О геометрии двух кубитов

Т. Э. КРЕНКЕЛЬ
Московский технический университет связи и информатики
e-mail: krenkel2001@mail.ru

УДК 512.544.33+519.1+519.145.4

Ключевые слова: обобщённый четырёхугольник порядка 2, проективное пространство, блок-схема Адамара, два кубита, обобщённые матрицы Паули.

Аннотация

Два кубита представляют собой спинор в четырёхмерном комплексном гильбертовом пространстве, описывающем состояние четырёхуровневой квантовой системы. Такая система является базовой для квантовых вычислений и описывается обобщённым уравнением Паули, в которое входят обобщённые матрицы (операторы) Паули. Обобщённые матрицы Паули образуют нильпотентную класса 2 группу Паули $\mathcal{P}_2$. Доказано, что отношение коммутирования в группе Паули $\mathcal{P}_2$ и отношение инцидентности в 2-$(15,7,3)$ блок-схеме Адамара определяют эквивалентные матрицы инцидентности.

Abstract

T. E. Krenkel, On the geometry of two qubits, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 69—73.

Two qubits are considered as a spinor in the four-dimensional complex Hilbert space that describes the state of a four-level quantum system. This system is basic for quantum computation and is described by the generalized Pauli equation including the generalized Pauli matrices. The generalized Pauli matrices constitute the finite Pauli group $\mathcal{P}_2$ for two qubits of order 2^6 and nilpotency class 2. It is proved that the commutation relation for the Pauli group $\mathcal{P}_2$ and the incidence relation in an Hadamard 2-$(15,7,3)$ design give rise to equivalent incidence matrices.

Конечным обобщённым четырёхугольником порядка (s,t) (обычно он обозначается $\mathrm{GQ}(s,t)$) называется структура инцидентности $S=(P,B,\mathrm{I})$, где P и B — непустые множества объектов, называемых точками и прямыми, а I — симметричное отношение инцидентности «точка—прямая», удовлетворяющее следующим аксиомам [3]:

GQ1 каждая точка инцидентна $1+t$ прямым $(t\geqslant 1)$ и две различные точки инцидентны не более чем одной прямой;

GQ2 каждая прямая инцидентна $1+s$ точкам $(s\geqslant 1)$ и две различные прямые инцидентны не более чем одной точке;

GQ3 если x — точка, а L — прямая, неинцидентная x, то существует единственная пара $(y,M)\in P\times B$, для которой выполняется отношение $x\ \mathrm{I}\ M\ \mathrm{I}\ y\ \mathrm{I}\ L$.

Из приведённых аксиом следует, что $|P| = (s+1)(st+1)$ и $|B| = (t+1)(st+1)$. Если $s = t$, то говорят, что четырёхугольник S имеет порядок s.

Если заданы две точки x и y структуры инцидентности S, то $x \sim y$ обозначает их коллинеарность, если существует прямая L структуры S, инцидентная им обеим. Для любой $x \in P$ будем обозначать $x^{\perp} = \{y \in P \mid y \sim x\}$. Заметим, что $x \in x^{\perp}$. Очевидно, что $|x| = 1 + s + st$.

Теорема Пейна—Таса [3] устанавливает взаимно-однозначное соответствие между обобщёнными четырёхугольниками и симметричными блок-схемами.

Теорема Пейна—Таса. *Обобщённый четырёхугольник порядка s задаёт симметричную* 2-$(s^3 + s^2 + s + 1, s^2 + s + 1, s + 1)$ *блок-схему.*

Из приведённой теоремы следует, что обобщённый четырёхугольник порядка 2, обозначаемый $\mathrm{W}(3, 2)$, задаёт симметричную блок-схему 2-$(15, 7, 3)$ (блок-схему Адамара 2-$(15, 7, 3)$).

Для координатизации обобщённого четырёхугольника $\mathrm{W}(3, 2)$ необходимо воспользоваться теоремой Дембовского—Вагнера [1].

Теорема Дембовского—Вагнера. *Пусть D — симметричная блок-схема и число точек на прямой равно λ. Тогда D — проективное пространство.*

В случае блок-схемы Адамара 2-$(15, 7, 3)$ $\lambda = 3$ и $D = \mathrm{PG}(3, 2)$. Трёхмерное проективное пространство $\mathrm{PG}(3, 2)$ над $GF(2)$ содержит 15 точек, 35 прямых и 15 плоскостей. Перенумеруем точки проективного пространства $\mathrm{PG}(3, 2)$. Обозначим через α корень неприводимого полинома $p(x) = x^4 + x + 1$, с помощью которого будем производить нумерацию. Для сокращения записи будем писать $\alpha^i = (u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$ вместо $\alpha^i = (u_{i0} + u_{i1}\alpha + u_{i2}\alpha^2 + u_{i3}\alpha^3)$. Тогда все ненулевые элементы поля $GF(2^4)$ могут быть перечислены следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\alpha^0 = (1,0,0,0), && \alpha^5 = (0,1,1,0), && \alpha^{10} = (1,1,1,0),\\
&\alpha^1 = (0,1,0,0), && \alpha^6 = (0,0,1,1), && \alpha^{11} = (0,1,1,1),\\
&\alpha^2 = (0,0,1,0), && \alpha^7 = (1,1,0,1), && \alpha^{12} = (1,1,1,1),\\
&\alpha^3 = (0,0,0,1), && \alpha^8 = (1,0,1,0), && \alpha^{13} = (1,0,1,1),\\
&\alpha^4 = (1,1,0,0), && \alpha^9 = (0,1,0,1), && \alpha^{14} = (1,0,0,1).
\end{aligned}
$$

