Конечность стандартного базиса T -идеала, содержащего лиеву нильпотентность индекса 4

В. Н. ЛАТЫШЕВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 512.554

Ключевые слова: T -идеал, стандартный базис T -идеала, лиева нильпотентность степени 4.

Аннотация

Ранее автором было определено понятие стандартного базиса T -идеала свободной ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики и доказано, что он конечен, если T -идеал содержит лиеву нильпотентность индекса 3 или полилинейное произведение коммутаторов второй степени. В этой работе доказывается конечность стандартного базиса любого T -идеала, содержащего лиеву нильпотентность четвёртой степени.

Abstract

V. N. Latyshev, Finiteness of the standard basis of a T -ideal containing Lie nilpotency of index 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 75–85.

Recently the author presented a notion of standard basis for a T -ideal of the free associative algebra over a field of zero characteristic. It was proved that it is finite if the T -ideal contains either Lie nilpotency of index 3 or a multilinear product of commutators of degree 2. Here we prove the finiteness of the reduced standard basis of any T -ideal containing Lie nilpotency of index 4.

1. Стандартные базисы T -идеалов

Пусть $k\langle X \rangle$ — свободная ассоциативная алгебра со счётным множеством порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ над полем k нулевой характеристики, $T \triangleleft k\langle X \rangle$ — её T -идеал (вполне характеристический идеал). Для краткости элементы алгебры $k\langle X \rangle$ будем называть (некоммутативными) полиномами. На множестве мономов из $r\langle X \rangle$ определим степенно-лексикографический порядок (deg-lex): $u \leq v$ тогда и только тогда, когда либо u имеет меньшую степень, чем v , либо u меньше v в лексикографическом смысле, где элементы $x_1, \dots, x_n, \dots$ упорядочиваются по индексам. Из очевидных соображений этот порядок удовлетворяет условию минимальности в свободной полугруппе $\langle X \rangle$,

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 75–85.

© 2011/2012 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

порождённой алфавитом X . Старший моном полинома $f \in k\langle X \rangle$ обозначается $\bar{f}$, а через 0f обозначается полином, полученный из f делением на старший коэффициент.

Известно, что над полем нулевой характеристики любой T -идеал $T \triangleleft k\langle X \rangle$ порождается системой своих полилинейных элементов. На множестве полилинейных мономов $\langle X \rangle_{\text{mult}} \subset \langle X \rangle$ определим отношение «частичного предпорядка», называемое *накрытием*: $u \leq_0 v$ тогда и только тогда, когда $u = x_{i_1} \dots x_{i_s}$, $v = \dots x_{j_1} \dots x_{j_s} \dots$ и отображение конечных множеств натуральных чисел

$$\varphi: \{i_1, \dots, i_s\} \rightarrow \{j_1, \dots, j_s\}, \quad \varphi(i_k) = j_k, \quad k = 1, \dots, s,$$

является изотонным. Конечно, выбор переменных x_{j_i} неоднозначен, вообще говоря. На множестве слов фиксированной длины отношение накрытия рефлексивно. На множестве всех мономов $\langle X \rangle$ оно определяет отношение эквивалентности: $u \sim v$ тогда и только тогда, когда $u \leq_0 v$ и $v \leq_0 u$. На фактор-множестве $\langle X \rangle / \sim$ отношение накрытия определяет частичный порядок, удовлетворяющих условию минимальности: $[u] \leq_0 [v]$ тогда и только тогда, когда $u \leq_0 v$.

Система полилинейных полиномов $F = \{f_1, \dots, f_m, \dots\}$ T -идеала T , конечная или бесконечная, называется *стандартным базисом* T , если для всякого полилинейного полинома $f \in T$ найдётся такой полином $f_i \in F$, что $\bar{f}_i \leq_0 \bar{f}$. Несложно заметить, что стандартный базис F порождает T -идеал T . В самом деле, пусть $f \in T$ — полилинейный полином, $f_i \in F$ и $\bar{f}_i \leq_0 \bar{f}$. Тогда возможны представления вида $\bar{f}_i x_{r_1} \dots x_{r_m}$, $\bar{f} = u_1 x_{s_1} u_2 x_{s_2} \dots u_m x_{s_m} u_{m+1}$ (некоторые из мономов u_i могут быть пустыми), причём отображение множеств натуральных чисел

$$\varphi: \{r_1, \dots, r_m\} \rightarrow \{s_1, \dots, s_m\}, \quad \varphi: r_j \mapsto s_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

