Экспоненциальная дихотомия при дискретизации на общей аппроксимационной схеме

В. ПАСТОР
Университет Валенсии, Испания

С. ПИСКАРЁВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: piskarev@yahoo.com

УДК 519.62

Ключевые слова: компактная сходимость резольвент, уплотняющие операторы, дихотомические оценки решения, аналитические полугруппы.

Аннотация

Работа посвящена численному анализу абстрактных параболических задач $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = u^0$ с гиперболическим генератором A. Разработан общий подход для доказательства дискретной дихотомии в весьма общей постановке при дискретизации по пространству и времени. Хорошо известно, что фазовое пространство в окрестности гиперболической стационарной точки расщепляется таким образом, что данная начальная задача сводится к начальным задачам с экспоненциально убывающими решениями в противоположных направлениях. Мы используем принцип компактной аппроксимации и принцип совместного уплотнения для доказательства того, что такое расщепление имеет место и на общей дискретизационной схеме. Основные условия наших результатов выполняются, в частности, для операторов с компактной резольвентой и уплотняющих полугрупп и могут быть проверены для метода конечных элементов и разностных методов.

Abstract

V. Pastor, S. Piskarev, The exponential dichotomy on general approximation scheme, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 103—127.

This paper is devoted to the numerical analysis of abstract parabolic problems $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = u^0$ with hyperbolic generator A. We develop a general approach to establish a discrete dichotomy in a very general setting in the case of discrete approximation in space and time. It is a well-known fact that the phase space in the neighborhood of the hyperbolic equilibrium can be split in such a way that the original initial value problem is reduced to initial value problems with exponentially decaying solutions in opposite time directions. We use the theory of compact approximation principle and collectively condensing approximation to show that such a decomposition of the flow persists under rather general approximation schemes. The main assumption of our results are naturally satisfied, in particular, for operators with compact resolvents and condensing semigroups and can be verified for the finite element method as well as finite difference methods.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 103—127.

1. Введение

Во многих задачах аппроксимации аттракторов, бегущих волн, теневых траекторий и т. д. используется понятие дихотомии. При численном анализе таких задач весьма важно знать, что экспоненциальные оценки убывания сохраняются равномерно по параметру дискретизации.

Пусть $B(E)$ обозначает банахову алгебру всех ограниченных линейных операторов в комплексном банаховом пространстве E. Множество всех линейных замкнутых плотно определённых операторов в E будем обозначать $\mathcal{C}(E)$. Для оператора $B \in \mathcal{C}(E)$ обозначим через $\sigma(B)$ его спектр, а через $\rho(B)$ — его резольвентное множество. Пусть $A\colon D(A) \subseteq E \to E$ — такой замкнутый оператор, что

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{B(E)} \leqslant \frac{M}{1+|\lambda|} \quad \text{для всех} \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0. \tag{1.1}$$

При условии (1.1) спектр оператора A лежит слева $\inf\{\operatorname{Re}\lambda\colon \lambda \in \sigma(A)\} < 0$, так что можно определить дробные степени $(-A)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (см. [19, 23]), оператора A и пространства $E^\alpha := D\big((-A)^\alpha\big)$, наделённые нормой графика $\|x\|_{E^\alpha} = \|(-A)^\alpha x\|_E$. Определим в пространстве E^α шар $\mathcal{U}_{E^\alpha}(0;\rho)$ с центром в 0 и радиусом $\rho > 0$.

Для того чтобы показать, как возникают задачи дихотомии в численном анализе, мы рассмотрим пример полулинейного уравнения в банаховом пространстве E^α:

$$\begin{aligned} &u'(t) = Au(t) + f\big(u(t)\big), \quad t \geqslant 0,\\ &u(0) = u^0 \in E^\alpha, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $f(\cdot)\colon E^\alpha \subseteq E \to E$, $0 \leqslant \alpha < 1$, предполагается непрерывной, ограниченной и непрерывно по Фреше дифференцируемой функцией. Более точно, предположим, что выполнено условие

(F1) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $\|f'(w) - f'(z)\|_{B(E^\alpha,E)} \leqslant \varepsilon$ при $\|w - z\|_{E^\alpha} \leqslant \delta$ для всех $w, z \in \mathcal{U}_{E^\alpha}(u^*;\rho)$, где u^* — гиперболическая стационарная точка задачи (1.2).

Делая в задаче (1.2) замену переменных $v(\cdot) = u(\cdot) - u^*$, где u^* — гиперболическая стационарная точка, мы приходим к задаче

$$\begin{aligned} &v'(t) = \big(A + f'(u^*)\big)v(t) + f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t),\\ &v(0) = u^0 - u^* = v^0. \end{aligned}$$

Эта задача может быть записана в виде

$$v'(t) = A_{u^*}v(t) + F_{u^*}\big(v(t)\big), \quad v(0) = v^0, \quad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

где $A_{u^*} = A + f'(u^*)$, $F_{u^*}\big(v(t)\big) = f(v(t)+u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t)$. Заметим, что из условия (F1) следует, что функция $F_{u^*}\big(v(t)\big) = f(v(t) + u^*) - f(u^*) - f'(u^*)v(t)$ при малых $\|v^0\|_{E^\alpha}$ имеет порядок $o(\|v(t)\|_{E^\alpha})$. Поскольку $f'(u^*) \in B(E^\alpha, E)$,

$0 \leqslant \alpha < 1$, то оператор $A_{u^*} = A + f'(u^*)$ является генератором C_0-полугруппы [34]. Может случиться, что спектр оператора A_{u^*} расщепляется на две части: σ^+ и σ^-.

Предположим, что часть σ^+ спектра оператора $A + f'(u^*)$, которая находится справа от мнимой оси, состоит из конечного числа собственных значений конечной корневой кратности. Такое предположение выполняется, например, для операторов A, у которых резольвента компактна. Условия, при которых оператор A_{u^*} имеет свойство дихотомии, изучались, например, в [20, 46, 47]. В случае гиперболической стационарной точки u^* оператор A_{u^*} не имеет спектра на $i\mathbb{R}$. Пусть $U(\sigma^+) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ является открытой связанной окрестностью σ^+ с границей $\partial U(\sigma^+)$. Разложим E^α, используя проектор Рисса

$$P(\sigma^+) := P(\sigma^+, A_{u^*}) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(\sigma^+)} (\zeta I - A_{u^*})^{-1}\, d\zeta, \tag{1.4}$$

определённый по σ^+. Согласно этому определению и благодаря аналитичности C_0-полугруппы $e^{tA_{u^*}}$, $t \in \mathbb{R}_+$, существуют такие положительные константы $M_1, \beta > 0$, что

$$\begin{cases} \|e^{tA_{u^*}} z\|_{E^\alpha} \leqslant M_1 e^{-\beta t} \|z\|_{E^\alpha}, & t \geqslant 0, \\ \|e^{tA_{u^*}} v\|_{E^\alpha} \leqslant M_1 e^{\beta t} \|v\|_{E^\alpha}, & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

для всех $v \in P(\sigma^+)E^\alpha$ и $z \in \big(I - P(\sigma^+)\big)E^\alpha$. Поскольку $F_{u^*}\big(v(t)\big) = o(\|v(t)\|_{E^\alpha})$ при малых $v(\cdot)$, оценки (1.5) являются основными при рассмотрении поведения решения задачи (1.2) в окрестности гиперболической стационарной точки u^*.

Если элемент v^0 близок к 0, т. е., скажем, $v^0 \in \mathcal{U}_{E^\alpha}(0;\rho)$ при малом $\rho > 0$, то обобщённое решение $v(t; v^0)$ задачи (1.3) будет некоторое время оставаться в шаре $\mathcal{U}_{E^\alpha}(0;\rho)$. Мы обозначим максимальное время нахождения решения $v(t; v^0)$ в шаре $\mathcal{U}_{E^\alpha}(0;\rho)$ через

$$T = T(v^0) = \sup\{t \geqslant 0\colon \|v(t; v^0)\|_{E^\alpha} \leqslant \rho \text{ или } v(t; v^0) \in \mathcal{U}_{E^\alpha}(0;\rho)\}.$$

Возвращаясь к решению задачи (1.3) для любых двух $v^0, v^T \in \mathcal{U}_{E^\alpha}(0;\rho)$, мы рассмотрим граничную задачу

$$\begin{cases} v'(t) = A_{u^*} v(t) + F_{u^*}\big(v(t)\big), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \big(I - P(\sigma^+)\big)v(0) = \big(I - P(\sigma^+)\big)v^0, & P(\sigma^+)v(T) = P(\sigma^+)v^T. \end{cases} \tag{1.6}$$

Обобщённое решение задачи (1.6), как было показано в [10], удовлетворяет интегральному решению

$$v(t) = e^{(t-T)A_{u^*}} P(\sigma^+) v^T + e^{tA_{u^*}} \big(I - P(\sigma^+)\big) v^0 +$$
$$+ \int\limits_0^t e^{(t-s)A_{u^*}} \big(I - P(\sigma^+)\big) F_{u^*}\big(v(s)\big) ds + \int\limits_t^T e^{(t-s)A_{u^*}} P(\sigma^+) F_{u^*}\big(v(s)\big) ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.7}$$

Если мы дискретизируем задачу (1.3) по пространственным и временно́й переменным, то важно знать, что произойдёт с оценками типа (1.5) для аппроксимирующих решений. Если оценки типа (1.5) выполняются равномерно по параметру дискретизации, то можно ожидать, что эти оценки будут выполняться для аппроксимирующих решений (1.7).

Таким образом, в данной работе мы рассматриваем общий аппроксимационный подход, позволяющий сохранить дихотомические оценки (1.5) при аппроксимации траекторий $u(\cdot)$.

2. Предварительные сведения

Обозначим
$$\mathbb{T}(r) = \{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = r\}, \quad \mathbb{T} = \mathbb{T}(1).$$

Определение 2.1. C_0-полугруппа e^{tA}, $t \geqslant 0$, определённая на банаховом пространстве E, называется гиперболической, если $\sigma(e^{tA}) \cap \mathbb{T} = \varnothing$ для всех $t > 0$. Генератор A называется гиперболическим, если $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$.