Каждую степень α^i можно отождествить с той точкой проективного пространства $\mathrm{PG}(3, 2)$, которой приписывается номер i, $i = 0, 1, \ldots, 14$. Строки $(u_{i0}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$ определяют проективные координаты точек $\mathrm{PG}(3, 2)$.

Зададим на множестве точек P пространства $\mathrm{PG}(3, 2)$ симплектическую билинейную форму

$$B(x, y) = x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Будем называть две точки x и y сопряжёнными ($x \approx y$), если для них симплектическая форма $B(x, y)$ обращается в ноль. Каждая точка является самосопряжённой, и две точки, лежащие на прямой, также являются сопряжёнными.

Множество сопряжённых точек в обобщённом четырёхугольнике $\mathrm{W}(3,2)$ образует пучок изотропных прямых $x^{\perp}$. Точка x называется основанием пучка изотропных прямых. Пучок состоит из трёх прямых с общим основанием $x \in x^{\perp}$, и $|x^{\perp}| = 7$.

Предложение 1. *Пучки изотропных прямых обобщённого симплектического четырёхугольника* $\mathrm{W}(3,2)$ *являются блоками блок-схемы Адамара* $2\text{-}(15,7,3)$.

Справедливость этого предложения следует из определения блок-схемы Адамара и приведённых выше рассуждений.

Из теоремы Пейна—Таса и теоремы Дембовского—Вагнера следует предложение 2.

Предложение 2. *Обобщённый симплектический четырёхугольник* $\mathrm{W}(3,2)$ *погружается в проективное пространство* $\mathrm{PG}(3,2)$.

Обобщённый четырёхугольник $\mathrm{W}(3,2)$ содержит 15 точек и 15 прямых и изображается в виде неориентированного графа Пейна—Паули $\mathcal{G}_2$, имеющего 15 вершин и 30 рёбер.

На рис. 1 изображён граф Пейна—Паули $\mathcal{G}_2$ и координаты его вершин, чёрным выделены вершины и рёбра графа Пейна—Паули $\mathcal{G}_2$, соответствующие пучку изотропных прямых с основанием $x = 7$.

Для описания геометрии двух кубитов ключевыми являются следующие наблюдения [4]:

1) каждой вершине графа Пейна—Паули $\mathcal{G}_2$ приписывается тензорное произведение матриц Паули σ_0, σ_x, σ_y и σ_z;

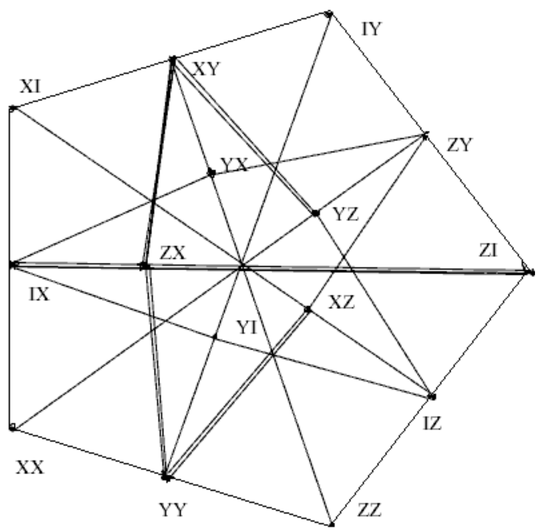

Рис. 1

2) отношение сопряжённости точек в $\mathrm{W}(3,2)$ (отношение инцидентности «точка—блок» в блок-схеме Адамара 2-$(15,7,3)$) заменяется на отношение коммутирования для тензорных произведений матриц Паули (обобщённых матриц Паули).

Матрицы Паули

$$\sigma_0 = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \sigma_x = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_2 = \sigma_y = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

описывают преобразование состояний частицы со спином $1/2$ в двумерном комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^2$ (пространстве спиноров) и удовлетворяют отношениям коммутирования

$$\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \quad \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x, \quad \sigma_z\sigma_x = i\sigma_y.$$

Образуем множество $\mathbb{P}$ тензорных произведений $\sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta$, $\alpha, \beta = 0, x, y, z$. Эти обобщённые матрицы Паули (операторы) действуют в комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^4$, соответствующем четырёхуровневой квантовой системе двух частиц со спином $1/2$ (пространстве двух кубитов).