изотонно. Полином $g = u_1 {}^0f_i(x_{s_1} u_1, \dots, x_{s_m} u_m)$ унитарный (старший коэффициент равен 1), полилинейный, зависит от того же набора переменных, что и f , причём $\bar{g} = \bar{f}$. Следовательно, полином $h = {}^0f - g$ принадлежит T -идеалу F^T , порождённому полиномами F , и либо $h = 0$, либо $\bar{h} < \bar{f}$. Если $h \neq 0$, то к полиному h применим указанную процедуру и т. д. За конечное число шагов в силу убывания старших мономов мы получим нулевой полином, а это и доказывает, что $f \in F^T$. Ранее мы отмечали, что T -идеал T порождается своими полилинейными полиномами, поэтому $T = F^T$.

Понятие стандартного базиса T -идеала в случае полей нулевой характеристики было введено в работе автора [4]. Там этот базис назывался *комбинаторной системой порождающих* или *базисом Грёбнера—Ширшова*. В 1951 г. В. Шпехт сформулировал свою известную гипотезу о конечной порождённости любого T -идеала, если основное поле имеет нулевую характеристику [6]. В 1986 г. А. Р. Кемер [2] получил положительный ответ на этот вопрос. Следовательно, над полями нулевой характеристики всякий T -идеал порождается конечной системой полилинейных полиномов. Неизвестно, обладает ли в рассматриваемом случае всякий T -идеал конечным стандартным базисом. В [4]

показано, что это справедливо в отношении любого T -идеала, содержащего полином $[x_1, x_2, x_3]$ или полином $[x_1, x_2] \dots [x_{2m-1}, x_{2m}]$, где $[a_1, a_2] = a_1 a_2 - a_2 a_1$ и $[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$.

В данной работе доказывается, что над полями нулевой характеристики любой T -идеал, содержащий полином $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, обладает конечным стандартным базисом.

Конечная система полилинейных полиномов $F = \{f_1, \dots, f_m\} \subset k\langle X \rangle$, $\text{char } k = 0$, называется *комбинаторно шпехтовой* (термин из [4]), если всякий T -идеал $T \triangleleft k\langle X \rangle$, содержащий F , обладает конечным стандартным базисом. В этой терминологии каждый из приведённых выше полиномов образует комбинаторно шпехтову систему, или, коротко, является комбинаторно шпехтовым.

Полилинейный полином степени d назовём *регулярным*, если он зависит от переменных $x_1, \dots, x_d$. Ясно, что в случае нулевой характеристики всякий T -идеал $T \triangleleft k\langle X \rangle$ порождается множеством своих регулярных полилинейных элементов.

Старший моном регулярного полилинейного элемента T -идеала T назовём его *T -обструкцией* (по аналогии с термином *обструкция*, введённым Д. Аником для полиномиального идеала), если он не накрывает ни одного старшего монома регулярного элемента из T .

По очевидным соображениям всякий T -идеал $T \triangleleft k\langle X \rangle$ обладает стандартными базисами. Стандартный базис $F = \{f_1, \dots, f_m, \dots\}$ T -идеала T будем называть *редуцированным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) старшие коэффициенты полиномов $f_i \in F$ равны 1;
- 2) полиномы $f_i \in F$ регулярны;
- 3) ни один из мономов, входящих в запись полинома $f_i \in F$, не редуцируется полиномами $F \setminus f_i$.

Последнее означает, что ни один из мономов полинома f_i не накрывает старший моном $\bar{f}_j \in F$, $j \neq i$.

Ниже используются следующие общепринятые обозначения: $P_d \subseteq k\langle X \rangle$ — линейное подпространство полилинейных регулярных полиномов, $\dim P_d = d!$, $T_d = T \cap P_d$ — подпространство регулярных полилинейных элементов из T .

Предложение 1. В любом T -идеале $T \triangleleft k\langle X \rangle$ существует редуцированный стандартный базис, и притом только один.

