательство аналогично доказательствам теорем 13 и 25 из [10] для l-алгебр Ли.

Предложение 5. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем K и J — l-идеал в L. Образ любого l-идеала алгебры L при каноническом гомоморфизме $\varepsilon\colon L \to L/J$ является l-идеалом в L/J. Полный прообраз любого l-идеала фактор-алгебры L/J при каноническом гомоморфизме ε является l-идеалом в L.*

Основные свойства l-первичных идеалов l-алгебры над частично упорядоченным полем сформулированы в теореме 2.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что верна импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть I_1, I_2 — произвольные l-идеалы в L, для которых $I_1 I_2 \subseteq P$. По предложению 5 l-идеалам I_1, I_2 из L соответствуют l-идеалы $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ из l-алгебры L/P. Из $I_1 I_2 \subseteq P$ следует, что $\bar{I}_1\bar{I}_2 = \{P\}$ и $I_{\bar{I}_1\bar{I}_2} = \{P\}$ в L/P. Отсюда, учитывая l-первичность l-алгебры L/P, получаем, что $\bar{I}_1 = P$ или $\bar{I}_2 = P$. Значит, любой класс $x + P \in \bar{I}_1$ совпадает с P или любой класс $y + P \in \bar{I}_2$ совпадает с P, в частности, $x + P = P$ для любого $x \in I_1$ или $y + P = P$ для любого $y \in I_2$. Таким образом, $I_1 \subseteq P$ или $I_2 \subseteq P$.

Докажем, что справедлива импликация 2) $\Longrightarrow$ 3). Если l-идеалы I_1, I_2 в L таковы, что $I_{I_1 I_2} \subseteq P$, то $I_1 I_2 \subseteq P$. Отсюда по пункту 2) следует, что $I_1 \subseteq P$ или $I_2 \subseteq P$.

Покажем, что справедлива импликация 3) $\Longrightarrow$ 4). Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in L$, для которых $I_a I_b \subseteq P$. Тогда $I_{I_a I_b} \subseteq P$, что по пункту 3) влечёт $I_a \subseteq P$ или $I_b \subseteq P$. Следовательно, $a \in P$ или $b \in P$.

Осталось доказать справедливость импликации 4) $\Longrightarrow$ 1). Покажем, что L/P — l-первичная l-алгебра. Рассмотрим для этого l-идеалы $\bar{U}$, $\bar{V}$ в L/P, такие что $I_{\bar{U}\bar{V}} = \{P\}$ в L/P. Для того чтобы l-алгебра L/P была l-первичной, необходимо выполнение хотя бы одного из равенств $\bar{U} = \{P\}$ или $\bar{V} = \{P\}$.

Допустим, что не выполняется ни одно из равенств, т. е. $\bar{U} \neq \{P\}$ и $\bar{V} \neq \{P\}$. По предложению 5 в l-алгебре L найдутся l-идеалы U, V, соответствующие l-идеалам $\bar{U}$, $\bar{V}$ в L/P. Кроме этого, существуют такие элементы $a \in U$ и $b \in V$, что $a + P \neq P$ и $b + P \neq P$, т. е. $a \notin P$ и $b \notin P$. Из того, что $a \in U$ и $b \in V$, следует, что $I_a \subseteq U$, $I_b \subseteq V$, и значит, $I_a I_b \subseteq UV$.

Поскольку $I_{\bar{U}\bar{V}} = \{P\}$, то $\bar{U}\bar{V} = \{P\}$, и поэтому $UV \subseteq P$. Отсюда по доказанному выше получаем включение $I_a I_b \subseteq P$, из которого по пункту 4) заключаем, что $a \in P$ или $b \in P$. Полученное противоречие с выбором элементов $a, b \notin P$ показывает, что $\bar{U} = \{P\}$ или $\bar{V} = \{P\}$.