Обозначим через $\Upsilon(\mathbb{R}; E)$ любое из пространств $L^p(\mathbb{R}; E)$, $1 \leqslant p < \infty$, $C_0(\mathbb{R}; E)$ или пространство Степанова $S^p(\mathbb{R}; E)$, $1 \leqslant p < \infty$. Рассмотрим в банаховом пространстве $\Upsilon(\mathbb{R}; E)$ (мы называем это пространство пространством Палмера; см. [30], где свойство фредгольмовости было отмечено впервые) линейный дифференциальный оператор
$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A\colon D(\mathcal{L}) \subseteq \Upsilon(\mathbb{R}; E) \to \Upsilon(\mathbb{R}; E), \tag{2.1}$$
где A порождает C_0-полугруппу, область определения оператора $\mathcal{L}$ состоит из таких функций $u(\cdot) \in \Upsilon(\mathbb{R}; E)$, что для некоторой функции $g(\cdot) \in \Upsilon(\mathbb{R}; E)$ имеем
$$u(t) = e^{(t-s)A}u(s) - \int_s^t e^{(t-\eta)A} g(\eta)\, d\eta, \quad s \leqslant t, \quad t \in \mathbb{R},$$
и $\mathcal{L}u(\cdot) = g(\cdot)$. Заметим [6], что оператор $\mathcal{L}$ является генератором C_0-полугруппы $e^{t\mathcal{L}}$ в банаховом пространстве $\Upsilon(\mathbb{R}; E)$, которая определяется для всех $v(\cdot) \in \Upsilon(\mathbb{R}; E)$ по формуле
$$(e^{t\mathcal{L}}v)(s) = e^{tA}v(s-t) \ \text{ для всех } \ s \in \mathbb{R}, \quad t \geqslant 0.$$

Определение 2.2. C_0-полугруппа e^{tA}, $t \geqslant 0$, имеет экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$ с экспоненциальными константами $M \geqslant 1$, $\beta > 0$, если существует проектор $P\colon E \to E$, такой что

1) $e^{tA}P = Pe^{tA}$ для всех $t \geqslant 0$;
2) сужение полугруппы $e^{tA}|_{\mathcal{R}(P)}$, $t \geqslant 0$, обратимо на $P(E)$ и
$$\|e^{-tA}Px\| \leqslant Me^{-\beta t}\|Px\|, \quad t \geqslant 0, \quad x \in E,$$
$$\|e^{tA}(I-P)x\| \leqslant Me^{-\beta t}\|(I-P)x\|, \quad t \geqslant 0, \quad x \in E.$$

Теорема 2.1 [8]. *Оператор $\mathcal{L}$, заданный в банаховом пространстве $\Upsilon(\mathbb{R};E)$, обратим тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(e^{1A}) \cap \mathbb{T} = \varnothing. \tag{2.2}$$

Если выполнено условие (2.2), *то*

$$(\mathcal{L}^{-1}f)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t-s)f(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f(\cdot) \in \Upsilon(\mathbb{R};E),$$

где

$$G(\eta) = \begin{cases} -e^{\eta A}P_-, & \eta \geqslant 0, \\ e^{\eta A}P_+, & \eta < 0, \end{cases} \; - \tag{2.3}$$

функция Грина и

$$\|G(\eta)\| \leqslant \begin{cases} M_+e^{-\gamma_+\eta}, & \eta \geqslant 0, \\ M_-e^{\gamma_-\eta}, & \eta < 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$M_+ = 2M\varkappa(\mathcal{L})\left(1 + \frac{1}{2\varkappa(\mathcal{L})}\right)^2, \quad M_- = 2M\varkappa(\mathcal{L})\left(1 - \frac{1}{2\varkappa(\mathcal{L})}\right)^2,$$
$$\gamma_+ = \ln\left(1 + \frac{1}{2\varkappa(\mathcal{L})}\right), \quad \gamma_- = -\ln\left(1 - \frac{1}{2\varkappa(\mathcal{L})}\right)$$

и $\varkappa(\mathcal{L}) = 1 + C(\Upsilon)(M + M^2\|\mathcal{L}^{-1}\|)$.

Заметим, что константа $C(\Upsilon)$ определяется как $C(\Upsilon) = 1$, если $\Upsilon(\mathbb{R};E) = L^\infty(\mathbb{R},E)$ или $\Upsilon(\mathbb{R};E) = C_0(\mathbb{R},E)$ и как $C(\Upsilon) = 2^{1-1/p}$, если $\Upsilon(\mathbb{R};E) = L^p(\mathbb{R},E)$ или $\Upsilon(\mathbb{R};E) = S^p(\mathbb{R},E)$, $p \in [1,\infty)$.

Обозначим через $\Upsilon(\mathbb{Z};E)$ банахово пространство E-значных последовательностей с соответствующей нормой пространства $\Upsilon(\mathbb{R};E)$. Для любого $u(\cdot) \in \Upsilon(\mathbb{Z};E)$, т. е. $\{u(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, и $B = e^{1A} \in B(E)$ мы определим оператор

$$\mathcal{B}\colon D(\mathcal{B}) \subseteq l^p(\mathbb{Z};E) \to l^p(\mathbb{Z};E)$$

по формуле

$$(\mathcal{B}u)(k) = Bu(k-1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad u(\cdot) \in l^p(\mathbb{Z};E).$$

Определим также оператор

$$\mathcal{D} = I - \mathcal{B}\colon D(\mathcal{D}) = D(\mathcal{B}) \subseteq l^p(\mathbb{Z};E) \to l^p(\mathbb{Z};E)$$

по формуле

$$(\mathcal{D}u)(k) = u(k) - Bu(k-1), \quad u(\cdot) \in D(\mathcal{B}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Предложение 2.1 [8]. *Пусть оператор*

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{dt} + A\colon D(\mathcal{L}) \subseteq \Upsilon(\mathbb{R};E) \to \Upsilon(\mathbb{R};E)$$

обратим. Тогда оператор

$$\mathcal{D}\colon D(\mathcal{D}) \subseteq \Upsilon(\mathbb{Z}; E) \to \Upsilon(\mathbb{Z}; E)$$

тоже обратим и

$$\|\mathcal{D}^{-1}\| \leqslant 1 + C(\Upsilon)(M + M^2\|\mathcal{L}^{-1}\|).$$

Обратно, если $\mathcal{D}$ обратим, то

$$\mathcal{L}\colon D(\mathcal{L}) \subseteq \Upsilon(\mathbb{R}; E) \to \Upsilon(\mathbb{R}; E)$$

обратим и

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leqslant C(\Upsilon)(M + M^2\|\mathcal{D}^{-1}\|).$$

Теорема 2.2 [7]. *Разностный оператор*

$$(\mathcal{D}u)(k) = u(k) - Bu(k-1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad u(\cdot) \in l^p(\mathbb{R}; E), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

обратим тогда и только тогда, когда

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \varnothing. \tag{2.5}$$

Если выполнено условие (2.5), *то обратный оператор имеет вид*

$$(\mathcal{D}^{-1}v)(k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Gamma(k-m)v(m), \tag{2.6}$$

где $v(\cdot) \in l^p(\mathbb{Z}; E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и функция $\Gamma(\cdot)\colon \mathbb{Z} \to B(E)$ определена по формуле

$$\Gamma(k) = \begin{cases} B^k(I-P), & k \geqslant 0, \\ -B_0^{-k}P, & k \leqslant -1, \end{cases} \tag{2.7}$$

где B_0 — сужение оператора B на $\mathcal{R}(P)$.

Определение 2.3. Оператор $B \in B(E)$ обладает свойством экспоненциальной дискретной дихотомии с данными (M, r, P), если $P \in B(E)$ является проектором в E, а константы M, r при $0 \leqslant r < 1$ таковы, что имеют место следующие утверждения:

1) $B^kP = PB^k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;
2) $\|B^k(I-P)\| \leqslant Mr^k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;
3) $\hat{B} := B|_{\mathcal{R}(P)}\colon \mathcal{R}(P) \mapsto \mathcal{R}(P)$ — оператор, для которого $\|\hat{B}^{-k}P\| \leqslant Mr^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.3. *Для оператора $B \in B(E)$ следующие условия эквивалентны*:

1) *$\lambda \in \rho(B)$ для всех $\lambda \in \mathbb{T}$ и $\|(\lambda I - B)^{-1}\| \leqslant \beta < \infty$ для всех $\lambda \in \mathbb{T}$;*
2) *B обладает свойством экспоненциальной дискретной дихотомии с данными (M, r, P).*

Точнее, мы покажем, что из 1) *следует* 2) *с $M = 2\beta^2/(\beta-1)$ и $r = 1 - 1/(2\beta)$. Обратно, из* 2) *следует* 1) *с $\beta = M(1+r)/(1-r)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие 1), и без потери общности пусть $\beta > 1$. Для $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, имеем

$$\left| z - \frac{z}{|z|} \right| = \big| 1 - |z| \big|.$$

Следовательно, если $\big|1 - |z|\big|\beta < 1$, то классические оценки возмущений показывают, что $z \in \rho(B)$ и

$$\|(zI - B)^{-1}\| \leqslant \frac{\beta}{1 - \beta\big|1 - |z|\big|}. \tag{2.8}$$

Определим P как проектор Рисса по формуле

$$I - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} (zI - B)^{-1}\, dz. \tag{2.9}$$

Поскольку B коммутирует с резольвентой, то выполняется условие 1) определения 2.3. Используя неравенство (2.8) и теорему Коши, мы можем сдвинуть контур интегрирования:

$$I - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} (zI - B)^{-1}\, dz, \quad \text{если} \quad |1 - r| < \frac{1}{\beta}. \tag{2.10}$$

Итак,

$$B^k(I - P) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} z^k (zI - B)^{-1}\, dz, \quad \text{если} \quad |1 - r| < \frac{1}{\beta}. \tag{2.11}$$