Доказательство. Докажем существование редуцированного стандартного базиса. Для любой T -обструкции $u_i \in P_d$ выберем один её унитарный носитель $f_i \in T_d$, т. е. $\bar{f}_i = u_i$. Тогда система полиномов $F = \{f_1, \dots, f_m, \dots\}$ образует стандартный базис T -идеала T , поскольку старший моном $\bar{f}$ любого элемента $f \in T_d$, $d = \deg f$, накрывает хотя бы одну из T -обструкций. Если «младшие» мономы никакого из полиномов f_i не накрывают T -обструкции, то F — редуцированный стандартный базис T -идеала T . Если это не так, то перейдём к новому стандартному базису, «подправив» полиномы F . А именно, фиксируем полином $f_i \in F$, $\deg f_i = d_i$. Если его младшие мономы не накрывают

T -обструкции, то положим $g_i = f_i$. Если среди младших мономов полинома f_i есть те, которые накрывают T -обструкции, то начинаем их последовательно редуцировать с помощью полиномов f_j , $f_j < f_i$. Так как процесс редукиции происходит в конечномерном пространстве T_{d_i} , то за конечное число шагов мы придём к полиному g_i , младшие мономы которого не накрывают T -обструкции. Система полиномов $G = \{g_1, \dots, g_m, \dots\}$ образует редуцированный стандартный базис T -базиса T . При этом $\bar{f}_i = \bar{g}_i$.

Докажем единственность редуцированного стандартного базиса. Пусть $F = \{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ и $G = \{g_1, \dots, g_m, \dots\}$ — два редуцированных стандартных базиса T -идеала T , $\bar{f}_i = \bar{g}_i$, $i = 1, \dots, m, \dots$, — T -обструкции. Если $f_i \neq g_i$, то старший моном полинома $h = f_i - g_i \in T$ не накрывает ни одну из T -обструкций, противоречие. Следовательно, $f_i = g_i$. $\square$

Редуцированный стандартный базис T -идеала T конечен тогда и только тогда, когда количество T -обструкций конечно. Если T -идеал задан конечной системой порождающих, то существует перечислительная процедура для построения его редуцированного стандартного базиса. При описании этой процедуры для простоты будем предполагать, что свободная ассоциативная алгебра $k\langle X \rangle$ не имеет единичного элемента, хотя это и не принципиально.

Пусть $f \in k\langle X \rangle$ — регулярный полилинейный полином степени d и $T \triangleleft \triangleleft k\langle X \rangle$ — порождённый им T -идеал. Тогда пространство T_m , $n \geq d$, является линейной оболочкой регулярных полилинейных полиномов вида $vf(u_1, \dots, u_d)w$, где v , u_i , w — мономы и

$$\deg v + \sum_{i=1}^d \deg u_i + \deg w = m.$$

Это соображение позволяет построить ступенчатый базис Гаусса в каждом из подпространств T_m в случае, когда T -идеал T порождён конечным числом регулярных полилинейных полиномов $F = \{f_1, \dots, f_s, \dots\}$. Так как основное поле имеет нулевую характеристику, то от любой конечной системы порождающих T -идеала T можно перейти именно к такой системе порождающих. При этом базисом в P_m считается система мономов от переменных x_i , $i = 1, \dots, m$. Базис Гаусса в T_m можно выбрать *редуцированным* в том смысле, что в запись никакого базисного полинома не входят старшие мономы других базисных полиномов, а старшие коэффициенты равны 1. Такой базис в пространстве T_m единственен.

Искомая перечислительная процедура состоит в следующем. Пусть d — минимальная степень элементов T -идеала T . На первом шаге фиксируем редуцированный базис Гаусса пространства T_d , объявляя его начальными элементами стандартного базиса T -идеала T . Пусть уже построены элементы стандартного базиса степеней не выше $m-1$, $n \geq d+1$. После этого рассматриваем редуцированный базис Гаусса пространства T_m . Если старший моном базисного элемента накрывает один из старших мономов уже построенных на предыдущих шагах

полиномов, то мы такой элемент из базиса Гаусса пространства T_m отбрасываем. В оставшихся элементах базиса Гаусса пространства T_m младшие мономы редуцируем последовательно с помощью уже построенных полиномов до тех пор, пока это возможно. Полученную таким образом систему полиномов присоединяем к уже построенной системе полиномов и переходим к следующему шагу. На этом описание перечислительного процесса заканчивается. Очевидно, что счётное число шагов приводит к построению редуцированного стандартного базиса T -идеала T . Заметим, что на некотором шаге могут оказаться выброшенными все элементы базиса Гаусса пространства T_m . Тогда просто переходим к следующему шагу.

К сожалению, в настоящее время не известен алгоритм, позволяющий распознать, является ли предъявленная конечная система полиномов стандартным базисом порождённого ею T -идеала. Поэтому указанный перечислительный процесс не приводит к построению конечного стандартного базиса T -идеала в случае, когда число T -обструкций конечно.

