Теория определителей решёточных матриц

Е. Е. МАРЕНИЧ
Мурманский государственный
педагогический университет
e-mail: marenich1@yandex.ru

УДК 512.64

Ключевые слова: решётка с псевдодополнениями, определители решёточных матриц, детерминантный ранг решёточной матрицы.

Аннотация

Построена теория определителей матриц над решётками с псевдодополнениями. Предыдущие результаты об определителях булевых матриц — частный случай построенной теории.

Abstract

E. E. Marenich, Determinant theory for lattice matrices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 87—101.

The determinant theory for matrices over a pseudo-complemented distributive lattice is presented. Previous results on this topic are special cases of the theorems proved in this paper.

1. Введение

Теория определителей булевых матриц, по-видимому, впервые рассмотрена О. Б. Соколовым [7]. Дальнейшее развитие теории определителей булевых матриц можно проследить по работам [2—6, 10, 14—16].

Мы рассматриваем теорию определителей матриц над более общими решётками, а именно над решётками с псевдодополнениями. Предыдущие результаты об определителях булевых матриц — частные случаи теорем, доказанных в данной работе.

2. Обозначения

Для частично упорядоченных множеств, полурешёток и решёток в работе используется терминология из [11].

Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество. Обозначим через $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ наименьший и наибольший элементы в $(P, \leqslant)$ соответственно, если они существует.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 87—101.

Обозначим через $\mathrm{atom}(P)$ множество всех атомов решётки P.

Для решёточных матриц в работе используется терминология из [13].

Обозначим через $P^{m\times n}$ множество всех $(m\times n)$-матриц над решёткой P. Матрицы с элементами из P обозначаются большими латинскими буквами:

$$A=(a_{ij})_{m\times n},\ B=(b_{ij})_{m\times n},\ C=(c_{ij})_{m\times n},\ldots$$

Для матрицы $A\in P^{n\times n}$ обозначим через $A_{(r)}$ и $A^{(r)}$ соответственно r-ю строку и r-й столбец матрицы A, $r=1,2,\ldots,n$.

Для векторов $v_1,v_2,\ldots,v_k\in P^{m\times 1}$ определим $[v_1,v_2,\ldots,v_k]$ как матрицу $B\in P^{m\times k}$, для которой $B^{(j)}=v_j$, $j=1,2,\ldots,k$.

Единичная матрица $E_{n\times n}\in P^{n\times n}$ определяется равенствами

$$e_{ij}=\begin{cases}\tilde{1}, & \text{если } i=j,\\ \tilde{0}, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Матрица $A\in P^{n\times n}$ называется *обратимой*, если существует матрица $B\in P^{n\times n}$, такая что $A\cdot B=B\cdot A=E_{n\times n}$.

Пусть S_n — множество всех подстановок множества $\{1,2,\ldots,n\}$. Для каждой подстановки $\pi\in\mathrm{S}_n$ определена подстановочная матрица $M(\pi)=(m_{ij})_{n\times n}$, такая что

$$m_{ij}=\begin{cases}\tilde{1}, & \text{если } j=\pi(i),\\ \tilde{0}, & \text{если } j\neq\pi(i).\end{cases}$$

Обозначим через $\mathrm{Per}_n(P)$ множество всех подстановочных $(n\times n)$-матриц над P.

Матрица $J_{n\times n}$ размера $n\times n$ называется *универсальной*, если все её элементы равны единице $\tilde{1}$.

Столбцовым (*строчечным*) *пространством* матрицы A называется множество всех линейных комбинаций столбцов (строк) матрицы A. Обозначим через $\mathrm{Column}(A)$ ($\mathrm{Row}(A)$) столбцовое (строчечное) пространство матрицы A.

Базисом пространства $\mathrm{Column}(A)$ ($\mathrm{Row}(A)$) называется минимальное порождающее множество пространства.

Пусть $A\in P^{m\times n}$ — ненулевая матрица. Наименьшее число векторов в базисах пространства $\mathrm{Column}(A)$ ($\mathrm{Row}(A)$) называется *столбцовым* (*строчечным*) *рангом пространства* и обозначается $\mathrm{rank_c}(A)$ ($\mathrm{rank_r}(A)$). Столбцовый и строчечный ранг нулевой матрицы равен нулю.

Мультипликативный ранг матрицы A равен наименьшему числу $r=\mathrm{rank_m}(A)$, такому что $A=BC$, где $B\in P^{n\times r}$ и $C\in P^{r\times n}$. Мультипликативный ранг нулевой матрицы равен нулю.

3. Решётки с псевдодополнениями

Пусть $(P,\wedge,\leqslant)$ — полурешётка с нулём $\tilde{0}$, $a\in P$.

Наибольшее решение $x\in P$ уравнения $a\wedge x=\tilde{0}$ называется *псевдодополнением* элемента a и обозначается a^*. Если a^* существует, то $a\wedge x=\tilde{0}$ равносильно тому, что $x \leqslant a^*$ для всех $x \in P$. Если для всех $a \in P$ существует a^*, то говорят, что P — полурешётка с псевдодополнениями.

Рассмотрим основные свойства псевдодополнений.

Лемма 3.1. *Пусть $(P, \vee, \wedge, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с псевдодополнениями, $a, b \in P$. Тогда*

$$(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*, \quad (a \vee a^*)^* = \tilde{0}, \quad a^* \vee b^* \leqslant (a \wedge b)^*.$$

Доказательство. Следующие утверждения равносильны:

$$x \leqslant (a \vee b)^*; \quad (a \vee b) \wedge x = \tilde{0}; \quad a \wedge x = \tilde{0}, \quad b \wedge x = \tilde{0}; \quad x \leqslant a^* \wedge b^*.$$

Имеем $(a \vee a^*)^* = a^* \wedge a^{**} = \tilde{0}$.