Для $k = 0$ это следует из (2.10). Если (2.11) выполняется для некоторого k, то мы получаем, что

$$B^{k+1}P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} (B - zI + zI) z^k (zI - B)^{-1}\, dz = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} z^{k+1} (zI - B)^{-1}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} z^k\, dz;$$

таким образом, утверждение выполняется для $k + 1$. Соотношения (2.11) и (2.8) приводят к первой дихотомической оценке для $1 - 1/\beta < r \leqslant 1$:

$$\|B^k P\| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi r r^k \frac{\beta}{1 - \beta(1 - r)} = \frac{\beta r^{k+1}}{1 - \beta(1 - r)} \quad \text{для} \quad k \geqslant 0. \tag{2.12}$$

Для второй дихотомической оценки мы используем резольвентное уравнение

$$(zI - B)^{-1} = \frac{1}{z} I + z^{-1} B (zI - B)^{-1}. \tag{2.13}$$

Для $|1-r|<1/\beta$ соотношения (2.10) и (2.13) дают

$$I-P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\left(\frac{1}{z}I-(zI-B)^{-1}\right)dz=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{1}{z}B(zI-B)^{-1}\,dz.$$

Это показывает, что при $k=1$ имеет место следующее равенство:

$$I-P=-B^k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}z^{-k}(zI-B)^{-1}\,dz \quad \text{для} \quad k\geqslant 1. \tag{2.14}$$

Если (2.14) выполняется для некоторого k, то, используя (2.13), находим, что

$$I-P=-B^k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\big(z^{-(k+1)}+z^{-(k+1)}B(zI-B)^{-1}\big)dz=$$
$$=-B^{k+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}z^{-(k+1)}(zI-B)^{-1}\,dz.$$

Применяя (2.14) к $x\in E$ и используя, что $I-P$ коммутирует с B, и (2.8), получаем, что

$$\|(I-P)x\|=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}z^{-k}(zI-B)^{-1}\,dz\,B^k(I-P)x\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{r^{-k}}{2\pi}2\pi r\frac{\beta}{1-\beta(r-1)}\|B^k(I-P)x\|.$$

Суммируя, мы имеем для всех $k\geqslant 1$, $1\leqslant r<1+1/\beta$, $u\in E$, что

$$\|(I-P)u\|\leqslant\frac{\beta r^{-k+1}}{1-\beta(r-1)}\|B^k(I-P)u\|. \tag{2.15}$$

Для $k=1$ эти оценки показывают, что отображение

$$\hat{B}=B|_{\mathcal{N}(P)}\colon\mathcal{N}(P)\mapsto\mathcal{N}(P)$$

является взаимно-однозначным. Для доказательства того, что $\hat{B}$ является сюръекцией, возьмём $f\in\mathcal{N}(P)$ и положим

$$v=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}z^{-1}(zI-B)^{-1}f\,dz.$$

Из этого уравнения мы имеем, что $(I-P)v=0$, и, используя (2.13), находим, что

$$Bv=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}(z^{-1}I-(zI-B)^{-1})f\,dz=(I-P)f=f.$$

Поэтому $\hat{B}$ является линейным гомоморфизмом на $\mathcal{N}(P)$, удовлетворяющим неравенству

$$\|\hat{B}^{-k}(I-P)u\| \leqslant \frac{\beta r^{-k+1}}{1-\beta(r-1)}\|(I-P)u\| \quad \text{для} \quad 1 \leqslant r < 1+\frac{1}{\beta}. \tag{2.16}$$

Это доказывает экспоненциальную дихотомию. Для получения специфических констант выберем $r = 1-1/(2\beta)$ в (2.12) и получим оценку $(2\beta-1)r^k$. Для того чтобы получить такие же оценки в обратном направлении, применим (2.16) с $r = \big(1-1/(2\beta)\big)^{-1} < 1+1/\beta$. В (2.16) находим верхнюю границу Mr^{-k} с константой $M = 2\beta^2/(\beta-1)$. Мы получаем наше утверждение, поскольку $M > 2\beta-1$.

Предположим теперь, что имеет место экспоненциальная дихотомия, и установим 1). Для $|\lambda| = 1$ уравнение $(\lambda I - B)u = f$ эквивалентно системе

$$(\lambda I - BP)Pu = Pf,$$
$$(\lambda I - \hat{B})(I-P)u = (I-P)f,$$

которая может быть записана как

$$(I - \lambda^{-1}BP)Pu = \lambda^{-1}Pf, \tag{2.17}$$
$$(I - \lambda\hat{B}^{-1})(I-P)u = -\hat{B}^{-1}(I-P)f. \tag{2.18}$$

Оба уравнения имеют единственное решение в виде ряда

$$Pu = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)}B^kPf, \tag{2.19}$$

$$(I-P)u = -\sum_{k=0}^{\infty} \hat{B}^{-(k+1)}\lambda^k(I-P)f. \tag{2.20}$$

Тогда экспоненциальная дихотомия даёт оценки

$$\|Pu\| \leqslant \frac{M}{1-r}\|f\|,$$
$$\|(I-P)u\| \leqslant M\frac{r}{1-r}\|f\|.$$

По неравенству треугольника получаем условие 1) с $\beta = M(1+r)/(1-r)$. □

3. Дискретизация операторов и полугрупп

В [16, 40, 42, 43] был разработан общий подход, который позволил проводить анализ сходимости дискретизационных методов на основе единой теории. Эта теория даёт возможность рассматривать с общих позиций различные методы: метод конечных элементов, конечно-разностные методы и коллокационные методы. Целью настоящей работы является демонстрация возможности описания свойств дихотомии при дискретизации по пространству и времени на общей дискретизационной схеме. Кроме того, мы рассмотрим случай, когда резольвента оператора A может не быть компактной.

3.1. Общая аппроксимационная схема

Общая аппроксимационная схема (см. [43]) может быть описана следующим образом. Пусть E_n и E — банаховы пространства, а $\{p_n\}$ — последовательность линейных ограниченных операторов $p_n\colon E \to E_n$, $p_n \in B(E, E_n)$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, обладающих свойством

$$\|p_n x\|_{E_n} \to \|x\|_E \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для любого} \quad x \in E. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{P}$-сходящейся к $x \in E$, если $\|x_n - p_n x\|_{E_n} \to 0$ при $n \to \infty$; обозначение: $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Определение 3.2. Последовательность ограниченных линейных операторов $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется $\mathcal{PP}$-сходящейся к ограниченному оператору $B \in B(E)$, если для любого $x \in E$ и для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, такой что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, имеем $B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Bx$; обозначение: $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$.

В случае неограниченных операторов (как известно, инфинитезимальные генераторы, вообще говоря, не являются ограниченными) рассматривается понятие *согласованности*.

Определение 3.3. Последовательность замкнутых линейных операторов $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется согласованной с замкнутым линейным оператором $A \in \mathcal{C}(E)$, если для каждого $x \in D(A)$ существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D(A_n) \subseteq E_n$, $n \in \mathbb{N}$, такая что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ и $A_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} Ax$. Тогда пишем: (A_n, A) согласованны.

Для аналитических C_0-полугрупп имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 [33]. *Пусть операторы A и A_n порождают аналитические C_0-полугруппы. Условия* (A) *и* (B$_1$) *эквивалентны условию* (C$_1$).

(A) *Согласованность. Существует такое $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap\limits_n \rho(A_n)$, что резольвенты сходятся*:

$$(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}.$$

(B$_1$) *Устойчивость. Существуют константы $M_1 \geqslant 1$ и $\omega_1 \in \mathbb{R}$, не зависящие от n, такие что*

$$\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda - \omega_1|}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(C_1) *Сходимость. Для некоторого конечного числа* $\mu > 0$ *и некоторого* $0 < \theta < \pi/2$ *имеем*

$$\max_{\eta \in \Sigma(\theta,\mu)} \|e^{\eta A_n} u_n^0 - p_n e^{\eta A} u^0\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{когда} \quad u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}} u^0.$$

Здесь мы использовали сектор с углом 2θ *и радиусом* ρ, *заданный как*

$$\Sigma(\theta,\mu) = \{z \in \Sigma(\theta) \colon |z| \leqslant \mu\}, \quad \Sigma(\theta) = \{z \in \mathbb{C} \colon |\arg z| \leqslant \theta\}.$$

При полудискретизации естественно предполагать, что условия (A) и (B_1) выполняются.

Определение 3.4. Область устойчивости $\Delta_s = \Delta_s(\{A_n\})$, $A_n \in \mathcal{C}(B_n)$, определяется как множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\lambda \in \rho(A_n)$ для почти всех n и последовательность $\{\|(\lambda I_n - A_n)^{-1}\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ является ограниченной. Область сходимости $\Delta_c = \Delta_c(\{A_n\})$, $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$, определяется как множество всех таких $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\lambda \in \Delta_s(\{A_n\})$ и последовательность операторов $\{(\lambda I_n - A_n)^{-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathcal{PP}$-сходится к некоторому оператору $S(\lambda) \in B(E)$.

Определение 3.5. Последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n \in B(E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется устойчиво сходящейся к оператору $B \in B(E)$, если $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ и $\|B_n^{-1}\|_{B(E_n)} = O(1)$, $n \to \infty$. Обозначение: $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ устойчиво.

Определение 3.6. Последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n \in B(E_n)$, называется собственно сходящейся к оператору $B \in B(E)$, если $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ и из того, что $\|x_n\|_{E_n} = O(1)$ и $\{B_n x_n\}$ $\mathcal{P}$-компактна, следует, что $\{x_n\}$ является $\mathcal{P}$-компактной. Обозначение: $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ собственно.