2. Типы частично упорядоченных множеств. Метод Хигмана—Коэна

Частично упорядоченное множество $(P, \leq)$ называется *вполне частично упорядоченным*, если любое его непустое подмножество содержит конечное (непустое) подмножество минимальных элементов. В частности, P не содержит бесконечных *антицепей* (подмножеств с попарно несравнимыми элементами).

Предложение 2. Следующие условия, наложенные на частично упорядоченное множество $(P, \leq)$, равносильны:

- 1) P удовлетворяет условию минимальности и не содержит бесконечных антицепей;
- 2) P является вполне частично упорядоченным;
- 3) всякая бесконечная последовательность из P содержит бесконечную неубывающую подпоследовательность (цепное условие);
- 4) в любой бесконечной последовательности $a_1, \dots, a_n, \dots$ элементов из P найдётся такая пара индексов $i < j$, что $a_i \leq a_j$ (условие Хигмана).

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть $M \subseteq P$ — любое подмножество. Из условия минимальности вытекает наличие в M минимальных элементов. Так как минимальные элементы в M образуют антицепь, то их конечное число.

Убедимся в справедливости импликации 2) $\implies$ 3). В бесконечной последовательности $a_1, \dots, a_n, \dots$ элементов из P существует конечное число минимальных элементов, причём каждый элемент последовательности сравним хотя бы

с одним из этих минимальных элементов. Поэтому заведомо существует минимальный элемент, скажем a_{i_1} , правее которого расположена бесконечная подпоследовательность элементов $\{a'_n\}$, сравнимых с a_{i_1} . Применив к подпоследовательности $\{a'_n\}$ предыдущее рассуждение, мы получим элемент a_{i_2} , $a_{i_1} \leq a_{i_2}$, и бесконечную подпоследовательность элементов $\{a''_n\}$, расположенных правее a_{i_2} и сравнимых с a_{i_2} , $a_{i_2} \leq a''_j$. Продолжая этот процесс, мы придём к бесконечной неубывающей подпоследовательности элементов $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq \dots \leq a_{i_m} \leq \dots$ исходной последовательности.

Импликация 3) $\implies$ 4) очевидна.

Докажем импликацию 4) $\implies$ 1). Бесконечная убывающая последовательность и бесконечная антицепь в P не удовлетворяют условию Хигмана. $\square$

Для наших целей важными являются следующие *замечательные порядки*.

1. *Объединение конечного числа вполне частично упорядоченных множеств*. Пусть $P_1, \dots, P_m$ — вполне частично упорядоченные множества и $P = \bigcup_{i=1}^m P_i$ — их объединение. Определим на P частичный порядок, при котором элементы из одного множества P_i сравниваются согласно порядку, определённому в P_i , а элементы из разных подмножеств считаются несравнимыми. Тогда P — вполне частично упорядоченное множество. Дело в том, что если бы существовала бесконечная убывающая цепочка элементов из P или бесконечная антицепь из P , то они содержали бы бесконечное количество элементов из одного множества P_i , что невозможно.

2. *Декартово произведение вполне частично упорядоченных множеств*. Пусть $P_1, \dots, P_m$ — вполне частично упорядоченные множества и $P = P_1 \times \dots \times P_m$ — их декартово произведение. На P введём покомпонентный порядок: $(a_1, \dots, a_m) \leq (b_1, \dots, b_m)$ тогда и только тогда, когда $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, m$. Рассуждая индукцией по числу множеств m , несложно установить, что $(P, \leq)$ — вполне частично упорядоченное множество. Действительно, из любой бесконечной последовательности элементов множества P можно выбрать бесконечную подпоследовательность строк, в которых первые координаты не убывают: $\bar{a}_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,m})$, $a_{k,1} \leq a_{k+1,1}$, $k = 1, \dots, n, \dots$. Если $m \geq 2$, то по индуктивному предположению последовательность строк $(a_{k,2}, \dots, a_{k,m})$, $k = 1, \dots, n, \dots$, удовлетворяет условию Хигмана, т. е. существует такая пара индексов $i < j$, что $(a_{i,2}, \dots, a_{i,m}) \leq (a_{j,2}, \dots, a_{j,m})$, но тогда $\bar{a}_i \leq \bar{a}_j$. Это означает, что каждая бесконечная последовательность элементов из P удовлетворяет условию Хигмана.