Таким образом, верна цепочка импликаций 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1), которая доказывает эквивалентность всех выписанных условий. □

2. l-первичный радикал l-алгебры

Рассмотрим поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебры над частично упорядоченными и направленными полями.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что верна импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть существует элемент $a \in l\text{-rad}(L)$, не удовлетворяющий условию 2). Тогда найдётся неисчезающая последовательность $\{a_n \in L \setminus \{0\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in I_{(I_{a_i})^2}$. По лемме Цорна существует максимальный l-идеал P относительно свойства $P \cap \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Покажем, что P — l-первичный идеал. Рассмотрим l-идеалы I_1, I_2 в L, такие что $I_1 \nsubseteq P$ и $I_2 \nsubseteq P$. Для этих l-идеалов справедливы включения $I_1 + P \supset P$ и $I_2 + P \supset P$, из которых с учётом максимальности l-идеала P следует существование элементов a_i, a_j последовательности $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, таких что $a_j \in I_1 + P$ и $a_i \in I_2 + P$. Пусть для определённости $i \geqslant j$. Для элемента a_j имеем, что $I_{a_j} \subseteq I_1 + P$ и, следовательно, $I_{(I_{a_j})^2} \subseteq I_1 + P$. Так как $a_{j+1} \in I_{(I_{a_j})^2}$, то $a_{j+1} \in I_1 + P$. Повторяя рассуждения для элемента a_{j+1}, имеем $a_{j+2} \in I_1 + P$. За конечное число шагов получим, что $a_i \in I_1 + P$.

Таким образом, $a_i \in (I_2 + P) \cap (I_1 + P)$, и поэтому $(I_{a_i})^2 \subseteq (I_1 + P)(I_2 + P) = I_1 I_2 + P$. Тогда $a_{i+1} \in I_{(I_{a_i})^2} \subseteq I_{I_1 I_2 + P}$. Поскольку $a_{i+1} \notin P$, то $I_{I_1 I_2 + P} \nsubseteq P$.

Если $I_1 I_2 + P \subseteq P$, то $I_{I_1 I_2 + P} \subseteq I_P = P$, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $I_1 I_2 + P \nsubseteq P$, поэтому $I_1 I_2 \nsubseteq P$.

Из доказанного выше по условию 2) теоремы 2 следует l-первичность l-идеала P. Так как $a \notin P$, где P — l-первичный идеал, то по определению 2 получаем, что $a \notin l\text{-rad}(L)$. Следовательно, 1) $\Longrightarrow$ 2).

Покажем, что выполняется импликация 2) $\Longrightarrow$ 3). Рассмотрим произвольную последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ вида $a_1 = a$, $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2$. Для каждого элемента данной последовательности выполнено соотношение $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2 \subseteq \subseteq I_{(I_{a_i})^2}$, поэтому последовательность удовлетворяет условию 2) и, следовательно, содержит нуль.

Осталось доказать импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть существует элемент $r \in L$, $r \notin l\text{-rad}(L)$, удовлетворяющий условию 3). Поскольку $r \notin l\text{-rad}(L)$, то $r_1 = = r \notin P$ для некоторого l-первичного идеала P. Если $(I_{r_1})^2 \subseteq P$, то по условию 4) теоремы 2 получаем, то $r_1 \in P$, противоречие. Следовательно, $(I_{r_1})^2 \nsubseteq P$, поэтому существует такой элемент $r_2 \in (I_{r_1})^2$, что $r_2 \in L \setminus P$. Рассуждая аналогично, построим последовательность $\{r_n \in L \setminus P \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $r_1 = r$ и $r_{i+1} \in (I_{r_i})^2$. Поскольку все члены этой последовательности принадлежат $L \setminus P$, то $r_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, r не удовлетворяет условию 3), что противоречит выбору элемента r. □

Описание l-первичного радикала l-алгебры над направленным полем дано в теореме 4.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что верна импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть существует элемент $a \in l\text{-rad}(L)$, не удовлетворяющий условию 2). Тогда найдётся неисчезающая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} = x_i y_i$, где $0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i |a_i|$, $0 \leqslant y_i \leqslant \beta_i |a_i|$ и $\alpha_i, \beta_i \in K$. Так как $a_i \in I_{a_i}$ и l-идеал I_{a_i} является выпуклым идеалом, то по лемме 2 получаем, что $x_i, y_i \in I_{a_i}$ и $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2$. Тогда последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию 3) теоремы 3 и, значит, содержит нуль согласно условию $a \in l\text{-rad}(L)$, противоречие. Следовательно, импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) выполняется.