Так как $(a \wedge b) \wedge (a^* \vee b^*) = \tilde{0}$, то $(a^* \vee b^*) \leqslant (a \wedge b)^*$. □

Лемма 3.2. *Пусть $(P, \wedge, \leqslant)$ — полурешётка с псевдодополнениями, $a, b, c \in \in P$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *$a \wedge b^* = \tilde{0}$ равносильно тому, что $a \leqslant b^{**}$ или $b^* \leqslant a^*$.*
2. *$a \wedge b^* = b \wedge a^* = \tilde{0}$ равносильно тому, что $a^* = b^*$.* □

Если P — решётка с псевдодополнениями и $(a \wedge b)^* = a^* \vee b^*$ для всех $a, b \in P$, то P назовём d-решёткой. Примерами d-решёток являются булевы решётки, цепи с нулём и единицей, прямое произведение d-решёток. Пентагон — пример недистрибутивной d-решётки.

4. Сечение $\mathrm{cut}_z(A)$ матрицы $A \in P^{m \times n}$

Пусть $(P, \wedge, \vee, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с нулём $\tilde{0}$ и единицей $\tilde{1}$. Обозначим через $\mathrm{join}(P)$ множество всех $\vee$-неразложимых элементов решётки P.

Определим функцию $\varphi_z \colon P \to \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ равенствами

$$\varphi_z(a) = \begin{cases} \tilde{1}, & \text{если } z \leqslant a, \\ \tilde{0}, & \text{если } z \nleqslant a, \end{cases}$$

для всех $a \in P$, $z \in \mathrm{join}(P)$.

Лемма 4.1. *Пусть $z \in \mathrm{join}(P) - \{\tilde{0}\}$. Справедливы утверждения*

$$\varphi_z(a \vee b) = \varphi_z(a) \vee \varphi_z(b), \quad \varphi_z(a \wedge b) = \varphi_z(a) \wedge \varphi_z(b)$$

для всех $a, b \in P$.

Доказательство. Пусть $\varphi_z(a \vee b) = \tilde{1}$. Имеем $a \vee b \geqslant z$, $(a \wedge z) \vee (b \wedge z) = z$, $a \wedge z = z$ или $b \wedge z = z$. Поэтому $a \geqslant z$ или $b \geqslant z$, $\varphi_z(a) \vee \varphi_z(b) = \tilde{1}$.

Пусть $\varphi_z(a \vee b) = \tilde{0}$. Имеем $a \vee b \ngeqslant z$, $a \ngeqslant z$ и $b \ngeqslant z$. Поэтому $\varphi_z(a) = \tilde{0}$ или $\varphi_z(b) = \tilde{0}$, $\varphi_z(a) \vee \varphi_z(b) = \tilde{0}$.

Значит, $\varphi_z(a \vee b) = \varphi_z(a) \vee \varphi_z(b)$.

Аналогично $\varphi_z(a \wedge b) = \varphi_z(a) \wedge \varphi_z(b)$. □

Лемма 4.2. *Пусть P — дистрибутивная решётка с псевдодополнениями, $z \in$ $\in \operatorname{join}(P) - \{\tilde{0}\}$. Тогда $\varphi_z(a^*) \leqslant \varphi_z(a)^*$ для всех $a \in P$.*

Доказательство. Если $a \wedge x = \tilde{0}$, то $\varphi_z(a) \wedge \varphi_z(x) = \tilde{0}$, $\varphi_z(x) \leqslant \varphi_z(a)^*$. Для $x = a^*$ получаем, что $\varphi_z(a^*) \leqslant \varphi_z(a)^*$. □

Лемма 4.3. *Пусть P — булева решётка, $z \in \operatorname{join}(P) - \{\tilde{0}\} = \operatorname{atom}(P)$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *$\varphi_z(\bar{a}\,\overline{\varphi_z(a)}$ для всех $a \in P$.*
2. *$\varphi_z(a \wedge \bar{b}) = \varphi_z(a) \wedge \overline{\varphi_z(b)}$ для всех $a, b \in P$.*

Доказательство. Равносильны неравенства $z \leqslant a$ и $z \nleqslant \bar{a}$. Если $\varphi_z(a) = \tilde{1}$, то $z \leqslant a$, $z \nleqslant \bar{a}$; $\varphi_z(a) = \tilde{1}$, $\varphi_z(\bar{a}) = \tilde{0}$; $\varphi_z(\bar{a}) = \overline{\varphi_z(a)}$.

Если $\varphi_z(a) = \tilde{0}$, то $z \nleqslant a$, $z \leqslant \bar{a}$, $\varphi_z(a) = \tilde{0}$, $\varphi_z(\bar{a}) = \tilde{1}$, $\varphi_z(\bar{a}) = \overline{\varphi_z(a)}$. □

Сечением $\operatorname{cut}_z(A)$ матрицы $A \in P^{m \times n}$, где $z \in \operatorname{join}(P) - \{\tilde{0}\}$, назовём матрицу

$$\operatorname{cut}_z(A) = \big(\varphi_z(a_{ij})\big)_{m \times n}.$$

Если $z, u \in \operatorname{join}(P)$, $z \leqslant u$, то $\operatorname{cut}_z(A) \geqslant \operatorname{cut}_u(A)$.

Лемма 4.4 [9]. *Пусть $z \in \operatorname{join}(P) - \{\tilde{0}\}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для всех $A \in P^{m \times n}$, $\lambda \in P$*

$$\operatorname{cut}_z(\lambda A) = \varphi_z(\lambda)\operatorname{cut}_z(A).$$

2. *Для всех $A, B \in P^{m \times n}$*

$$\operatorname{cut}_z(A + B) = \operatorname{cut}_z(A) + \operatorname{cut}_z(B).$$

3. *Для всех $A \in P^{m \times n}$, $B \in P^{n \times k}$*

$$\operatorname{cut}_z(AB) = \operatorname{cut}_z(A)\operatorname{cut}_z(B).$$ □

Пусть $L(S)$ — подрешётка решётки P, порождённая конечным множеством S, таким что $S \subseteq P$. Тогда $L(S)$ — конечная дистрибутивная решётка.