3. *Упорядоченность типа делимости*. Рассмотрим вполне частично упорядоченное множество P и обозначим через P^* множество слов над алфавитом P . Г. Хигманом в [5] на множестве P^* было определено отношение частичного порядка «типа делимости»: $u \leq v$ тогда и только тогда, когда $u = a_1 \dots a_n$, $v = v_1 b_1 v_2 b_2 \dots v_n b_n v_{n+1}$ и $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$, где $a_i, b_i \in P$, $v_j \in P^*$. При этом некоторые из слов v_j могут быть пустыми.

Доказательство того факта, что $(P^*, \leq)$ — вполне частично упорядоченное множество, не является абсолютно простым и содержится в отмеченной работе Г. Хигмана.

Интересную интерпретацию получает утверждение Г. Хигмана, если в качестве P взять конечное множество, а качестве отношения порядка на P — равенство элементов. Эта интерпретация такова: в любой бесконечной последовательности слов $u_k \in P^*$, $k = 1, \dots, n, \dots$, найдётся такая пара индексов $i < j$, что слово u_i встречается в слове u_j в качестве подпоследовательности, т. е. $u_j = v_1 a_1 v_2 a_2 \dots v_m a_m v_{m+1}$, $u_i = a_1 \dots a_m$, $a_s \in P$, $v_t \in P^*$.

Доказательство конечной порождённости или конечности некоторого алгебраического объекта с помощью указанного утверждение Г. Хигмана называется *методом Хигмана—Коэна* или методом частично упорядоченных множеств.

3. Тожество левой нильпотентности

Тожество левой нильпотентности индекса t имеет вид

$$[x_1, \dots, x_m] = 0.$$

Его левая часть порождает в счётно порождённой свободной ассоциативной алгебре $k\langle X \rangle$ T -идеал, обозначаемый $T^{(m)}$.

Из работы автора [3] и уточнения И. Б. Воличенко [1] вытекают включения

$$[x_2, x_1][x_5, x_3, x_4] \in T^{(4)}, \quad [x_5, x_4, x_3][x_2, x_1] \in T^{(4)}.$$

Они влекут следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Всякий T -идеал в $k\langle X \rangle$, содержащий T -идеал $T^{(4)}$, обладает элементами, старшие мономы которых эквивалентны в смысле отношения накрытия следующим стандартным полилинейным мономам:*

$$x_4 x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}, \quad \sigma \in S_3; \quad (1)$$

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)}, \quad \sigma \in S_5, \quad \sigma(1) > \sigma(2), \sigma(3) > \sigma(4), \sigma(5); \quad (2)$$

$$x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}, \quad \sigma \in S_5, \quad \sigma(1) > \sigma(2), \sigma(3) > \sigma(4), \sigma(5). \quad (3)$$

4. Комбинаторная шпехтовость T -идеала $T^{(4)}$

В [4] T -идеал (или множество полиномов) называется *комбинаторно шпехтовым*, если всякий содержащий его T -идеал обладает конечным стандартным базисом. В этом разделе будет доказан основной результат, состоящий в том, что тождество левой нильпотентности индекса 4 комбинаторно шпехтово.

Рассмотрим некоторые типы полилинейных полиномов и снабдим их *шифрами*, которые представляют собой конечные последовательности различных символов.

1. $u = x_1 \dots x_d$. Любой моном, эквивалентный u , для краткости будем называть (возрастающей) *цепью*. такому моному присваивается шифр, состоящий из одного символа

$$\pi(u) = (d).$$

Моном v , эквивалентный моному $x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_d x_i$, называется (m, n) -*мономом*, где $m = i - 1$, $n = d - i - 1$. Этому моному присваивается шифр

$$\pi(v) = (m, n).$$

В частности, $\pi(x_2 x_1) = (0, 0)$, $\pi(x_2 \dots x_d x_1) = (0, d - 2)$, $\pi(x_1 \dots x_{d-2} x_d x_{d-1}) = (d - 2, 0)$.

2. $u = u_1 \dots u_s u_{s+1}$, где u_i , $1 \leq i \leq s$, — некоторый (m_i, n_i) -моном, а u_{s+1} — цепь длины q , причём любая переменная из u_k , $1 \leq k \leq s$, меньше любой переменной из u_{k+1} . Моном, эквивалентный u , наделяется шифром

$$\pi(u) = \pi(u_1) \dots \pi(u_s) \pi(u_{s+1}) = (m_1, n_1) \dots (m_s, n_s)(q).$$

В конкретных примерах либо (m, n) -мономы u_i , $1 \leq i \leq s$, либо цепь u_{s+1} могут отсутствовать, что находит, конечно, своё отражение в шифрах.