Покажем, что справедлива импликация 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть существует элемент $r \in L$, удовлетворяющий условию 2) и не удовлетворяющий условию 1), т. е. $r_1 = r \notin P$ для некоторого l-первичного идеала P из L. Так как $r_1 \notin P$, то $(I_{r_1})^2 \nsubseteq P$, поскольку иначе по условию 4) теоремы 2 выполнялось бы соотношение $r_1 \in P$. Следовательно, $(I_{r_1})^2 \nsubseteq P$, поэтому существуют такие элементы $x, y \in I_{r_1}$, что $xy \notin P$. Так как по предложению 2 $x = x^+ + x^-$ и $y = y^+ + y^-$, то $xy = x^+y^+ + x^+y^- + x^-y^+ + x^-y^-$. Поскольку $xy \notin P$, то хотя бы одно из слагаемых суммы не принадлежит P. В случае когда $x^+y^+ \notin P$, имеем, что $x^+, y^+ \geqslant 0$. Если же $x^+y^- \notin P$, то $-(x^+y^-) = x^+(-y^-) \notin P$, при этом $x^+, -y^- \geqslant 0$. Аналогично $(-x^-)y^+ \notin P$ или $(-x^-)(-y^-) \notin P$. Таким образом, можно считать, что в P не содержится элемент bc, где $b, c \geqslant 0$ и $b, c \in I_{r_1}$. При этом для $b, c \in I_{r_1}$ по теореме 1 имеем $b = |b| \leqslant \alpha_1 |r_1|$ и $c = |c| \leqslant \beta_1 |r_1|$, где $\alpha_1, \beta_1 \in K$.

Таким образом, получен элемент $r_2 = bc \notin P$, для которого $0 \leqslant b \leqslant \alpha_1|r_1|$, $0 \leqslant c \leqslant \beta_1|r_1|$ и $\alpha_1, \beta_1 \in K$. Рассуждая аналогично, построим последовательность $\{r_n \in L \setminus P \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $r_1 = r$ и $r_{i+1} = b_i c_i$, где $0 \leqslant b_i \leqslant \alpha_i|r_i|$, $0 \leqslant c_i \leqslant \beta_i|r_i|$ и $\alpha_i, \beta_i \in K$. Поскольку все члены этой последовательности принадлежат $L \setminus P$, то $r_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, r не удовлетворяет условию 2), противоречие. □

Приведём пример вычисления l-первичного радикала для l-алгебр.

Пример 1. Рассмотрим алгебру Ли

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} L_i,$$

являющуюся кардинальной суммой l-алгебр L_i, где $L_i \cong B$ — линейно упорядоченная алгебра Ли над линейно упорядоченным полем $\mathbb{R}$ из примера 5 работы [6]. В алгебре B для базисных элементов e_1, e_2, e_3 выполнено условие

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3. \tag{1}$$

Кроме этого, будем считать, что каждый элемент из базиса в L_{i-1} больше любого элемента из базиса L_i $(i = 2, 3, \ldots)$. Тогда на L будет задано отношение линейного порядка, для которого выполняются условия 1) и 2) определения 1. Так как операции на L заданы покоординатно, то выполнено условие 3$'$) определения 1. Таким образом, алгебра L является линейно упорядоченной по Копытову.