Теорема 3.2 [43]. *Пусть* $C_n, Q_n \in B(E_n)$, $C, Q \in B(E)$ *и* $\mathcal{R}(Q) = E$. *Предположим, что* $C_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} C$ *компактно и* $Q_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q$ *устойчиво. Тогда* $Q_n + C_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q + C$ *собственно.*

Теорема 3.3 [43]. *Пусть* $Q_n \in B(E_n)$ *и* $Q \in B(E)$. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $Q_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q$ *собственно,* Q_n *— фредгольмовы операторы нулевого индекса и* $\mathcal{N}(Q) = \{0\}$;
2) $Q_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q$ *устойчиво и* $\mathcal{R}(Q) = E$;
3) $Q_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q$ *устойчиво и собственно*;
4) *если выполняется одно из условий* 1)—3), *то существуют* $Q_n^{-1} \in B(E_n)$, $Q^{-1} \in B(E)$ *и* $Q_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q^{-1}$ *устойчиво и собственно.*

Теорема 3.4. *Пусть* $\lambda I_n - B_n \in B(E_n)$ *— фредгольмовы операторы нулевого индекса* $\operatorname{ind}(\lambda I_n - B_n) = 0$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$. *Предположим также, что* $B \in B(E)$ *обладает свойством* $\mathbb{T} \cap \sigma(B) = \varnothing$ *и* $\lambda I_n - B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \lambda I - B$ *собственно при любом* $\lambda \in \mathbb{T}$. *Тогда* $\lambda I_n - B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \lambda I - B$ *устойчиво при любом* $\lambda \in \mathbb{T}$ *и* $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{T}} \|(\lambda I_n - B_n)^{-1}\| < \infty$.

Доказательство. Предположим, что существуют последовательности $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \mathbb{T}$, и $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, такие что $\|x_n\| = 1$ и $(\lambda_n I_n - B_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $\mathbb{T}$ — компакт, то найдётся такое $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, что $\lambda_n \to \lambda_0 \in \mathbb{T}$ при $n \in \mathbb{N}'$. В то же время $\lambda_0 I_n - B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \lambda_0 I - B$ собственно для таких $\lambda_0 \in \mathbb{T}$ и $(\lambda_0 I_n - B_n)x_n = (\lambda_0 I_n - \lambda_n I_n)x_n + (\lambda_n I_n - B_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ при $n \in \mathbb{N}'$. Поэтому найдётся такое $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$, что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x_0 \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}''$. Но в этом случае $(\lambda_0 I_n - B_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda_0 I - B)x_0 = 0$ при $n \in \mathbb{N}''$, что противоречит нашему предположению $\mathbb{T} \cap \sigma(B) = \varnothing$. Теорема доказана. □

Определение 3.7. Операторы $B_n \in B(E_n)$ обладают равномерным экспоненциальным дискретным свойством дихотомии с данными (M, r, P_n) равномерно по $n \in \mathbb{N}$, если $P_n \in B(E_n)$ является проектором в E_n и M, r, $0 \leqslant r < 1$, — такие константы, что выполняется следующее:

1) $B_n^k P_n = P_n B_n^k$ и $\|P_n\| \leqslant \mathrm{const}$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$;
2) $\|B_n^k (I_n - P_n)\| \leqslant M r^k$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$;
3) $\hat{B}_n := B_n|_{\mathcal{R}(P_n)} \colon \mathcal{R}(P_n) \mapsto \mathcal{R}(P_n)$ является гомоморфизмом, для которого $\|\hat{B}_n^{-k} P_n\| \leqslant M r^k$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.5. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $\lambda I_n - B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \lambda I - B$ *устойчиво и* $\lambda \in \rho(B)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{T}$;
2) *оператор* $\mathcal{D} = I - \mathcal{B}$ *обратим и* $\mathcal{D}_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{D}$ *устойчиво, где* $(\mathcal{B}u)(k) = Bu(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$;
3) $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ *и* $\lambda I - B$ *обратим для любого* $\lambda \in \mathbb{T}$ *и операторы* B_n *обладают равномерным экспоненциальным дискретным свойством дихотомии с данными* (M, r, P_n) *равномерно по* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3) следует из теоремы 2.3. Действительно, по формуле (2.9) из 1) получаем, что $P_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} P$ и $\|P_n\| \leqslant \mathrm{const}$. По теореме 3.4 имеем, что $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{T}} \|(\lambda I_n - B_n)^{-1}\| < \infty$, и из пункта 2) теоремы 2.3 получаем 3). Обратно, из условия 3) в силу пункта 1) теоремы 2.3 получаем, что $\lambda I_n - B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \lambda I - B$ устойчиво для всех $\lambda \in \mathbb{T}$.

Для доказательства импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) заметим, что условие 2) означает, что для всех $u(\cdot) \in l^p(\mathbb{Z}; E)$ выполняется

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|p_n u(k) - B_n p_n u(k-1) - p_n u(k) + p_n B u(k-1)\|_{E_n}^p \to 0$$

при $n \to \infty$, т. е. $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$. Предположим теперь, что $I_n - B_n$ не являются равномерно обратимыми в $l^\infty(\mathbb{Z}; E_n)$, т. е. для некоторой последовательности $\|x_n\| = 1$ имеет место $(\lambda_0 I_n - B_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ при $n \to \infty$ для некоторого $\lambda_0 = 1 \in \mathbb{T}$. Это означает, что для последовательности из константы $u_n(k) = x_n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{T}$, мы имеем, что

$$(\mathcal{D}_n u_n)(k) = u_n(k) - B_n u_n(k-1) = x_n - B_n x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$$

для всех $k \in \mathbb{N}$ и $n \to \infty$. Но $\mathcal{D}_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{D}$ устойчиво, т. е. $\|\mathcal{D}_n u_n\|_{l^\infty(\mathbb{Z};E_n)} \geqslant \gamma \|u_n\|_{l^\infty(\mathbb{Z};E_n)}$, что противоречит тому, что $(\lambda_0 I_n - B_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ при $n \to \infty$. Теперь покажем, что $\mathcal{R}(\lambda_0 I_n - B_n) = E_n$. Для любого $y_n \in E_n$, $\|y_n\| = 1$, рассмотрим $v_n(k) = y_n$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Решением уравнения $\mathcal{D}_n u_n = v_n$ является последовательность $u_n(k)$, которая стационарна, т. е. $(\lambda_0 I_n - B_n)x_n = y_n$, где $x_n = u_n(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) заметим, что $\|\mathcal{D}_n\|_{B(l^p(\mathbb{Z};E_n))} \leqslant \mathrm{const}$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь для любой $u(\cdot) \in l^p(\mathbb{Z}; E)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти $K \in \mathbb{N}$, такое что

$$\left(\sum_{k=K}^{\infty} + \sum_{k=-K}^{-\infty} \right) \|u(k)\|^p \leqslant \varepsilon.$$

В то же время

$$\sum_{k=-K}^{K} \|p_n u(k) - B_n p_n u(k-1) - p_n u(k) + p_n B u(k-1)\|_{E_n}^p \to 0$$

при $n \to \infty$, поскольку $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$. Таким образом, $\mathcal{D}_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{D}$. Сходимость $\mathcal{D}_n^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{D}^{-1}$ следует из формулы (2.6). Теорема доказана. □

3.2. Дихотомия для компактных резольвент при полудискретизации

В случае операторов с компактной резольвентой естественно рассмотреть аппроксимирующие операторы, которые сохраняют свойство компактности.

Определение 3.8. Последовательность операторов $\{B_n\}$, $B_n \colon E_n \to E_n$, $n \in \mathbb{N}$, называется компактно сходящейся к оператору $B \colon E \to E$, если $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ и выполняется следующее свойство компактности: если $\|x_n\|_{E_n} = O(1)$, то $\{B_n x_n\}$ является $\mathcal{P}$-компактной.

Определение 3.9. Область компактной сходимости резольвент $\Delta_{\mathrm{cc}} = \Delta_{\mathrm{cc}}(A_n, A)$, где $A_n \in \mathcal{C}(E_n)$ и $A \in \mathcal{C}(E)$, определяется как множество всех таких $\lambda \in \Delta_c \cap \rho(A)$, что $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}$ компактно.

Предложение 3.1. *Пусть операторы B, B_n компактны, $\mathbb{T} \subset \rho(B)$ и $\Delta_{\mathrm{cc}}(B_n, B) \neq \varnothing$. Тогда $\lambda I_n - B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} \lambda I - B$ устойчиво для всех $\lambda \in \mathbb{T}$ и $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{T}} \|(\lambda I_n - B_n)^{-1}\| < \infty$.*

Доказательство. Доказательство следует из теорем 3.2—3.4. □

Продолжим описание примера дискретизации задачи (1.2). Для этого будем рассматривать операторы $p_n^\alpha = (-A_n)^{-\alpha} p_n (-A)^\alpha \in B(E^\alpha, E_n^\alpha)$, удовлетворяющие свойству (3.1), но для пространств E^α, E_n^α. Предполагается, что для операторов A_n и A выполнено свойство (1.1), пусть также выполнены условия (A) и (B$_1$) теоремы 3.1. Мы будем говорить, что $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}^\alpha} x$, если $\|x_n - p_n^\alpha x\|_{E_n^\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$. Легко убедиться, что

$$\|x_n - p_n^\alpha x\|_{E_n^\alpha} = \|(-A_n)^\alpha x_n - p_n(-A)^\alpha x\|$$

и

$$\|p_n^\alpha x\|_{E_n^\alpha} = \|p_n(-A)^\alpha x\|_{E_n} \to \|(-A)^\alpha x\|_E = \|x\|_{E^\alpha}$$

при всех $x \in D\big((-A)^\alpha\big)$ и $n \to \infty$.