Пусть $\operatorname{Set}(A)$ — множество всех элементов матрицы A, $\operatorname{Lattice}(A)$ — решётка, порождённая множеством $\operatorname{Set}(A)$. $\operatorname{Lattice}(A)$ — конечная дистрибутивная решётка с единицей $\|A\| = \bigvee\limits_{i=1}^{m} \bigvee\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ и нулём $\bigwedge\limits_{i=1}^{m} \bigwedge\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Теорема 4.1 [9]. *Пусть $A \in P^{m \times n}$, S — конечное множество, $\operatorname{Set}(A) \subseteq S \subseteq P$, $L = L(S)$. Тогда*

$$A = \sum_{z \in \operatorname{join}(L) - \{\tilde{0}\}} z \operatorname{cut}_z(A).$$

Доказательство. Из условия теоремы имеем, что

$$a_{ij} = \bigvee_{\substack{z \in \operatorname{join}(L) - \{\tilde{0}\},\\ z \leqslant a_{ij}}} z, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда получаем нужное утверждение. □

5. Полуперманенты решёточных матриц

Пусть $(P, \wedge, \vee, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка, $A \in P^{n\times n}$.

Определим *перманент* $\mathrm{per}(A)$ и *полуперманенты* $\mathrm{per}_{\pm 1}(A)$ матрицы $A \in P^{n\times n}$ равенствами

$$\mathrm{per}(A) = \bigvee_{\pi \in \mathrm{S}_n} a_{1\pi(1)} \wedge a_{2\pi(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)},$$

$$\mathrm{per}_+(A) = \mathrm{per}_1(A) = \bigvee_{\pi \in \mathrm{S}_n^+} a_{1\pi(1)} \wedge a_{2\pi(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)},$$

$$\mathrm{per}_-(A) = \mathrm{per}_{-1}(A) = \bigvee_{\pi \in \mathrm{S}_n^-} a_{1\pi(1)} \wedge a_{2\pi(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)},$$

где S_n^+ — множество всех чётных подстановок и S_n^- — множество всех нечётных подстановок множества $\{1, \ldots, n\}$.

Лемма 5.1. *Пусть $A \in P^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. $\mathrm{per}_+({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{per}_+(A)$, $\mathrm{per}_-({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{per}_-(A)$.
2. *Пусть матрица B получена перестановкой двух столбцов (строк) матрицы A. Тогда*

$$\mathrm{per}_+(B) = \mathrm{per}_-(A), \quad \mathrm{per}_-(B) = \mathrm{per}_+(A).$$

3. *Пусть $A^{(k)} = b + c$, $b, c \in P^{n\times 1}$. Пусть матрица B получена из матрицы A заменой столбца $A^{(k)}$ на столбец b. Пусть матрица C получена из матрицы A заменой столбца $A^{(k)}$ на столбец c. Тогда*

$$\mathrm{per}_+(A) = \mathrm{per}_+(B) \vee \mathrm{per}_+(C), \quad \mathrm{per}_-(A) = \mathrm{per}_-(B) \vee \mathrm{per}_-(C).$$

4. *Пусть матрица B получена из матрицы A умножением некоторого столбца (строки) на элемент λ. Тогда*

$$\mathrm{per}_+(B) = \lambda \wedge \mathrm{per}_+(A), \quad \mathrm{per}_-(B) = \lambda \wedge \mathrm{per}_-(A).$$

5. *Для всех $\lambda \in P$ имеем*

$$\mathrm{per}_+(\lambda A) = \lambda \wedge \mathrm{per}_+(A), \quad \mathrm{per}_-(\lambda A) = \lambda \wedge \mathrm{per}_-(A).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{per}_+({}^{\mathrm{t}}A) = \bigvee_{\pi \in \mathrm{S}_n^+} \big(a_{\pi(1)1} \wedge a_{\pi(2)2} \wedge \ldots \wedge a_{\pi(n)n}\big) =$$

$$= \bigvee_{\pi^{-1} \in \mathrm{S}_n^+} \big(a_{1\pi^{-1}(1)} \wedge a_{2\pi^{-1}(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi^{-1}(n)}\big) = \mathrm{per}_+(A).$$

Существует транспозиция τ, такая что $B^{(j)} = A^{(\tau(j))}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому

$$\operatorname{per}_+(B) = \bigvee_{\pi \in \mathrm{S}_n^+} \bigl(a_{1\pi(\tau(1))} \wedge a_{2\pi(\tau(2))} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(\tau(n))}\bigr) =$$

$$= \bigvee_{\sigma \in \mathrm{S}_n^-} \bigl(a_{1\sigma(1)} \wedge a_{2\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\sigma(n)}\bigr) = \operatorname{per}_-(A). \quad \square$$

Пусть $A(i \mid j)$ получена из матрицы A удалением строки $A_{(i)}$ и столбца $A^{(j)}$.

Следствие 5.1. *Для всех $A \in P^{n\times n}$ имеем*

$$\operatorname{per}_+(A) = \bigvee_{r=1}^{n} a_{ir} \wedge \operatorname{per}_{(-1)^{i+r}}\bigl(A(i \mid r)\bigr), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\operatorname{per}_-(A) = \bigvee_{r=1}^{n} a_{ir} \wedge \operatorname{per}_{(-1)^{i+r+1}}\bigl(A(i \mid r)\bigr), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 5.1. *Пусть $A \in P^{n\times n}$, $L = \mathrm{Lattice}(A)$. Тогда*

$$\operatorname{per}_\pm(A) = \bigvee_{z \in \mathrm{join}(L) - \{\tilde{0}\}} z \wedge \operatorname{per}_\pm\bigl(\mathrm{cut}_z(A)\bigr).$$

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{per}_\pm(A) = \bigvee_{z \in \mathrm{join}(L) - \{\tilde{0}\}} z \wedge \varphi_z\bigl(\operatorname{per}_\pm(A)\bigr) = \bigvee_{z \in \mathrm{join}(L) - \{\tilde{0}\}} z \wedge \operatorname{per}_\pm\bigl(\mathrm{cut}_z(A)\bigr). \quad \square$$

6. Определители решёточных матриц

Пусть $(P, \vee, \wedge, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с псевдодополнениями. Определим определитель (детерминант) $\det(A)$ решёточной матрицы $A \in P^{n\times n}$ формулой

$$\det(A) = \operatorname{per}_+(A) \wedge \operatorname{per}_-(A)^* \vee \operatorname{per}_-(A) \wedge \operatorname{per}_+(A)^*.$$