Пусть $f \neq 0$ и $g \neq 0$ — произвольные элементы из L. Тогда для l-идеалов I_f и I_g по [11, теорема 7] получаем, что $I_f \subseteq I_g$ или $I_g \subseteq I_f$. Пусть для определённости $I_f \subseteq I_g$. Поскольку алгебра L бесконечномерна, то в идеале I_f найдутся три базисных вектора, удовлетворяющих условию (1). Следовательно, третий из найденных векторов содержится в $[I_f, I_g]$, поэтому $[I_f, I_g] \neq 0$. Отсюда по теореме 2 следует, что нулевой l-идеал в L является l-первичным, поэтому $l\text{-rad}(L) = \{0\}$.

3. l-радикал l-алгебры

В данном разделе изучаются свойства l-разрешимых l-идеалов l-алгебр над частично упорядоченным полем, в частности взаимосвязь l-полупервичности l-алгебры с наличием в этой l-алгебре l-разрешимых l-идеалов. Также в этом разделе исследуются свойства l-радикала l-алгебр.

Лемма 3. *Каждый ненулевой l-разрешимый l-идеал I l-алгебры L над частично упорядоченным полем K содержит ненулевой l-идеал, умножение в котором нулевое.*

Доказательство. По определению 3 для I найдётся ряд l-идеалов

$$I \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_{k-1} \supseteq I_k = \{0\}$$

l-алгебры L, в котором каждая фактор-алгебра I_j/I_{j+1} — алгебра с нулевым умножением. В частности, в фактор-алгебре $I_{k-1}/\{0\}$ умножение нулевое. Следовательно, ненулевой l-идеал I_{k-1} искомый, так как $I_{k-1} \subseteq I$. □

Определение 4. l-алгебра L над частично упорядоченным полем K называется l-полупервичной, если для любого l-идеала $I \neq \{0\}$ из L верно соотношение $I^2 \neq \{0\}$.

l-идеал P в l-алгебре L называется l-полупервичным, если фактор-алгебра L/P l-полупервична.

Благодаря лемме 3 можно сформулировать определение l-полупервичной l-алгебры, эквивалентное определению 4.

Определение 5. Решёточно упорядоченная алгебра L над частично упорядоченным полем K называется l-полупервичной, если она не содержит ненулевых l-разрешимых l-идеалов.

Рассмотрим утверждение, касающееся l-полупервичных идеалов l-алгебр и необходимое нам для дальнейшего изложения.

Лемма 4. *Если J — l-полупервичный l-идеал l-алгебры L над частично упорядоченным полем K и l-идеал A из L строго содержит J, то в L существует такой l-первичный l-идеал P, что $P \supseteq J$ и $P \not\supseteq A$.*

Доказательство. Так как $A \supsetneqq J$, то найдётся элемент $b \in A$, такой что $b \notin J$. Тогда по [7, лемма 2] в L существует такой l-первичный l-идеал P, что $P \supseteq J$ и $b \notin P$. Поскольку $b \notin P$ и $b \in A$, то $P \not\supseteq A$. □

Используя приведённое в теореме 3 поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебры, можно доказать свойство l-разрешимых l-идеалов l-алгебры L, сформулированное в предложении 1.

Доказательство предложения 1. Пусть A — l-разрешимый l-идеал решёточно упорядоченной алгебры L. Тогда по определению 3 в L существует цепочка идеалов

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{k-1} \supset A_k = \{0\},$$

в которой A_{i+1} является l-идеалом для A_i, а A_i/A_{i+1} — алгебры с нулевым умножением. Тогда для фактор-алгебры A_i/A_{i+1} получаем, что $(A_i)^2 \subseteq A_{i+1}$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in A$ и покажем, что $x \in l\text{-rad}(L)$. Для этого возьмём произвольную последовательность $\{x_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $x_1 = x$ и $x_{i+1} \in (I_{x_i})^2$. Так как $x_1 \in A$ и A является l-идеалом в L, то $I_{x_1} \subseteq A$. Исходя из доказанного выше, заключаем, что $(I_{x_1})^2 \subseteq A^2 \subseteq A_1$. Следовательно, для $x_2 \in (I_{x_1})^2$ имеем $x_2 \in A_1$. Поскольку для l-идеала A_1 справедливо включение $I_{x_2} \subseteq A_1$, а по доказанному выше $A_1^2 \subseteq A_2$, то $x_3 \in (I_{x_2})^2 \subseteq A_2$. Продолжая подобным образом, получим, что $x_k \in A_{k-1}$ и $x_{k+1} \in A_k = \{0\}$. Таким образом, рассматриваемая последовательность содержит нуль, откуда по теореме 3 получаем, что $x \in l\text{-rad}(L)$. Следовательно, $A \subseteq l\text{-rad}(L)$. □