Рассмотрим в банаховых пространствах E_n^α семейство параболических задач

$$\begin{aligned} &u_n'(t) = A_n u_n(t) + f_n\big(u_n(t)\big), \quad t \geqslant 0, \\ &u_n(0) = u_n^0 \in E_n^\alpha, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $u_n^0 \xrightarrow{\mathcal{P}^\alpha} u^0$, операторы (A_n, A) согласованны, $f_n(\cdot)\colon E_n^\alpha \to E_n$ ограниченны и равномерно липшецево ограниченны равномерно по $n \in \mathbb{N}$ и непрерывно по Фреше дифференцируемы. При перечисленных условиях обобщённые решения $u_n(\cdot)$ задач (3.2) определены при всех $t \geqslant 0$ (см. [19, 44]), и мы определяем их как $u_n(\cdot) = T_n(\cdot)u_n^0\colon \mathbb{R}^+ \to E_n$. Нелинейные полугруппы $T_n(\cdot)$ удовлетворяют уравнению

$$T_n(t)u_n^0 = e^{tA_n}u_n^0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f_n(T_n(s)u_n^0)\,ds, \quad t \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Напомним, что гиперболическая стационарная точка u^* является решением уравнения $Au + f(u) = 0$, или, эквивалентно, $u^* = -A^{-1}f(u^*)$. Поскольку оператор A имеет компактную резольвенту, то оператор $A^{-1}f(\cdot)$ компактен. В случае $\Delta_{\mathrm{cc}} \neq \varnothing$ имеем, что $A_n^{-1}f_n(\cdot) \xrightarrow{\mathcal{PP}} A^{-1}f(\cdot)$ компактно. Согласно [43] уравнения $u_n = -A_n^{-1}f_n(u_n)$ имеют решения $\{u_n^*\}$, $A_n u_n^* + f_n(u_n^*) = 0$, такие что $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}} u^*$.

Рассмотрим задачи (3.2) около стационарных гиперболических точек u_n^*. В этом случае имеем

$$v_n'(t) = A_{u_n^*,n} v_n(t) + F_{u_n^*,n}\big(v_n(t)\big), \quad v_n(0) = v_n^0, \quad t \geqslant 0, \tag{3.4}$$

где

$$A_{u_n^*,n} = A_n + f_n'(u_n^*), \quad F_{u_n^*,n}\big(v_n(t)\big) = f_n(v_n(t) + u_n^*) - f_n(u_n^*) - f_n'(u_n^*)v_n(t).$$

С этого момента будем рассматривать гиперболическую стационарную точку u^* и гиперболические стационарные точки u_n^*, такие что $u_n^* \xrightarrow{\mathcal{P}^\alpha} u^*$.

Разложим E_n^α, используя проекторы

$$P_n(\sigma_n^+) := P_n(\sigma_n^+, A_{u_n^*,n}) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U(\sigma_n^+)} (\zeta I_n - A_{u_n^*,n})^{-1}\, d\zeta, \tag{3.5}$$

определённые по множествам σ_n^+, которые вложены в контур, состоящий из части $i\mathbb{R}$ и контура из условия (B_1) для операторов $A_{u_n^*,n}$.

Согласно [10, 11] в силу аналитичности C_0-полугруппы $e^{tA_{u_n^*,n}}$ и условия $\Delta_{\mathrm{cc}} \neq \varnothing$ существуют некоторые M_2, $\gamma > 0$, которые могут быть использованы для операторов $A_{u_n^*,n}$, такие что

$$\begin{cases} \|e^{tA_{u_n^*,n}} z_n\|_{E_n^\alpha} \leqslant M_2 e^{-\gamma t} \|z_n\|_{E_n^\alpha}, & t \geqslant 0, \\ \|e^{tA_{u_n^*,n}} v_n\|_{E_n^\alpha} \leqslant M_2 e^{\gamma t} \|v_n\|_{E_n^\alpha}, & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

для всех $v_n \in P_n(\sigma_n^+)E_n^\alpha$ и $z_n \in \big(I_n - P_n(\sigma_n^+)\big)E_n^\alpha$. Следует заметить, что окрестность никакой части $i\mathbb{R}$ не пересекается с $\sigma(A_{u_n^*,n})$. Более того, из того, что $\Delta_{\mathrm{cc}} \neq \varnothing$, следует компактная сходимость $P_n(\sigma_n^+) \xrightarrow{\mathcal{PP}} P(\sigma^+)$, и поэтому, как было показано в [42], $\dim P_n(\sigma_n^+) = \dim P(\sigma^+)$ для $n \geqslant n_0$. Для

$$T = T(v_n^0) = \sup\{t \geqslant 0\colon v_n(t, v_n^0) \in \mathcal{U}_{E_n^\alpha}(0;\rho)\}$$

можно рассмотреть задачи

$$\begin{gathered} v_n'(t) = A_{u_n^*,n} v_n(t) + F_{u_n^*,n}\big(v_n(t)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \big(I_n - P_n(\sigma_n^+)\big)v_n(0) = \big(I_n - P_n(\sigma_n^+)\big)v_n^0, \quad P_n(\sigma_n^+)v_n(T) = P_n(\sigma_n^+)v_n^T. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Обобщённое решение задач (3.7) даётся формулами (для $0 \leqslant t \leqslant T$)

$$\begin{aligned} v_n(t) &= e^{(t-T)A_{u_n^*,n}} P_n(\sigma_n^+) v_n^T + e^{tA_{u_n^*,n}} \big(I_n - P_n(\sigma_n^+)\big) v_n^0 + \\ &+ \int\limits_0^t e^{(t-s)A_{u_n^*,n}} \big(I_n - P_n(\sigma_n^+)\big) F_{u_n^*,n}\big(v_n(s)\big) ds + \int\limits_t^T e^{(t-s)A_{u_n^*,n}} P_n(\sigma_n^+) F_{u_n^*,n}\big(v_n(s)\big) ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Теперь мы можем сформулировать наш основной результат о равномерных по n оценках для членов дискретизационных решений (3.8).

Теорема 3.6. *Пусть A_n, A — генераторы аналитических C_0-полугрупп и выполнено условие* (B_1). *Предположим также, что полугруппы $e^{tA_{u^*}}$ гиперболические, $\sigma(A_{u^*}) \cap \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} = P\sigma(A_{u^*})$, $\dim P(\sigma+) < \infty$ и для некоторого $\rho > 0$ имеем, что $\{\lambda\colon -\rho \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \rho\} \subset \rho(A_{u^*})$, операторы $\lambda I_n - A_{u_n^*,n}$ фредгольмовы с нулевым индексом и операторы $\lambda I_n - A_{u_n^*,n}$, $\lambda I - A_{u^*}$ собственно согласованны при любом $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -\rho$. Тогда $P_n(\sigma_n^+) \xrightarrow{\mathcal{PP}} P(\sigma^+)$ компактно и*

$$\begin{cases} \big\|e^{tA_{u_n^*,n}} \big(I_n - P_n(\sigma_n^+)\big)\big\|_{E_n} \leqslant M_2 e^{-\gamma t}, & t \geqslant 0, \\ \|e^{tA_{u_n^*,n}} P_n(\sigma_n^+)\|_{E_n} \leqslant M_2 e^{\gamma t}, & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $\gamma > 0$.

Доказательство. Из условия (B_1) следует, что

$$(\lambda I_n - A_{u_n^*,n})^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A_{u^*})^{-1}$$

при $-\rho \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \rho$ для достаточно больших $|\lambda|$. Для других $-\rho \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \rho$ сходимость

$$(\lambda I_n - A_{u_n^*,n})^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A_{u^*})^{-1}$$

следует из аналога теоремы 3.3 для замкнутых операторов. Компактная сходимость $P_n(\sigma_n^+) \xrightarrow{\mathcal{PP}} P(\sigma^+)$ может быть получена тем же путём, что и в [34], а оценки (3.9) получаются как в [10,11]. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. Разумеется, теорема 3.6 имеет место для любого оператора A, который порождает аналитическую гиперболическую C_0-полугруппу с условием $\sigma(A) \cap \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} = P\sigma(A)$, $\dim P(\sigma+) < \infty$ и соответствующими условиями на аппроксимирующие операторы. Не обязательно, чтобы оператор имел вид $A + f'(u^*)$.

Теорема 3.7. *Пусть A_n, A — генераторы аналитических C_0-полугрупп и выполнено условие* (B_1). *Предположим также, что полугруппы $e^{tA_{u^*}}$ гиперболические, $\sigma(A_{u^*}) \cap \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\} = P\sigma(A_{u^*})$, $\dim P(\sigma+) < \infty$. Предположим также, что $\Delta_{\mathrm{cc}}(A_n, A) \neq \varnothing$ и резольвенты операторов A_n, A компактны. Тогда имеет место* (3.9).

Доказательство. Положим $B_n = e^{1A_{u_n^*,n}}$ и $B = e^{1A_{u^*}}$ и применим предложение 3.1. Известно [34], что условие $\Delta_{\mathrm{cc}} \neq \varnothing$ эквивалентно условию компактной сходимости $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$. Тогда выполняется условие 1) теоремы 3.5 и мы получаем дискретную дихотомию для B_n. С другой стороны, из равенства $B_n = e^{1A_{u_n^*,n}}$ по теореме 2.3 и предложению 2.1 выводим, что $\mathcal{L}_n = -d/dt + A_{u_n^*,n}$ обратимы, и поэтому по теореме 2.1 получаем оценки (3.9). Теорема доказана. □

3.3. Дихотомия для уплотняющих операторов при полудискретизации

Пусть $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ — открытое замкнутое множество, и пусть $B \in B(E)$. Для изолированной точки $\lambda \in \sigma(B)$ корневое пространство будем обозначать $\mathcal{W}(\lambda; B) = Q(\lambda)E$, где

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\lambda|=\delta} (\zeta I - B)^{-1}\, d\zeta$$

и δ достаточно мало, чтобы в диске $\{\zeta\colon |\zeta - \lambda| \leqslant \delta\}$ не было никаких других точек $\sigma(B)$, кроме точки λ. Изолированная точка $\lambda \in \sigma(B)$ называется точкой Рисса оператора B, если $\lambda I - B$ — фредгольмов оператор нулевого индекса и

$Q(\lambda)$ имеет конечный ранг. Обозначим

$$\mathcal{W}(\lambda,\delta;B_n)=\bigcup_{\substack{\lambda_n\in\sigma(B_n),\\ |\lambda_n-\lambda|<\delta}}\mathcal{W}(\lambda_n,B_n).$$

Ясно, что $\mathcal{W}(\lambda,\delta;B_n)=Q_n(\lambda)E_n$, где

$$Q_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-\lambda|=\delta}(\zeta I_n-B_n)^{-1}\,d\zeta.$$

Определение 3.10. Функция $\mu(\cdot)$ называется дискретной мерой некомпактности, если для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$, $x_n\in E_n$, имеем

$$\mu(\{x_n\})=\inf\{\varepsilon>0\colon \text{для любого } \mathbb{N}'\subseteq\mathbb{N} \text{ найдутся } \mathbb{N}''\subseteq\mathbb{N}' \text{ и } x'\in E, \\ \text{такие что } \|x_n-p_nx'\|\leqslant\varepsilon,\ n\in\mathbb{N}''\}.$$

Определение 3.11. Говорят, что операторы $B_n\in B(E_n)$ совместно уплотняют с константой $q>0$ относительно меры $\mu(\cdot)$, если для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$, $x_n\in E_n$, выполняется $\mu(\{B_nx_n\})\leqslant q\mu(\{x_n\})$.