Ниже моном вида $x_j x_i$, $i < j$, называется *инверсией*.

3. $u = x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{l-1} x_{l+1} \dots x_j x_i w x_l z$, $i < l < j$, где $x_j x_i$ — самая левая инверсия монома u , моном wz представляет собой цепь, каждая переменная которой превосходит x_j . Положим $\deg w = p$, $\deg z = q$. Моному, эквивалентному такому моному u , присваивается шифр

$$\pi(u) = (m, n, r).(p, *, q), \quad \text{где } m = i - 1, \quad n = l - i - 1, \quad r = j - l - 1.$$

В конкретных примерах мономы w или z могут отсутствовать, тогда в шифре им приписывается нулевая степень.

4. $u = x_1 \dots x_{l-1} x_{l+1} \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_j x_i w x_l z$, $l < i < j$, где свойства мономов $x_j x_i$, w и z те же, что и в предыдущем случае 3. Моном v , эквивалентный моному u , наделяется шифром

$$\pi(v) = (m, n, r).(p, *, q), \quad \text{где } m = l - 1, \quad n = i - l - 1, \quad r = j - i - 1.$$

Заметим, что введённые шифры однозначно определяют моном с точностью до эквивалентности.

На множестве введённых шифров определим частичный порядок согласно следующему правилу. Фрагменты шифров, являющиеся одинаково обозначенными строками одинаковой длины, сравниваются покомпонентно. При этом числовые компоненты сравниваются как числа, а порядком на символьных компонентах является равенство. Шифры представляют собой строки из этих фрагментов и сравниваются согласно частичному порядку «типа делимости» (см. раздел 2). Согласно результату Г. Хигмана, упомянутому в разделе 2, введённый частичный порядок на шифрах удовлетворяет условию минимальности.

Очень важно, что шифры подобраны таким образом, чтобы выполнялось следующее очевидное условие.

Лемма 2. Для мономов u, v одинакового типа 1–4 отношение между шифрами $\pi(u) \leq \pi(v)$ влечёт отношение накрытия $u \leq_0 v$.

Нашей ближайшей целью является описание строения полилинейных полиномов, не накрывающих мономы (1)–(3).

Лемма 3. Полилинейный моном, не накрывающий мономы

$$x_3x_1x_2 \tag{4}$$

и

$$x_3x_2x_1, \tag{5}$$

представляется в общем случае в виде произведения $u = u_1 \dots u_s u_{s+1}$, где u_i — (m, n) -моном, $1 \leq i \leq s$, а u_{s+1} — цепь, причём любая переменная из монома u_k меньше любой переменной из монома u_{k+1} , $1 \leq k \leq s$. В конкретных примерах либо (m_i, n_i) -мономы u_i , либо цепь u_{s+1} могут отсутствовать.

Доказательство. Пусть u — полилинейный моном, не накрывающий мономы (4) и (5). Конечно, u может быть цепью. Предположим, что u не цепь. Далее воспользуемся рассуждениями из [4]. Так как u не является цепью, то u содержит инверсии. Пусть x_jx_i , $i < j$, — самая левая инверсия в мономе u . Переменная x_k при $k > j$ не может быть расположена в мономе u левее переменной x_j по определению левой инверсии. По той же причине переменные, расположенные в u левее переменной x_j , образуют цепь. Все переменные x_k , $k \neq i$, $k < j$, расположены в u левее переменной x_j , иначе моном u накрывал бы один из мономов (4) или (5). Таким образом, $u = x_1 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_jx_ix_w$, где моном w не накрывает мономы (4) и (5). По умолчанию считаем, что u — стандартный моном. Ведя рассуждение индукцией по степени монома u , можно заключить, что w удовлетворяет условиям леммы, следовательно, и для монома u лемма верна. $\square$

Следующая лемма даёт полное описание полилинейных мономов, не накрывающих мономы (1)–(3). Ими окажутся введённые нами мономы типов 1–4.

Лемма 4. Полилинейный моном, не накрывающий мономы (1)–(3), принадлежит одному из типов мономов 1–4.