Имеем

$$\det(A) = \operatorname{per}(A) \wedge$$
$$\wedge \left(\operatorname{per}_+(A) \vee \operatorname{per}_+(A)^*\right) \wedge \left(\operatorname{per}_-(A) \vee \operatorname{per}_-(A)^*\right) \wedge \left(\operatorname{per}_+(A)^* \vee \operatorname{per}_-(A)^*\right).$$

В частности,

$$\det(A) \leqslant \operatorname{per}(A).$$

Если P — булева решётка, то

$$\det(A) = \Bigl(\operatorname{per}_+(A) \wedge \overline{\operatorname{per}_-(A)}\Bigr) \vee \Bigl(\operatorname{per}_-(A) \wedge \overline{\operatorname{per}_+(A)}\Bigr).$$

Рассмотрим свойства определителей.

Теорема 6.1. *Пусть* $A \in P^{n\times n}$. *Тогда*

1) $\det(A) = \tilde{0}$ *равносильно тому, что* $\mathrm{per}_+(A)^* = \mathrm{per}_-(A)^*$;
2) $\det(A) = \tilde{1}$ *равносильно тому, что* $\mathrm{per}(A) = \tilde{1}$, $\mathrm{per}_+(A)^* \vee \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{1}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Следующие равенства равносильны: $\det(A) = \tilde{0}$; $\mathrm{per}_+(A) \wedge \mathrm{per}_-(A)^* = \mathrm{per}_-(A) \wedge \mathrm{per}_+(A)^* = \tilde{0}$; $\mathrm{per}_+(A)^* = \mathrm{per}_-(A)^*$.

Докажем второе утверждение. Достаточно доказать, что следующие системы равносильны:

$$\begin{cases} \mathrm{per}_+(A) \vee \mathrm{per}_-(A) = \tilde{1}, \\ \mathrm{per}_+(A) \vee \mathrm{per}_+(A)^* = \tilde{1}, \\ \mathrm{per}_-(A) \vee \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{1}, \\ \mathrm{per}_+(A)^* \vee \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{per}_+(A) \vee \mathrm{per}_-(A) = \tilde{1}, \\ \mathrm{per}_+(A)^* \vee \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{1}. \end{cases}$$

Предположим, что

$$\begin{cases} \mathrm{per}_+(A) \vee \mathrm{per}_-(A) = \tilde{1}, \\ \mathrm{per}_+(A)^* \vee \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{1}. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\mathrm{per}_+(A)^* \vee \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{1}, \\ &\mathrm{per}_-(A) = \mathrm{per}_-(A) \wedge (\mathrm{per}_+(A)^* \vee \mathrm{per}_-(A)^*) = \mathrm{per}_-(A) \wedge \mathrm{per}_+(A)^*, \\ &\mathrm{per}_-(A) \leqslant \mathrm{per}_+(A)^*, \\ \tilde{1} = {} &\mathrm{per}_+(A) \vee \mathrm{per}_-(A) \leqslant \mathrm{per}_+(A)^* \vee \mathrm{per}_+(A). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathrm{per}_-(A) \vee \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{1}. \qquad \square$$

Если два столбца матрицы A равны, то $\det(A) = \tilde{0}$.

Следствие 6.1. *Пусть* P *— булева решётка,* $A \in P^{n\times n}$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\det(A) = \tilde{0}$ *равносильно тому, что* $\mathrm{per}_+(A) = \mathrm{per}_-(A)$.
2. $\det(A) = \tilde{1}$ *равносильно тому, что* $\mathrm{per}_+(A) = \overline{\mathrm{per}_-(A)}$. $\square$

Теорема 6.2. *Пусть* $A \in P^{n\times n}$, $\lambda \in P$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\det(A) = \det({}^{\mathrm{t}}A)$.
2. *Пусть матрица* B *получена перестановкой двух столбцов матрицы* A. *Тогда* $\det(B) = \det(A)$.
3. *Пусть матрица* B *получена умножение некоторого столбца (строки) матрицы* A *на элемент* λ. *Тогда* $\det(B) \leqslant \lambda \wedge \det(A)$.
4. $\det(\lambda A) \leqslant \lambda \wedge \det(A)$.
5. *Если* A *имеет два одинаковых столбца (строки), то* $\det(A) = \tilde{0}$.

Доказательство. Докажем утверждение 3. Имеем
$$\det(B) = \lambda \wedge \mathrm{per}_+(A) \wedge \big(\lambda \wedge \mathrm{per}_-(A)\big)^* \vee \lambda \wedge \mathrm{per}_-(A) \wedge \big(\lambda \wedge \mathrm{per}_+(A)\big)^*.$$
Обозначим $a = \mathrm{per}_+(A)$, $b = \mathrm{per}_-(A)$. Перепишем предыдущее равенство в виде
$$\det(A) = \lambda \wedge a \wedge (\lambda \wedge b)^* \vee \lambda \wedge b \wedge (\lambda \wedge a)^*.$$
Докажем сначала, что
$$\lambda \wedge a \wedge (\lambda \wedge b)^* \leqslant \lambda \wedge a \wedge b^*.$$
Обозначим $c = \lambda \wedge a \wedge (\lambda \wedge b)^*$. Имеем $c \wedge b = (\lambda \wedge b) \wedge a \wedge (\lambda \wedge b)^* = \tilde{0}$, $c \leqslant b^*$, $c = c \wedge \lambda \wedge a \leqslant \lambda \wedge a \wedge b^*$. Поэтому
$$\lambda \wedge \mathrm{per}_+(A) \wedge \big(\lambda \wedge \mathrm{per}_-(A)\big)^* \leqslant \lambda \wedge \mathrm{per}_+(A) \wedge \mathrm{per}_-(A)^*.$$
Аналогично
$$\lambda \wedge \mathrm{per}_-(A) \wedge \big(\lambda \wedge \mathrm{per}_+(A)\big)^* \leqslant \lambda \wedge \mathrm{per}_-(A) \wedge \mathrm{per}_+(A)^*.$$
Следовательно,
$$\det(B) \leqslant \lambda \wedge \det(A).$$