Известно [1, с. 82], что вне замкнутого диска радиуса q с центром в нуле каждый оператор B_n имеет только изолированные точки спектра, каждая из которых является собственным значением конечной корневой кратности.

Предложение 3.2. *Пусть $B_n\xrightarrow{\mathcal{PP}}B$ для $B_n\in B(E_n)$, $B\in B(E)$ и $\mu(\{B_nx_n\})\leqslant q\mu(\{x_n\})$ для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$, $x_n\in E_n$. Предположим, что $\sigma(B)\cap\Psi=\varnothing$, где $\Psi\subset\mathbb{C}\setminus\{\lambda\colon|\lambda|\leqslant q\}$ — ограниченное замкнутое множество и $\sigma(B)\setminus\{\lambda\colon|\lambda|\leqslant q\}$ состоит только из дискретного спектра. Тогда существует константа $C>0$, такая что $\|(\lambda I_n-B_n)^{-1}\|\leqslant C$, $\lambda\in\Psi$, $n\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Любая точка $\lambda\in\Psi$ принадлежит $P\sigma(B_n)\cup\rho(B_n)$. Это означает, что для последовательности $\|x_n\|=1$, $x_n\in E_n$, возможны два случая: $(\lambda I_n-B_n)x_n=0$ или $\|(\lambda I_n-B_n)x_n\|\geqslant\gamma_{\lambda,n}\|x_n\|$ с некоторым $\gamma_{\lambda,n}>0$, $\lambda\in\Psi$. Мы покажем, что на самом деле $\|(\lambda I_n-B_n)x_n\|\geqslant\gamma_\Psi\|x_n\|$, $\lambda\in\Psi$.

Допустим, от противного, что существуют последовательности $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n\in\Psi$, $\{x_n\}$, $\|x_n\|=1$, такие что

$$(\lambda_nI_n-B_n)x_n\xrightarrow{\mathcal{P}}0 \quad\text{при}\quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда $\lambda_n\to\lambda_0\in\Psi$, $n\in\mathbb{N}'\subseteq\mathbb{N}$. Для $\tilde r=\inf\{|\xi|\colon\xi\in\Psi\}$ имеем

$$\mu(\{x_n\})\leqslant\frac{|\lambda_n|}{\tilde r}\mu(\{x_n\})\leqslant\frac{\mu(\{B_nx_n\})}{\tilde r}\leqslant\frac{q}{\tilde r}\mu(\{x_n\}).$$

Так как $q/\tilde r<1$, это означает, что $\mu(\{x_n\})=0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ является $\mathcal{P}$-компактной. Далее, $x_n\xrightarrow{\mathcal{P}}x_0$, $n\in\mathbb{N}''\subseteq\mathbb{N}'$, и $B_nx_n\xrightarrow{\mathcal{P}}Bx_0$, $\lambda_nx_n\xrightarrow{\mathcal{P}}\lambda_0x_0$, $n\in\mathbb{N}''$, т. е. $\lambda_0x_0=Bx_0$ с $\|x_0\|=1$, что противоречит нашему условию $\sigma(B)\cap\Psi=\varnothing$. Предложение доказано. □

Предложение 3.3. *Пусть* $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ *и* $\mu(\{B_n x_n\}) \leqslant q\mu(\{x_n\})$ *для любой ограниченной последовательности* $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$. *Предположим, что любая точка* $\lambda_0 \in \sigma(B)$, $|\lambda_0| > q$, *является изолированным собственным значением с конечномерным проектором* $Q(\lambda_0)$. *Тогда существуют последовательность* $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \in \sigma(B_n)$, *и последовательность проекторов* $Q_n(\lambda_0) \in B(E_n)$, *такие что* $\lambda_n \to \lambda_0$ *и* $Q_n(\lambda_0) \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q(\lambda_0)$ *сходятся компактно.*

Доказательство. Заметим, что для

$$\Gamma_r = \{\lambda\colon |\lambda - \lambda_0| = r\} \subset \mathbb{C} \setminus \{\lambda\colon |\lambda| \leqslant q\},$$

где r может быть выбрано сколь угодно малым, согласно предложению 3.2 имеем

$$(\lambda I_n - B_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - B)^{-1} \quad \text{при} \quad \lambda \in \Gamma_r, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $Q_n(\lambda_0) \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q(\lambda_0)$. Для доказательства компактной сходимости этих проекторов заметим, что

$$\mu(\{(\lambda_0 I_n - B_n)x_n\}) \geqslant |\lambda_0|\mu(\{x_n\}) - \mu(\{B_n x_n\}) \geqslant \\ \geqslant |\lambda_0|\mu(\{x_n\}) - q\mu(\{x_n\}) \geqslant \gamma\mu(\{x_n\}),$$

где $\gamma = |\lambda_0| - q > 0$. Это означает, что

$$\mu(\{(\lambda_0 I_n - B_n)^k x_n\}) \geqslant \gamma^k \mu(\{x_n\}) \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Используя равенство

$$(\lambda_0 I_n - B_n)^k Q_n(\lambda_0) x_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_r} (\lambda_0 - \lambda)^k (\lambda I_n - B_n)^{-1} x_n \, d\lambda$$

и (3.10), получаем, что

$$\gamma^k \mu(\{Q_n(\lambda_0)x_n\}) \leqslant \|(\lambda_0 I_n - B_n)^k Q_n(\lambda_0) x_n\| \leqslant \frac{C}{2\pi} r^k \|x_n\|.$$

Ясно, что из того, что $r/\gamma < 1$, следует сходимость $(r/\gamma)^k \to 0$ при $k \to \infty$. Последнее означает, что $Q_n(\lambda_0) \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q(\lambda_0)$ компактно. Предложение доказано. □

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B$_1$), *аналитическая* C_0*-полугруппа* e^{tA}, $t \in \mathbb{R}_+$, *гиперболическая, причём множество* $\sigma(A) \cap \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ *состоит из конечного числа точек* $P\sigma(A)$ *и* $\dim P(\sigma+) < \infty$. *Предположим также, что* $\mu(\{B_n x_n\}) \leqslant q\mu(\{x_n\})$ *для любой ограниченной последовательности* $\{x_n\}$, $x_n \in E_n$, *с* $q < 1$, *где* $B_n = e^{1A_n}$. *Тогда выполняются утверждения теоремы* 3.6, *т. е. оценки* (3.9), *и* $P_n(\sigma_n+) \xrightarrow{\mathcal{PP}} P(\sigma+)$ *компактно.*

Доказательство. В силу теоремы об отображении спектра спектр оператора $B = e^{1A}$, расположенный вне диска $\mathbb{T}$, состоит из конечного числа точек множества

$$P\sigma(e^{1A}) = \bigl\{\zeta\colon \zeta = e^{\lambda},\ \lambda \in P\sigma(A) \cap \{\xi\colon \operatorname{Re}\xi \geqslant 0\}\bigr\}.$$

Кроме того, поскольку $q < 1$, для любого Ψ, содержащего $\mathbb{T}$, $\Psi \subset \rho(B)$, $B = e^{1A}$, имеем $\|(\lambda I_n - B_n)^{-1}\| \leqslant \mathrm{const}$ при $\lambda \in \Psi$ в силу предложения 3.3. По теореме 3.5 получаем, что B_n обладает дискретной дихотомией. Из теоремы 2.2 следует, что оператор $\mathcal{D}_n$ обратим, и согласно предложению 2.1 и теореме 2.1 получаем, что полугруппы e^{tA_n}, $t \in \mathbb{R}_+$, обладают экспоненциальной дихотомией равномерно по индексу $n \in \mathbb{N}$, причём имеет место (2.4), т. е. выполняется (3.9). По теореме 3.3 $Q_n(\lambda_0) \xrightarrow{\mathcal{PP}} Q(\lambda_0)$ компактно, что влечёт выполнение условий теоремы 3.6. Теорема доказана. □

3.4. Дискретизация по времени и $\Delta_{cc} \neq \varnothing$

Рассмотрим дискретизацию задачи (3.4) по времени, используя схему

$$\frac{V_n(t+\tau_n) - V_n(t)}{\tau_n} = A_{u_n^*,n} V_n(t+\tau_n) + F_{u_n^*,n}\big(V_n(t)\big), \quad t = k\tau_n, \tag{3.11}$$

с начальными данными $V_n(0) = v_n^0$. Решение этой задачи даётся формулой

$$V_n(t+\tau_n) = (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-1} V_n(t) + \tau_n (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-1} F_{u_n^*,n}\big(V_n(t)\big) =$$
$$= (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k} V_n(0) + \tau_n \sum_{j=0}^{k} (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-(k-j+1)} F_{u_n^*,n}\big(V_n(j\tau_n)\big), \quad t = k\tau_n,$$

где $V_n(0) = v_n^0$.