Из доказанного предложения вытекает утверждение следствия 1, описывающее взаимосвязь l-радикала и l-первичного радикала l-алгебры.

Доказательство следствия 1. Пусть $\{J_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — множество всех l-разрешимых идеалов l-алгебры L. По предложению 1 получаем, что $J_\alpha \subseteq l\text{-rad}(L)$ для каждого $\alpha \in I$. Поэтому любая конечная сумма вида $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}$, где $x_{\alpha_k} \in J_{\alpha_k}$, принадлежит l-первичному радикалу $l\text{-rad}(L)$. Отсюда по определению l-радикала l-алгебры L получаем, что $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$. □

4. Свойства нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебр

Данный раздел содержит описание свойств нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебры над частично упорядоченными и направленными полями, в частности, указаны условия его совпадения с l-первичным радикалом l-алгебры.

С помощью трансфинитной индукции построим цепь l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем

$$0 = \mathfrak{N}_0(L) \subseteq \mathfrak{N}_1(L) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(L) \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L) \subseteq \ldots, \tag{2}$$

определяя для каждого порядкового числа α идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ следующим образом.

1. $\mathfrak{N}_0 = \{0\}$.
2. Предположим, что идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ построен для всех $\alpha < \mu$ и определим $\mathfrak{N}_\mu(L)$ следующим образом:
   а) если μ — предельное порядковое число, то $\mathfrak{N}_\mu(L) = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \mathfrak{N}_\alpha(L)$;
   б) если $\alpha+1$ не является предельным порядковым числом, то $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$ — это такой l-идеал l-алгебры L, содержащий l-идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$, что $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)/\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\alpha(L)\big)$.

В частности, $\mathfrak{N}_1(L)/\{0\} = \mathfrak{N}(L/\{0\})$, поэтому $\mathfrak{N}_1(L) = \mathfrak{N}(L)$ — сумма всех l-разрешимых l-идеалов l-алгебры L.

Нетрудно показать, что построенная цепь l-идеалов стабилизируется, т. е. существует такое порядковое число τ, что $\mathfrak{N}_\tau(L) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(L)$. Доказательство данного утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения для ассоциативных алгебр (см., например, [2, гл. 1, § 1]).

Определение 6. Нижним слабо разрешимым l-радикалом l-алгебры L над частично упорядоченным полем называется l-идеал $\mathfrak{B}(L) = \bigcup\limits_{\alpha\geqslant 0} \mathfrak{N}_\alpha(L)$, построенный по l-идеалам $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ из цепи (2).

Опишем взаимосвязь l-радикала и нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебры L.

Предложение 6. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем и $\mathfrak{B}(L)$ — её нижний слабо разрешимый l-радикал. Тогда $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{B}(L)\big) = 0$ и фактор-алгебра $L/\mathfrak{B}(L)$ является l-полупервичной.*

Доказательство. Так как цепь (2) стабилизируется, то существует порядковое число τ, такое что $\mathfrak{B}(L)=\mathfrak{N}_\tau(L)$. Отсюда по правилу построения цепи идеалов (2) получаем, что $\mathfrak{N}_\tau(L)=\mathfrak{N}_{\tau+1}(L)$, и поэтому

$$\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\tau(L)\big)=\mathfrak{N}_{\tau+1}(L)/\mathfrak{N}_\tau(L)=\mathfrak{N}_\tau(L)/\mathfrak{N}_\tau(L)=0,$$