Докажем утверждение 5. Имеем
$$\mathrm{per}_+(A) \wedge \mathrm{per}_-(A)^* = \bigvee_{\pi \in \mathrm{S}_n^+} \big(a_{1\pi(1)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)}\big) \wedge \bigwedge_{\sigma \in \mathrm{S}_n^-} \big(a_{1\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge a_{n\sigma(n)}\big)^*.$$
Предположим, что $A^{(i)} = A^{(j)}$. Пусть τ — такая транспозиция, что $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$. Если $\pi \in \mathrm{S}_n^+$, то $\sigma = \tau\pi \in \mathrm{S}_n^-$. Имеем
$$\begin{aligned} &a_{1\pi(1)} \wedge a_{2\pi(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)} \wedge \big(a_{1\sigma(1)} \wedge a_{2\sigma(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\sigma(n)}\big)^* = \\ &\qquad = a_{1\pi(1)} \wedge a_{2\pi(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)} \wedge \big(a_{1\pi(1)} \wedge a_{2\pi(2)} \wedge \ldots \wedge a_{n\pi(n)}\big)^* = \tilde{0}. \end{aligned}$$
Поэтому $\mathrm{per}_+(A) \wedge \mathrm{per}_-(A)^* = \tilde{0}$.

Аналогично $\mathrm{per}_-(A) \wedge \mathrm{per}_+(A)^* = \tilde{0}$. □

Теорема 6.3. *Пусть P — дистрибутивная d-решётка, $A \in P^{n\times n}$, $\lambda \in P$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть матрица B получена умножение некоторого столбца (строки) матрицы A на элемент λ. Тогда $\det(B) = \lambda \wedge \det(A)$.*
2. $\det(\lambda A) = \lambda \wedge \det(A)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Имеем
$$\begin{aligned} \det(B) &= \lambda \wedge \mathrm{per}_+(A) \wedge \big(\lambda \wedge \mathrm{per}_-(A)\big)^* \vee \lambda \wedge \mathrm{per}_-(A) \wedge \big(\lambda \wedge \mathrm{per}_+(A)\big)^* = \\ &= \lambda \wedge \mathrm{per}_+(A) \wedge (\lambda^* \vee \mathrm{per}_-(A)^*) \vee \lambda \wedge \mathrm{per}_-(A) \wedge (\lambda^* \vee \mathrm{per}_+(A)^*) = \\ &= \lambda \wedge \mathrm{per}_+(A) \wedge \mathrm{per}_-(A)^* \vee \lambda \wedge \mathrm{per}_-(A) \wedge \mathrm{per}_+(A)^* = \lambda \wedge \det(A). \end{aligned}$$

Утверждение 2 доказывается аналогично. □

Теорема 6.4. *Пусть P — дистрибутивная d-решётка, столбцы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ принадлежат $P^{n\times 1}$. Если*

$$A^{(j)} = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{rj} v_r, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\lambda_{rj} \in P$, то

$$\det(A) \leqslant \bigvee_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I} (\lambda_{i_1 1} \wedge \lambda_{i_2 2} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_n n}) \wedge \det[v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}],$$

где $I = \{1, 2, \ldots, k\}^n$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{per}_+(A) \wedge \mathrm{per}_-(A)^* = \\
&= \Bigg(\bigvee_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I} (\lambda_{i_1 1} \wedge \lambda_{i_2 2} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_n n}) \wedge \mathrm{per}_+[v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}] \Bigg) \wedge \\
&\wedge \big((\lambda_{i_1 1} \wedge \lambda_{i_2 2} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_n n})^* \vee \mathrm{per}_-[v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}]^* \big) \wedge \\
&\wedge \bigwedge_{(j_1, j_2, \ldots, j_n) \neq (i_1, i_2, \ldots, i_n)} \big((\lambda_{j_1 1} \wedge \lambda_{j_2 2} \wedge \ldots \wedge \lambda_{j_n n})^* \vee \mathrm{per}_-[v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_n}]^* \big) \leqslant \\
&\leqslant \bigvee_{(i_1, \ldots, i_n) \in I} (\lambda_{i_1 1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_n n}) \wedge \mathrm{per}_+[v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}] \wedge \mathrm{per}_-[v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}]^* = \\
&= \bigvee_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in I} (\lambda_{i_1 1} \wedge \lambda_{i_2 2} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_n n}) \wedge \det[v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}].
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\mathrm{per}_-(A) \wedge \mathrm{per}_+(A)^* \leqslant \bigvee_{(i_1, \ldots, i_n) \in I} (\lambda_{i_1 1} \wedge \ldots \wedge \lambda_{i_n n}) \wedge \det[v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}]. \qquad \square$$

Следствие 6.2. *Пусть P — дистрибутивная d-решётка, $A \in P^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $\mathrm{rank_m}(A) < n$, *то* $\det(A) = \tilde{0}$.
2. *Если* $\det(A) \neq \tilde{0}$, *то* $\mathrm{rank_m}(A) = n$.

Доказательство. Обозначим $k = \mathrm{rank_m}(A)$.

Существуют столбцы $v_1, v_2, \ldots, v_k \in P^{m\times 1}$, линейная оболочка которых содержит все столбцы матрицы A. Имеем, что

$$A^{(j)} = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{rj} v_r, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для любых индексов $(i_1, \ldots, i_n)$ два столбца матрицы $[v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}]$ равны. Поэтому $\det[v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}] = \tilde{0}$. По теореме 6.4 получаем, что $\det(A) = \tilde{0}$. $\square$

Из следствия 6.2, теоремы 6.1 и следствия 6.1 получаем следствие 6.3.