Задача (3.7) тоже может быть дискретизирована по схеме (3.11), и мы получаем

$$\frac{V_n(t+\tau_n) - V_n(t)}{\tau_n} = A_{u_n^*,n} V_n(t+\tau_n) + F_{u_n^*,n}\big(V_n(t)\big), \quad t = k\tau_n, \tag{3.12}$$
$$(I_n - P_n) V_n(0) = (I_n - P_n) v_n^0, \quad P_n V_n(T) = P_n v_n^T.$$

Решение задачи (3.12) получается с использованием формул

$$(I_n - P_n) V_n(t+\tau_n) = (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-1} (I_n - P_n) V_n(t) +$$
$$+ \tau_n (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-1} (I_n - P_n) F_{u_n^*,n}\big(V_n(j\tau_n)\big),$$
$$(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n}) P_n V_n(t+\tau_n) = P_n V_n(t) + \tau_n P_n F_{u_n^*,n}\big(V_n(k\tau_n)\big), \quad t = k\tau_n.$$

Таким образом, решение задачи (3.12) можно записать в виде

$$V_n(t; v_n^0, v_n^T) = (I_n - P_n) V_n(t) + P_n V_n(t) =$$
$$= (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k+1} (I_n - P_n) v_n^0 +$$
$$+ \tau_n \sum_{j=0}^{k-1} (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-(k-j)} (I_n - P_n) F_{u_n^*,n}\big(V_n(j\tau_n)\big) +$$
$$+ (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{K-k} P_n v_n^T -$$
$$- \tau_n \sum_{j=k}^{K-1} (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{K-1-j} P_n F_{u_n^*,n}\big(V_n(j\tau_n)\big), \quad t = k\tau_n. \tag{3.13}$$

Выражение (3.13) показывает, что соответствующие оценки на степени операторов $(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k+1}(I_n - P_n)$, $(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{K-k}P_n$ играют основную роль при аппроксимации решений задачи (1.3) в окрестности u^*.

Теорема 3.9. *Пусть операторы A_n, A порождают аналитические C_0-полугруппы и выполнено условие* (B_1). *Предположим также, что полугруппа $e^{tA_{u^*}}$, $t \in \mathbb{R}_+$, гиперболическая и для некоторого $\rho > 0$ выполняется соотношение $\{\lambda\colon -\rho \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \rho\} \subset \rho(A)$, причём операторы $\lambda I_n - A_{u_n^*,n}$ фредгольмовы с нулевым индексом, а операторы $\lambda I_n - A_{u_n^*,n}$, $\lambda I - A_{u^*}$ собственно согласованны при любом $\operatorname{Re}\lambda \geqslant -\rho$. Тогда $P_n(\sigma+) \xrightarrow{\mathcal{PP}} P(\sigma+)$ компактно и*

$$\begin{cases} \|(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k_n} P_n\|_{E_n} \leqslant M_2 e^{-\gamma t}, & t \geqslant 0, \\ \|(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{k_n}(I_n - P_n)\|_{E_n} \leqslant M_2 e^{\gamma t}, & t \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

для некоторого $\gamma > 0$.

Доказательство. Из теоремы 3.6 следует, что C_0-полугруппы $e^{tA_{u_n^*,n}}$ обладают дихотомией равномерно по $n \in \mathbb{N}$. В то же время согласно [32] имеем

$$\|(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k_n} - e^{tA_{u_n^*,n}}\| \leqslant M\tau_n \frac{e^{\omega t}}{t},$$

где $t = k_n\tau_n = 1$. Используя теорему о возмущении при дихотомии [19, с. 254], получаем, что выполняется (3.14). Теорема доказана. □

Теорема 3.10. *Пусть $\Delta_{\mathrm{cc}}(A_n, A) \neq \varnothing$ и резольвенты операторов A_n, A компактны. Предположим также, что C_0-полугруппы $e^{tA_{u^*}}$, $t \in \mathbb{R}_+$, гиперболические и выполняется условие* (B_1). *Тогда*

$$\begin{cases} \|(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k_n} P_n\|_{E_n} \leqslant M_2 r^{[t]}, & t = k_n\tau_n \geqslant 0, \\ \|(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{k_n}(I_n - P_n)\|_{E_n} \leqslant M_2 r^{-[t]}, & -t = -k_n\tau_n \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.15}$$

где $r < 1$.

Доказательство. Компактная сходимость резольвент $(\lambda I_n - A_n)^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}}$ $\xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A)^{-1}$, согласно [11], влечёт, что $(\lambda I_n - A_{u_n^*,n})^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} (\lambda I - A_{u^*})^{-1}$ компактно. Положим $B_n = (I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k_n}$, $\tau_n k_n = 1$, и $B = e^{1A_{u^*}}$. Тогда $B_n \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$, поскольку операторы $A_{u_n^*,n}$, A_{u^*} согласованны. Заметим, что из условия (B_1) следует [17, 37], что $\|\tau_n k_n A_{u_n^*,n}(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k_n}\|_{B(E_n)} \leqslant \mathrm{const}$, откуда получаем, что $B_n = A_{u_n^*,n}^{-1}\tau_n k_n A_{u_n^*,n}(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k_n} \xrightarrow{\mathcal{PP}} B$ компактно, поскольку $A_{u_n^*,n}^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} A_{u^*}^{-1}$ компактно. Применяя предложение 3.1, получаем дискретную дихотомию для операторов B_n по теореме 3.5. Теорема доказана. □

3.5. Дискретизация по времени для уплотняющих операторов

Теорема 3.11. *Пусть выполнены условия* (A) *и* (B_1). *Предположим, что $\mu(\{B_n x_n\}) \leqslant q\mu(\{x_n\})$ для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$,*

$x_n \in E_n$, с $q < 1$ и $B_n = e^{A_{u_n^*,n}}$. Предположим также, что аналитическая C_0-полугруппа $e^{tA_{u^*}}$, $t \in \mathbb{R}_+$, гиперболическая. Тогда

$$\begin{cases} \|(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{-k_n} P_n\|_{E_n} \leqslant M_2 r^{[t]}, & t = k_n\tau_n \geqslant 0, \\ \|(I_n - \tau_n A_{u_n^*,n})^{k_n} (I_n - P_n)\|_{E_n} \leqslant M_2 r^{-[t]}, & -t = -k_n\tau_n \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

где $r < 1$.

Доказательство. Из теоремы 3.8 следует справедливость (3.6). По теореме о возмущении [19] получаем (3.16) таким же образом, как и при доказательстве теоремы 3.9. Теорема доказана. □

4. Пример

Условие $\mu(B_n x_n) \leqslant q\mu(x_n)$ с $q < 1$ в теоремах 3.8 и 3.11 может быть проверено, например, в случае компактной сходимости операторов $A_n^{-1} f_n'(u_n^*) \xrightarrow{\mathcal{PP}} A^{-1} f'(u^*)$. Мы приведём пример, когда такое условие выполняется из других соображений.

Пример. Рассмотрим в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор

$$(Av)(x) = v''(x) + av'(x) + bv(x), \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Для пространства $E = L^2(R)$ можно взять

$$(p_n v)(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} v(x+y)\,dy,$$

и основное предположение $\|p_n v\|_{L_h^2(Z)} \to \|v\|_{L^2(R)}$ выполняется [43].

Как и в [19, раздел 5.4], легко убедиться, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(-A) \subset \left\{ \lambda\colon\ \operatorname{Re}\lambda - \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2}{a^2} \geqslant -b \right\}.$$

В случае $a = 0$ имеем $\sigma(A) \in (-\infty, b)$. При $b < 0$ оператор A является самосопряжённым и отрицательным. То же самое справедливо для разностной схемы

$$A_n v_n(x) = \frac{v_n(x+h) - 2v_n(x) + v_n(x-h)}{h^2} + bv_n(x),$$

т. е. $\omega_{\mathrm{ess}}(A_n) \leqslant \omega_1 < 0$ равномерно по $h > 0$. Более того, справедливо

$$\|e^{tA_n}\| \leqslant Me^{\omega_2 t}, \quad t \geqslant 0, \quad \text{где} \quad \omega_2 < 0,$$

т. е.

$$\mu(\{e^{tA_n} x_n\}) \leqslant \gamma\mu(\{x_n\}), \quad \text{где} \quad \gamma < 1, \quad \text{для некоторого} \quad t = t_0 > 0. \tag{4.1}$$

Чтобы попасть в поле действия теоремы 3.8, обозначим $B = e^{t_0 A}$, $B_n = e^{t_0 A_n}$. Для аналитических C_0-полугрупп спектры операторов A и B связаны известным образом, то же верно и для точечных спектров $P\sigma(B) = e^{t_0 P\sigma(A)}$. Это означает, что операторы A_n имеют при почти всех n спектры $\sigma(A_n) \cap \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda > 0\}$, которые аппроксимируют спектр $\sigma(A) \cap \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.

Рассмотрим в $L^2(\mathbb{R})$ случай возмущённого оператора с гладкой функцией $b(x)$

$$\tilde{A}v(x) = v''(x) + b(x)v(x)$$

и его аппроксимацию

$$(\tilde{A}_n v_n)(x) = \frac{v_n(x+h) - 2v_n(x) + v_n(x-h)}{h^2} + b(x)v_n(x)$$

при условии $b(x) \to b$, когда $x \to \pm\infty$. Оператор $\big((\tilde{A} - A)v\big)(x) = (b(x) - b)v(x)$ является аддитивным возмущением. Мы предположим, что C_0-полугруппа $e^{t\tilde{A}}$, $t \in \mathbb{R}_+$, гиперболическая. Возмущение $\tilde{A} - A$ является относительно компактным [15]. То же имеет место и для A_n, так как $\tilde{A}_n = A_n + (\tilde{A}_n - A_n)$ и

$$e^{t_0\tilde{A}_n} = e^{t_0 A_n} + \int\limits_0^{t_0} A_n^{\alpha} e^{(t_0-s)A_n} A_n^{-\alpha}(\tilde{A}_n - A_n)e^{s\tilde{A}_n}\, ds. \tag{4.2}$$

Из неравенства (4.1) при таком возмущении следует, что

$$\mu(\{e^{t\tilde{A}_n}x_n\}) \leqslant \gamma\mu(\{x_n\}), \quad \text{где} \quad \gamma < 1, \quad \text{для некоторого} \quad t = t_0 > 0, \tag{4.3}$$

поскольку интегральная часть в (4.2) может быть оценена с произвольным $\varepsilon > 0$ как

$$\mu\Bigg(\int\limits_0^{t_0-\varepsilon} + \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0}\Bigg) \leqslant c\varepsilon^{1-\alpha}.$$

Теперь любая точка спектра $\tilde{A}$, которая расположена правее b, принадлежит $P\sigma(\tilde{A})$ и имеет конечную корневую кратность. Это же имеет место для $\tilde{A}_n$ с $B_n = e^{t\tilde{A}_n}$ в силу (4.3). Используя свойство (4.3), из теорем 3.2 и 3.3 получаем собственную согласованность операторов $\lambda I_n - \tilde{A}_n$, $\lambda I - \tilde{A}$ для любого $\lambda \in i\mathbb{R}$ и любого $\operatorname{Re}\lambda > b$.