т. е. фактор-алгебра $L/\mathfrak{N}_\tau(L)$ не имеет ненулевых l-разрешимых l-идеалов. Следовательно, фактор-алгебра $L/\mathfrak{B}(L)=L/\mathfrak{N}_\tau(L)$ является по определению 5 l-полупервичной l-алгеброй. □

В теореме 5 сформулированы условия совпадения в произвольной l-алгебре L над направленным полем её l-первичного радикала $l\text{-rad}(L)$ и нижнего слабо разрешимого l-радикала $\mathfrak{B}(L)$.

Доказательство теоремы 5. Из следствия 1 известно, что $\mathfrak{N}_1(L)=\mathfrak{N}(L)\subseteq$ $\subseteq l\text{-rad}(L)$. Предположим, что $\mathfrak{N}_\gamma(L)\subseteq l\text{-rad}(L)$. Докажем, что $\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L)\subseteq$ $\subseteq l\text{-rad}(L)$. Пусть существует такой элемент $a\in\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L)$, что $a\notin l\text{-rad}(L)$. Тогда по правилу задания идеалов цепи (2) получаем, что $a+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in$ $\in\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L)/\mathfrak{N}_\gamma(L)=\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)$, при этом по следствию 1 верно включение $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)\subseteq l\text{-rad}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)$. Таким образом, $a+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in l\text{-rad}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)$ и, следовательно, по теореме 3 содержит нуль $0+\mathfrak{N}_\gamma(L)$ любая последовательность $\{a_j+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\mid j\in\mathbb{N}\}$, для которой $a_1+\mathfrak{N}_\gamma(L)=a+\mathfrak{N}_\gamma(L)$ и $a_{i+1}+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in\big(I_{a_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\big)^2$.

Для элемента $a\notin l\text{-rad}(L)$ из теоремы 3 следует существование необнуляющейся последовательности $\{b_j\in L\mid j\in\mathbb{N}\}$, в которой $b_1=a$ и $b_{i+1}\in(I_{b_i})^2$. Тогда $b_1+\mathfrak{N}_\gamma(L)=a+\mathfrak{N}_\gamma(L)$ и, так как $(I_{b_i})^2+\mathfrak{N}_\gamma(L)=\big(I_{b_i}+\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)^2$, то $b_{i+1}+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in\big(I_{b_i}+\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)^2$.

Покажем, что $I_{b_i}+\mathfrak{N}_\gamma(L)\subseteq I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$. По теореме 1 идеал $I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$ состоит из элементов $x+\mathfrak{N}_\gamma(L)$ фактор-алгебры $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$, для которых верно неравенство $|x+\mathfrak{N}_\gamma(L)|\leqslant\gamma_x|b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)|$ для некоторого элемента $\gamma_x\in K$. Учитывая [10, замечание 23], получаем, что

$$I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}=\{x+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\mid |x|+\mathfrak{N}_\gamma(L)\leqslant\gamma_x|b_i|+\mathfrak{N}_\gamma(L)\}.$$

Для каждого элемента l-идеала

$$I_{b_i}+\mathfrak{N}_\gamma(L)=\{x+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\mid x\in I_{b_i}\}$$

по теореме 1 имеет место неравенство $|x|\leqslant\gamma_x|b_i|$, из которого по правилу задания отношения порядка на фактор-алгебре $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$ следует, что

$$|x+\mathfrak{N}_\gamma(L)|=|x|+\mathfrak{N}_\gamma(L)\leqslant\gamma_x|b_i|+\mathfrak{N}_\gamma(L).$$

Отсюда по доказанному выше получаем, что $I_{b_i}+\mathfrak{N}_\gamma(L)\subseteq I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$. Значит, $b_{i+1}+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in\big(I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\big)^2$.