Следствие 6.3. *Пусть* $A \in P^{n\times n}$, $\operatorname{rank_m}(A) < n$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\operatorname{per}_+(A)^* = \operatorname{per}_-(A)^*$.
2. *Если* P — *булева решётка, то* $\operatorname{per}_+(A) = \operatorname{per}_-(A)$. □

Следствие 6.4. *Пусть* $A \in P^{n\times n}$. *Если* $\det(A) > \tilde{0}$, *то*

$$\operatorname{rank_m}(A) = \operatorname{rank_c}(A) = \operatorname{rank_r}(A) = n. \qquad \square$$

Если $\det(A) > \tilde{0}$, то множество столбцов (строк) матрицы A образует базис пространства $\operatorname{Column}(A)$ ($\operatorname{Row}(A)$).

Теорема 6.5. *Пусть* $A \in P^{n\times n}$, S — *конечное множество, такое что* $\operatorname{Set}(A) \subseteq$ $\subseteq S \subseteq P$, $L = L(S)$. *Тогда*

$$\det(A) \leqslant \bigvee_{z\in \operatorname{join}(L)-\{\tilde{0}\}} z \wedge \det\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr).$$

Доказательство. Из леммы 4.2 следует, что

$$\begin{aligned}
&\varphi_z\bigl(\det(A)\bigr) \leqslant \\
&\quad \leqslant \operatorname{per}_+\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr) \wedge \operatorname{per}_-\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr)^* \vee \operatorname{per}_-\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr) \wedge \operatorname{per}_+\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr)^* = \\
&\quad = \det\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\det(A) = \bigvee_{z\in \operatorname{join}(L)-\{\tilde{0}\}} z \wedge \varphi_z\bigl(\det(A)\bigr) \leqslant \bigvee_{z\in \operatorname{join}(L)-\{\tilde{0}\}} z \wedge \det\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr). \qquad \square$$

7. Определители булевых матриц

Пусть $(P, \wedge, \vee, \leqslant)$ — булева решётка.

Лемма 7.1. *Пусть* $A \in P^{n\times n}$, S — *конечное множество, такое что* $\operatorname{Set}(A) \subseteq S \subseteq P$, $L = L(S)$. *Тогда*

$$\det(A) = \bigvee_{z\in \operatorname{atom}(L)} z \wedge \det\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr).$$

Доказательство. Докажем, что $\varphi_z\bigl(\det(A)\bigr) = \det\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr)$. Из леммы 4.3 получаем, что

$$\begin{aligned}
&\varphi_z\bigl(\det(A)\bigr) = \varphi_z\Bigl(\operatorname{per}_+(A) \wedge \overline{\operatorname{per}_-(A)} \vee \operatorname{per}_-(A) \wedge \overline{\operatorname{per}_+(A)}\Bigr) = \\
&\quad = \operatorname{per}_+\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr) \wedge \overline{\operatorname{per}_-\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr)} \vee \operatorname{per}_-\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr) \wedge \overline{\operatorname{per}_+\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr)} = \\
&\quad = \det\bigl(\operatorname{cut}_z(A)\bigr). \qquad \square
\end{aligned}$$

Пусть $A \in P^{n\times n}$, $M(\pi) \in \mathrm{Per}_n(P)$. Подстановочная матрица $M(\pi)$ называется *изолированной в матрице* A, если $M(\pi) \leqslant A$ и никакая подматрица $J_{2\times 2}$ матрицы A не содержит двух единиц $\tilde{1}$ матрицы $M(\pi)$.

Лемма 7.2 [8]. *Пусть $A, B, C \in P^{n\times n}$, $A = BC$. Если матрица $E = E_{n\times n}$ является изолированной в матрице A, то существует подстановочная матрица $M(\pi) \in \mathrm{Per}_n(P)$, такая что $M(\pi) \leqslant B$ и $M(\pi^{-1}) \leqslant C$.* □

Лемма 7.3. *Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть $A \in P^{n\times n}$. Определитель $\det(A)$ равен $\tilde{1}$ тогда и только тогда, когда A содержит только чётные или только нечётные подстановочные матрицы.*
2. $\det(AB) \leqslant \det(A) \wedge \det(B)$ *для любых матриц $A, B \in P^{n\times n}$.*

Доказательство. 1. Определитель $\det(A)$ равен $\tilde{1}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{per}_+(A) = \overline{\mathrm{per}_-(A)}$.

Если $\mathrm{per}_+(A) = \tilde{1}$, то $\mathrm{per}_-(A) = \tilde{0}$ и A содержит только чётные подстановочные матрицы.

Если $\mathrm{per}_+(A) = \tilde{0}$, то $\mathrm{per}_-(A) = \tilde{1}$ и A содержит только нечётные подстановочные матрицы.

2. Предположим, что $\det(AB) = \tilde{1}$, $\det(A) \wedge \det(B) = \tilde{0}$.

Если $\det(AB) = \tilde{1}$, то существует матрица $M(\sigma) \in \mathrm{Per}_n(P)$, изолированная в матрице A. Тогда существует подстановочная матрица $M(\pi) \in \mathrm{Per}_n(P)$, такая что $M(\pi) \leqslant A$ и $M(\pi^{-1}) \leqslant B$.

Пусть $\det(A) = \tilde{0}$. Тогда A содержит чётные и нечётные подстановочные матрицы. Поэтому AB содержит чётные и нечётные подстановочные матрицы. Имеем, что $\det(AB) = \tilde{0}$, — противоречие.

Если $\det(AB) = \tilde{1}$, то $\det(A) \wedge \det(B) = \tilde{1}$. Это доказывает утверждение 2. □

Теорема 7.1 [3,5,14]. *Пусть $A, B \in P^{n\times n}$. Тогда $\det(AB) \leqslant \det(A) \wedge \det(B)$.*

Доказательство. Обозначим $L = L\big(\mathrm{Set}(A) \cup \mathrm{Set}(B)\big)$. Из лемм 7.1 и 7.3 следует, что

$$\begin{aligned}
&\det(A) \wedge \det(B) = \\
&= \Bigg(\bigvee_{z\in \mathrm{atom}(L)} z \wedge \det\big(\mathrm{cut}_z(A)\big)\Bigg) \wedge \Bigg(\bigvee_{z\in \mathrm{atom}(L)} z \wedge \det\big(\mathrm{cut}_z(B)\big)\Bigg) = \\
&= \bigvee_{z\in \mathrm{atom}(L)} z \wedge \Big(\det\big(\mathrm{cut}_z(A)\big) \wedge \det\big(\mathrm{cut}_z(B)\big)\Big) \geqslant \\
&\geqslant \bigvee_{z\in \mathrm{atom}(L)} z \wedge \det\big(\mathrm{cut}_z(AB)\big) = \det(AB).
\end{aligned}$$