Доказательство. Пусть полилинейный моном u не накрывает мономы (1)–(3). Он, конечно, может быть цепью, т. е. принадлежать типу 1. Пусть u не цепь, тогда он должен содержать инверсии. Пусть x_jx_i , $i < j$, — самая первая среди них. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 3, мы получаем, что все переменные x_k при $k > j$ расположены в u правее инверсии x_jx_i , а переменные, расположенные левее переменной x_j , образуют цепь. Особо отметим, что правее инверсии x_jx_i может находиться не более одной переменной x_k при $k < j$, так как в противном случае моном u накрывал бы один из мономов (1). Именно это обстоятельство разбивает дальнейшие рассуждения на три принципиально различных случая. По умолчанию, как и ранее, предполагаем, что u — стандартный моном.

а) В мономе u правее инверсии $x_j x_i$ нет ни одной переменной x_k при $k < j$. Тогда имеет место представление вида $u = u_1 w$, где $u_1 = x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{j-1} x_j x_i - (m_1, n_1)$ -моном при $m_1 = i - 1$, $n_1 = j - i - 1$, а моном w не покрывает ни одного из мономов (4), (5), так как в противном случае моном u покрывал бы один из мономов (2). По лемме 3 имеем, что $w = u_2 \dots u_s u_{s+1}$, где u_k , $2 \leq k \leq s$, $-(m_k, n_k)$ -моном, а u_{s+1} — цепь, причём каждая переменная из u_k меньше любой переменной из u_{k+1} , $2 \leq k \leq s$. Следовательно, $u = u_1 u_2 \dots u_s u_{s+1}$ — моном типа 2.

б) Переменная x_l , $i < l < j$, расположена в u правее левой инверсии $x_j x_i$. В этом случае $u = x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{l-1} x_{l+1} \dots x_j x_i w x_l z$. Здесь важно, что моном wz представляет собой цепь. Действительно, если моном w содержит инверсию или некоторая переменная монома w превосходит переменную монома z , то моном u покрывает один из мономов (2). Если же моном z содержит инверсию, то моном u покрывает один из мономов (3). Но это противоречит предположению. Значит, моном u является мономом типа 3.

в) Переменная x_l , $l < i < j$, расположена в u правее левой инверсии. Тогда $u = x_1 \dots x_{l-1} x_{l+1} \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_j x_i w x_l z$. Рассуждения пункта б) показывают, что, как и прежде, моном wz представляет собой цепь. А это означает, что u принадлежит мономам типа 4. $\square$

Теорема. Тожество лиевой нильпотентности индекса 4 комбинаторно шпехтово.

Доказательство. Требуется доказать, что T -идеал $T \triangleleft k\langle X \rangle$, содержащий полином $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, обладает конечным стандартным базисом. Для этого достаточно доказать, что редуцированный стандартный базис T -идеала T конечен.

Предположим противное: пусть редуцированный стандартный базис $F = \{f_1, \dots, f_m, \dots\}$ T -идеала T бесконечен. Старшие мономы $f_i = u_i$ его элементов являются T -обструкциями. Так как T содержит полином $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, то мономы (1)–(3) редуцируемые. Следовательно, среди T -обструкций существует бесконечно много мономов, не покрывающих мономы (1)–(3) и по лемме 4 принадлежащих мономам типа 1–4. Из условия Хигмана (см. раздел 2) вытекает, что существуют такие индексы $i < j$, что шифры T -обструкций u_i и u_j находятся в отношении $\pi(u_i) < \pi(u_j)$. По лемме 2 сами T -обструкции находятся в отношении накрытия $u_i \leq_0 u_j$, что противоречит определению T -обструкции. Таким образом, стандартный базис T -идеала T конечен. $\square$

Литература

- [1] Воличенко И. Б. T -идеал, порождённый элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$: Препринт. — Минск: Ин-т мат. АН БССР, 1978.
- [2] Кемер А. Р. Конечные базисы тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26. — С. 597–641.
- [3] Латышев В. Н. О конечной порождённости T -идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сиб. мат. журн. — 1965. — Т. 6, № 6. — С. 1432–1434.

- [4] Латышев В. Н. Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 101—110.
- [5] Higman G. Ordering by divisibility in abstract algebras // *Proc. Lond. Math. Soc.* — 1952. — Vol. 2. — P. 326—336.
- [6] Specht W. Gesetze in Ringen // *Math. Z.* — 1950. — В. 52. — S. 557—589.