Обозначим через $\mathbb{P}^\times = \mathbb{P} \backslash \{\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}\}$ матрицы, которые образуют конечную порядка 2^6 класса нильпотентности 2 группу Паули $\mathcal{P}_2$ для двух кубитов. Эта группа, в связи со сказанным выше, определяется как $\mathcal{P}_2 = \{\mathbb{I}, X, Y, Z\}^{\otimes 2} \times \{\pm 1, \pm i\}$. Она изоморфна группе $[64, 266]$ перестановок порядка 64 из списка малых групп. Её можно также рассматривать как центральное произведение $\mathcal{P}_2 \cong E_{32}^{\pm} * \mathbb{Z}_4$, так как группа $[64, 266]$ содержит экстраспециальные группы $E_{32}^{\pm}$ и циклическую группу $\mathbb{Z}_4$ как нормальные подгруппы.

Отношение коммутирования для матриц из $\mathbb{P}^\times$, обозначаемое $[\,,\,]$ (правый теоретико-групповой коммутатор), принимается по определению эквивалентным отношению сопряжённости $\approx$ в обобщённом симплектическом четырёхугольнике $\mathrm{W}(3,2)$, т. е. коммутирующие матрицы принадлежат одному и тому же пучку изотропных прямых. Экспонента группы Паули $\mathcal{P}_2$ для двух кубитов равна 4 [2, 5].

Предложение 3.

1. *Коммутант группы Паули двух кубитов* $\mathcal{P}_2' = [\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_2]$ *равен центру* $\mathbf{Z}(\mathcal{P}_\mathbf{2}) = \{\pm\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \pm i\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}\}$.
2. *Имеет место короткая точная последовательность*

$$1 \mapsto \mathbf{Z}(\mathcal{P}_2) \mapsto \mathcal{P}_2 \mapsto V(4,2) \mapsto 1.$$

Теорема. *Матрицы инцидентности блок-схемы Адамара* 2-$(15,7,3)$ *и геометрии двух кубитов эквивалентны.*

Доказательство. Произведём абелизацию группы Паули $\mathcal{P}_2$ двух кубитов. Полученная фактор-группа $\mathcal{P}_2/\mathbf{Z}(\mathcal{P}_2)$ представляет собой векторное пространство $\mathrm{V}(4,2)$. Превращая это пространство в проективное пространство $\mathrm{PG}(3,2)$

и проводя его координатизацию, получаем блок-схему Адамара 2-$(15, 7, 3)$. Все строки и столбцы матрицы инцидентности блок-схемы Адамара имеют семь знаков $+$ и восемь знаков $-$, что соответствует отношению инцидентности «точка—блок». Вводя на проективном пространстве $\mathrm{PG}(3, 2)$ симплектическую форму B и образуя пучки изотропных прямых, получаем обобщённый симплектический четырёхугольник $\mathrm{W}(3, 2)$, который погружается в проективное пространство $\mathrm{PG}(3, 2)$. Вершины графа Пейна—Паули $\mathcal{G}_2$, изображающего обобщённый четырёхугольник $\mathrm{W}(3, 2)$, пронумерованы точками проективного пространства, как изображено на рис. 1. Используя соответствия

$$\{00 \mapsto \mathbb{I},\ 01 \mapsto X,\ 10 \mapsto Y,\ 11 \mapsto Z\},$$

приписываем каждой вершине графа Пейна—Паули $\mathcal{G}_2$ соответствующую обобщённую матрицу Паули. Обобщённые матрицы Паули, коммутирующие между собой, как видно из рис. 1, принадлежат одному и тому же пучку изотропных прямых. Так как число точек в пучке изотропных прямых равно 7, а всего точек в обобщённом четырёхугольнике 15, то, следовательно, число некоммутирующих (при заданном основании пучка) между собой обобщённых матриц Паули равно 8. Так как $|\mathbb{P}^{\times}| = 15$, получаем матрицу инцидентности геометрии двух кубитов, приведённую в [4], т. е. все строки и столбцы этой матрицы содержат семь знаков $+$ и восемь знаков $-$, соответствующих отношению коммутирования обобщённых матриц Паули для двух кубитов. Перестановкой строк и столбцов матрица инцидентности блок-схемы Адамара может быть переведена в матрицу инцидентности геометрии двух кубитов, что означает их эквивалентность. $\square$

Литература

[1] Dembowski P., Wagner A. Some characterizations of finite projective spaces // Arch. Math. — 1960. — Vol. 11. — P. 465—459.

[2] Havlicek H., Odehnal B., Saniga M. Factor group generated polar spaces and (multi-)qudits // SIGMA. — 2009. — Vol. 5, 096.

[3] Payne S. E., Thas J. A. Finite Generalized Quadrangles. — Pitman: Boston, 1984.

[4] Planat M., Saniga M. On the Pauli graphs of N-qudits // Quantum Inform. Comput. — 2008. — Vol. 8, no. 1-2. — P. 127—146.

[5] Thas K. The geometry of generalized Pauli operators of N-qudit Hilbert space, and applications to MUBs // Europhysics Letters. — 2009. — Vol. 86. — P. 6.