□

Следствие 7.1. *Пусть Gr — подгруппа полугруппы $P^{n\times n}$ с единицей E. Тогда $\det(A) = \det(E)$ для всех $A \in \mathrm{Gr}$.*

Доказательство. Имеем

$$\det(E) = \det(AA^{-1}) \leqslant \det(A) \wedge \det(A^{-1}) \leqslant \det(A).$$

С другой стороны,

$$\det(A) = \det(AE) \leqslant \det(A) \wedge \det(E) \leqslant \det(E). \qquad \square$$

В частности, если матрица A обратима, то $\det(A) = \tilde{1}$.

Обозначим через $\mathrm{ind}(A)$ наименьшее натуральное число, такое что $A^{\mathrm{ind}(A)} = A^{\mathrm{ind}(A)+d}$ для некоторого $d > \tilde{0}$. Пусть $\mathrm{peri}(A)$ — наименьшее натуральное число, такое что $A^{\mathrm{ind}(A)} = A^{\mathrm{ind}(A)+\mathrm{peri}(A)}$. Из теории полугрупп известно, что множество

$$\mathrm{Gr}(A) = \bigl\{A^{\mathrm{ind}(A)},\, A^{\mathrm{ind}(A)+1}, \ldots, A^{\mathrm{ind}(A)+\mathrm{peri}(A)-1}\bigr\}$$

есть циклическая группа относительно умножения.

Следствие 7.2. *Пусть $A \in P^{n\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если*

$$B \in \mathrm{Gr}(A) = \bigl\{A^{\mathrm{ind}(A)},\, A^{\mathrm{ind}(A)+1}, \ldots, A^{\mathrm{ind}(A)+\mathrm{peri}(A)-1}\bigr\},$$

то

$$\det(B) = \det\bigl(A^{\mathrm{ind}(A)}\bigr).$$

2. *Для всех матриц $A \in P^{n\times n}$*

$$\det(A) \geqslant \det(A^2) \geqslant \ldots \geqslant \det\bigl(A^{\mathrm{ind}(A)}\bigr) = \det\bigl(A^{\mathrm{ind}(A)+1}\bigr) = \ldots . \qquad \square$$

Следствие 7.3. *Пусть $A, B \in P^{n\times n}$. Если $A = UBT$ и $B = VAW$ для некоторых матриц T, U, V, $W \in P^{n\times n}$, то $\det(A) = \det(B)$.*

Доказательство. Имеем, что $\det(A) = \det(UBT) \leqslant \det(B)$, $\det(B) = \det(VAW) \leqslant \det(A)$. $\square$

8. Детерминантный ранг матрицы

Пусть $(P, \wedge, \vee, \leqslant)$ — дистрибутивная решётка с псевдодополнениями.

Перманентным рангом ненулевой матрицы $A \in P^{m\times n}$ называется наименьшее натуральное число $k = \mathrm{rank}_{\mathrm{p}}(A)$, для которого существует такая $(k\times k)$-подматрица B матрицы A, что $\mathrm{per}(B) \neq \tilde{0}$. Перманентный ранг нулевой матрицы равен нулю.

Детерминантным рангом ненулевой матрицы $A \in P^{m\times n}$ называется наименьшее натуральное число $k = \mathrm{rank}_{\mathrm{d}}(A)$, для которого существует такая $(k\times k)$-подматрица B матрицы A, что $\det(B) \neq \tilde{0}$. Детерминантный ранг нулевой матрицы равен нулю.

Если B — подматрица матрицы A, то $\mathrm{rank}_{\mathrm{d}}(B) \leqslant \mathrm{rank}_{\mathrm{d}}(A)$.

Пример 8.1. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. Детерминантный ранг ненулевой матрицы $A \in P^{m\times n}$ — наименьшее натуральное число k, для которого существует такая $(k \times k)$-подматрица B матрицы A, что B содержит только чётные или только нечётные подстановочные матрицы. $\square$

Рассмотрим свойства детерминантного ранга.

Теорема 8.1. *Пусть P — дистрибутивная d-решётка, $A \in P^{m\times n}$. Если существует такая $(k \times k)$-подматрица B матрицы A, что $\det(B) \neq \tilde{0}$, и $\det(C) = \tilde{0}$ для всех $\bigl((k+1)\times(k+1)\bigr)$-подматриц C матрицы A, то $\operatorname{rank_d}(A) = k$.*

Доказательство. Справедливо равенство $\operatorname{per}_+(C)^* = \operatorname{per}_-(C)^*$. Пусть D — $\bigl((k+2)\times(k+2)\bigr)$-подматрица матрицы A. Раскладывая $\operatorname{per}_+(D)$ по первой строке, получаем

$$\operatorname{per}_+(D)^* = \bigwedge_{r=1}^{k+2}\bigl(d_{1r}^* \vee \operatorname{per}_+\bigl(D(1\mid r)\bigr)^*\bigr) = \bigwedge_{r=1}^{k+2}\bigl(d_{1r}^* \vee \operatorname{per}_-\bigl(D(1\mid r)\bigr)^*\bigr) = \operatorname{per}_-(D)^*.$$

Поэтому $\det(C) = \tilde{0}$. Отсюда следует, что $\det(D) = \tilde{0}$ для всех $(r\times r)$-подматриц D матрицы A, где $r > k$. □

Следствие 8.1. *Пусть $x \in P^{n\times 1}$, $b \in P^{m\times 1}$. Если система линейных уравнений $Ax = b$ совместна, то $\operatorname{rank_d}(A) = \operatorname{rank_d}(A, b)$, где $(A,b) = \bigl[A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, b\bigr]$.* □

Следующая теорема даёт верхние оценки для числа $\operatorname{rank_d}(A)$.