Итак, построена последовательность

$$\{b_j+\mathfrak{N}_\gamma(L)\in L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\mid j\in\mathbb{N}\},$$

элементы которой удовлетворяют следующим условиям: $b_1+\mathfrak{N}_\gamma(L) = a+\mathfrak{N}_\gamma(L)$ и $b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big(I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\big)^2$. Такая последовательность, по доказанному выше, должна обращаться в нуль, т. е. существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $b_n + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \mathfrak{N}_\gamma(L)$, и значит, $b_n \in \mathfrak{N}_\gamma(L)$. Так как по предположению индукции $\mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$, то $b_n \in l\text{-rad}(L)$. По теореме 3 отсюда следует, что содержит нуль любая последовательность $\{c_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$, для которой $c_1 = b_n$ и $c_{k+1} \in (I_{c_k})^2$. Поскольку по доказанному выше последовательность $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$ не содержит нуля, то $b_n \neq 0$. Следовательно, существует такой индекс $m \geqslant 2$, что $c_m = 0$.

Рассмотрим в качестве элемента c_2 элемент $b_{n+1} \in (I_{b_n})^2$ из последовательности $\{b_j \in L\}$, в качестве $c_3 \in (I_{c_2})^2 = (I_{b_{n+1}})^2$ возьмём b_{n+2} и т. д. По доказанному выше существует такой номер $m \geqslant 2$, что $c_m = b_{n+m-1} = 0$. Получаем противоречие с тем, что последовательность $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$ нуля не содержит.

Значит, $a \in l\text{-rad}(L)$. Поэтому $\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$. С помощью трансфинитной индукции получим, что

$$\mathfrak{N}_\mu(L) = \bigcup_{\alpha<\mu} \mathfrak{N}_\alpha(L) \subseteq l\text{-rad}(L)$$

для предельного числа μ. Тогда нижний слабо разрешимый l-радикал $\mathfrak{B}(L) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0} \mathfrak{N}_\alpha(L)$ также содержится в l-первичном радикале.

Допустим, что $\mathfrak{B}(L) \subsetneqq l\text{-rad}(L)$. Отсюда, учитывая, что $\mathfrak{B}(L)$ является по предложению 6 и определению 4 l-полупервичным идеалом в L, по лемме 4 получим, что существует l-первичный идеал P в L, для которого $P \supseteq \mathfrak{B}(L)$ и $P \not\supseteq l\text{-rad}(L)$. Но любой l-первичный идеал содержит $l\text{-rad}(L)$, противоречие. Таким образом, $\mathfrak{B}(L) = l\text{-rad}(L)$. □

Литература

[1] Агалаков С. А., Штерн А. С. Свободные произведения линейно упорядочиваемых алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 3. — С. 5—9.

[2] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[3] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[4] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные алгебры Ли // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 595—607.

[5] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[6] Кочетова Ю. В. О некоторых свойствах идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная сер. Математика. — 2007. — № 7 (57). — С. 73—83.

[7] Кочетова Ю. В. Первичные и полупервичные решёточно упорядоченные алгебры Ли // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 137—143.

[8] Кочетова Ю. В. Первичные идеалы решёточно упорядоченных алгебр Ли // Междунар. алгебраическая конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2008. — С. 140—141.

[9] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 191—192.

[10] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: Сб. статей, посвящённый памяти Н. Я. Медведева. — Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та, 2007. — С. 131—142.

[11] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.

[12] Ламбек И. Кольца и модули. – М.: Мир, 1971.

[13] Медведев Н. Я. О продолжении порядков алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 2. — С. 469—471.

[14] Медведев Н. Я. О решётках многообразий решёточно упорядоченных групп и алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 40—45.

[15] Медведев Н. Я. К теории решёточно упорядоченных колец // Мат. заметки. — 1987. — Т. 41, № 4. — С. 484—489.

[16] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сб. работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[17] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 84—86.

[18] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 193—199.

[19] Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

[20] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[21] Щукин К. К. RI-разрешимый радикал группы // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021—1031.