Теорема 8.2. *Пусть $A \in P^{m\times n}$. Справедливы следующие утверждения.*

1. $\operatorname{rank_d}(A) \leqslant \operatorname{rank_p}(A)$.
2. $\operatorname{rank_d}(A) \leqslant \operatorname{rank_m}(A)$.

Доказательство. 1. Для всех матриц $B \in P^{k\times k}$ справедливо неравенство $\det(B) \leqslant \operatorname{per}(B)$. Поэтому $\operatorname{rank_d}(A) \leqslant \operatorname{rank_p}(A)$.

2. Пусть $k = \operatorname{rank_d}(A)$, B — такая $(k\times k)$-подматрица матрицы A, что $\det(B) \neq \tilde{0}$. Из второго утверждения следствия 6.2 получаем, что

$$\operatorname{rank_d}(B) = k = \operatorname{rank_m}(B) \leqslant \operatorname{rank_m}(A). \qquad \square$$

Для всех $D \in P^{m\times n}$, $M \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$, $N \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ обозначим через $D(M,N)$ подматрицу, полученную из матрицы D удалением всех строк $D_{(i)}$, $i \notin M$, и удалением всех столбцов $D^{(j)}$, $j \notin N$.

Теорема 8.3. *Пусть P — булева решётка, $B \in P^{m\times l}$, $C \in P^{l\times n}$. Тогда*

$$\operatorname{rank_d}(BC) \leqslant \min\{\operatorname{rank_d}(B), \operatorname{rank_d}(C)\}.$$

Доказательство. Обозначим $k = \operatorname{rank_d}(B)$. Для любых множеств $M \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$, $N \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, таких что $|M| = |N| = k+1$, определена матрица $A = (BC)(M,N)$. Имеем

$$A = B(M,\{1,2,\ldots,l\})C(\{1,2,\ldots,l\},N).$$

Пусть $D = B(M,\{1,2,\ldots,l\})$, $C(\{1,2,\ldots,l\},N) = (c_{ij})_{l\times n}$. Тогда

$$A^{(j)} = \sum_{s=1}^{l} c_{sj} D^{(s)}, \quad j = 1,2,\ldots,k+1.$$

По теореме 6.5 получаем, что

$$\det(A) \leqslant \bigvee_{(i_1,i_2,\ldots,i_{k+1})\in I} (c_{i_1 1}\wedge c_{i_2 2}\wedge\ldots\wedge c_{i_{k+1} k+1})\wedge\det\big(\big[D^{(i_1)},\, D^{(i_2)},\ldots,\, D^{(i_{k+1})}\big]\big),$$

где $I = \{1, 2, \ldots, l\}^n$. Из равенства $k = \mathrm{rank_d}(B)$ следует, что

$$\det\big(\big[D^{(i_1)},\ldots, D^{(i_{k+1})}\big]\big) = \tilde{0}.$$

Поэтому $\det(A) = \tilde{0}$ и $\mathrm{rank_d}(BC) \leqslant k = \mathrm{rank_d}(B)$.

Аналогично $\mathrm{rank_d}(BC) \leqslant \mathrm{rank_d}(A)$. □

Следствие 8.2. *Пусть P — булева решётка, A, B — решёточные матрицы над P. Если $A = UBT$ и $B = VAW$ для некоторых решёточных матриц T, U, V, W, то*

$$\mathrm{rank_d}(A) = \mathrm{rank_d}(B).$$

Доказательство. Имеем, что

$$\mathrm{rank_d}(A) = \mathrm{rank_d}(UBT) \leqslant \mathrm{rank_d}(B),$$
$$\mathrm{rank_d}(B) = \mathrm{rank_d}(VAW) \leqslant \mathrm{rank_d}(A).$$ □

Литература

[1] Аранович Б. И. Использование матричных методов в проблемах анализа релейно-контактных сетей // Автоматика и телемеханика. — 1949. — Т. 10. — С. 437—451.

[2] Поплавский В. Б. Объёмы и определители степеней транзитивных и рефлексивных булевых отношений на конечном множестве // Изв. Тульск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2004. — Т. 10, № 1. — С. 134—141.

[3] Поплавский В. Б. Определители степеней булевых матриц // Чебышёвский сб. — 2004. — Т. 5, № 3 (11). — С. 98—111.

[4] Поплавский В. Б. Ориентированные определители произведения булевых матриц // Математика. Механика. Вып. 6. — Изд-во Саратовск. ун-та, 2004. — С. 111—114.

[5] Поплавский В. Б. О разложении определителей булевых матриц // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 199—223.

[6] Поплавский В. Б. О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц // Дискрет. мат. — 2008. — Т. 20, № 4. — С. 42—60.

[7] Соколов О. Б. Применение булевых определителей к анализу логических многополюсников // Учёные записки Казанск. гос. ун-та. — 1963. — Т. 123, № 6. — С. 155—164.

[8] De Caen D., Gregory D. A. Primes in the semigroup of Boolean matrices // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — P. 119—134.

[9] Chechlarova K. Powers of matrices over distributive lattices. A review // Fuzzy Sets Systems. — 2003. — Vol. 138. — P. 627—641.

[10] Chesley D. S., Bevis J. H. Determinants for matrices over lattices // Proc. Royal Soc. Edinburgh. — 1969. — Vol. 68. — P. 138—144.

[11] Grätzer G. General Lattice Theory. — Berlin: Akademie, 1978.

[12] Hammer P. L., Rudeanu S. Méthodes booléenes en recherche opérationelle. — Paris: Dunod, 1970.

[13] Kim K. H., Roush F. W. Generalized fuzzy matrices // Fuzzy Sets Systems. — 1980. — Vol. 4. — P. 293—315.

[14] Poplavski V. On orientability and degeneration of Boolean binary relation on a finite set // Math. Logic in Asia. Proc. 9th Asian Logic Conf. — Singapore: World Scientific Press, 2006. — P. 203—214.

[15] Poplin P. L., Hartwig R. E. Determinant identities over commutative semiring // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 387. — P. 99—132.

[16] Reutenauer Ch., Staubing H. Inversion of matrices over a commutative semiring // J. Algebra. — 1984. — Vol. 88, no. 2. — P. 350—360.