Если, как и ранее, P — дихотомический проектор, то $\dim P < \infty$ и $P\tilde{A} = \tilde{A}P$. По предложению 3.3 получаем компактную сходимость $P_n \to P$. Это означает, что из дихотомии для $\tilde{A}$ мы получаем дихотомию для $\tilde{A}_n$ равномерно по n по теореме 3.6.

Подобная ситуация для конкретных дифференциальных операторов рассматривалась в [36].

Исследования первого автора поддержаны грантом UV-AE-09-5915. Исследования второго автора поддержаны грантом РФФИ 10-01-00297_а, грантом SFB 701 «Спектральные структуры и топологические методы в математике», Римским университетом III, Национальным институтом высшей математики им. Ф. Севери (Италия), а также грантом правительства Польши 6081/B/H03/2011/40 и Фуданьским университетом.

Литература

[1] Akhmerov R. R., Kamenskiĭ M. I., Potapov A. S., Rodkina A. E., Sadovskiĭ B. N. Measures of Noncompactness and Condensing Operators. — Basel: Birkhäuser, 1992. — (Operator Theory: Advances and Applications; Vol. 55).

[2] Appell J. Measures of noncompactness, condensing operators and fixed points: An application-oriented survey // Fixed Point Theory. — 2005. — Vol. 6, no. 2. — P. 157—229.

[3] Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. Well-Posedness of Parabolic Difference Equations. — Basel: Birkhäuser, 1994. — (Operator Theory: Advances and Applications; Vol. 69).

[4] Banas J., Goebel K. Measures of Noncompactness in Banach Spaces. — New York: Marcel Dekker, 1980. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 60).

[5] Baskakov A. G. Linear differential operators with unbounded operator coefficients, and semigroups of difference operators // Mat. Zametki. — 1996. — Vol. 59, no. 6. — P. 811—820.

[6] Baskakov A. G. On differential and difference Fredholm operators // Dokl. Math. — 2007. — Vol. 76, no. 2. — P. 669—672.

[7] Baskakov A. G., Pastukhov A. I. Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients // Sib. Mat. Zh. — 2001. — Vol. 42, no. 6. — P. 1231—1243.

[8] Baskakov A. G., Sintyaev Yu. N. Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates // J. Differ. Equ. — 2010. — Vol. 46, no. 2. — P. 214—223.

[9] Beyn W.-J. Numerical methods for dynamical systems // Advances in Numerical Analysis. Vol. I (Lancaster, 1990). — Oxford: Oxford Univ. Press, 1991. — (Oxford Sci. Publ.). — P. 175—236.

[10] Beyn W.-J., Piskarev S. Shadowing for discrete approximations of abstract parabolic equations // Discrete Contin. Dynam. Systems. Ser. B. — 2008. — Vol. 10, no. 1. — P. 19—42.

[11] Carvalho A. N., Piskarev S. A general approximation scheme for attractors of abstract parabolic problems // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2006. — Vol. 27, no. 7-8. — P. 785—829.

[12] Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — Berlin: Springer, 2000. — (Grad. Texts Math.; Vol. 194).

[13] Garay B. M. On structural stability of ordinary differential equations with respect to discretization methods // Numer. Math. — 1996. — Vol. 72, no. 4. — P. 449—479.

[14] Garay B. M., Lee K. Attractors under discretization with variable stepsize // Discrete Contin. Dynam. Systems. — 2005. — Vol. 13, no. 3. — P. 827—841.

[15] Gohberg I. C., Krein M. G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. — Providence: Amer. Math. Soc., 1969. — (Transl. Math. Monogr.; Vol. 18).

[16] Grigorieff R. D. Diskrete Approximation von Eigenwertproblemen. II. Konvergenzordnung // Numer. Math. — 1975. — Vol. 24, no. 5. — P. 415—433.

[17] Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S. Approximation of abstract differential equations // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, no. 2. — P. 3013—3054.

[18] Hale J. K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems. — Providence: Amer. Math. Soc., 1989. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 25).

[19] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. — Berlin: Springer, 1981.

[20] Kaashoek M. A., Verduyn Lunel S. M. An integrability condition on the resolvent for hyperbolicity of the semigroup // J. Differ. Equ. — 1994. — Vol. 112, no. 2. — P. 374—406.

[21] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. — Berlin: Springer, 1995. — (Classics Math.).

[22] Krasnosel'skij M. A., Zabrejko P. P. Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. — Berlin: Springer, 1984. — (Grundlehren Math. Wiss.; Vol. 263).

[23] Krein S. G. Linear Differential Equations in Banach Space. — Providence: Amer. Math. Soc., 1971. — (Transl. Math. Monogr.; Vol. 29).

[24] Larsson S. Numerical analysis of semilinear parabolic problems // The Graduate Student's Guide to Numerical Analysis '98. Lect. Notes from the 8th EPSRC Summer School in Numerical Analysis. Leicester, GB, July 5—17, 1998 / M. Ainsworth, ed. — Berlin: Springer, 1999. — (Comput. Math.; Vol. 26). — P. 83—117.

[25] Larsson S., Sanz-Serna J. M. The behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems near stationary points // SIAM J. Numer. Anal. — 1994. — Vol. 31, no. 4. — P. 1000—1018.

[26] Larsson S., Sanz-Serna J. M. A shadowing result with applications to finite element approximation of reaction-diffusion equations // Math. Comput. — 1999. — Vol. 68, no. 225. — P. 55—72.

[27] Latushkin Y., Pogan A., Schnaubelt R. Dichotomy and Fredholm properties of evolution equations // J. Operator Theory. — 2007. — Vol. 58, no. 2. — P. 387—414.

[28] Ostermann A., Palencia C. Shadowing for nonautonomous parabolic problems with applications to long-time error bounds // SIAM J. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 37, no. 5. — P. 1399—1419.

[29] Palmer K. J. A perturbation theorem for exponential dichotomies // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1987. — Vol. 106, no. 1-2. — P. 25—37.

[30] Palmer K. J. Exponential dichotomies and Fredholm operators // Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — Vol. 104, no. 1. — P. 149—156.

[31] Pilyugin S. Yu. Shadowing in Dynamical Systems. — Berlin: Springer, 1999. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1706).

[32] Piskarev S. Error estimates for approximation of semigroups of operators by Pade's fractions // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat. — 1979. — No. 4 (203). — P. 33—38.

[33] Piskarev S. On approximation of holomorphic semigroups // Tartu Riikl. Ül. Toimetised. — 1979. — No. 492. — P. 3—23.

[34] Piskarev S. Differential Equations in Banach Space and Their Approximation [in Russian]. — Moscow: Izd. Mosk. Univ., 2005.

[35] Robinson R. C. An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete. — Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall, 2004.

[36] Rottmann J. Spectral properties of mixed hyperbolic-parabolic systems: Diplomarbeit. — Univ. of Bielefeld, 2005.

[37] Sobolevskii P. E. The theory of semigroups and the stability of difference schemes // Operator Theory in Function Spaces. Proc. School, Novosibirsk, 1975. — Novosibirsk: Nauka, 1977. — P. 304—337.

[38] Sell G. R., You Y. Dynamics of Evolutionary Equations. — New York: Springer, 2002. — (Appl. Math. Sci., Vol. 143).

[39] Stuart A. Convergence and stability in the numerical approximation of dynamical systems // The State of the Art in Numerical Analysis (York, 1996). — Oxford: Oxford Univ. Press, 1997. — (Inst. Math. Appl. Conf. Ser. New Ser.; Vol. 63). — P. 145—169.

[40] Stummel F. Diskrete Konvergenz linearer Operatoren. III // Linear Operators and Approximation (Proc. Conf., Oberwolfach, 1971). — Basel: Birkhäuser, 1972. — (Internat. Ser. Numer. Math.; Vol. 20). — P. 196—216.

[41] Trotter H. Approximation of semigroups of operators // Pacific J. Math. — 1958. — Vol. 8. — P. 887—919.

[42] Vainikko G. Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. — Leipzig: Teubner, 1976. — (Teubner-Texte zur Mathematik).

[43] Vainikko G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem) // Nonlinear Anal. — 1978. — Vol. 2. — P. 647—687.

[44] Vasil'ev V. V., Piskarev S. I. Differential equations in Banach spaces. II. Theory of cosine operator functions // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, no. 2. — P. 3055—3174.

[45] Vu Q. P. On the exponential stability and dichotomy of C_0-semigroups // Studia Math. — 1999. — Vol. 132, no. 2. — P. 141—149.

[46] Vu Q. P. The spectral radius, hyperbolic operators and Lyapunov's theorem // Evolution Equations and Their Applications in Physical and Life Sciences (Bad Herrenalb, 1998). — New York: Marcel Dekker, 2001. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 215). — P. 187—194.

[47] Vu Q. P. A new proof and generalizations of Gearhart's theorem // Proc. Am. Math. Soc. — 2007. — Vol. 135, no. 7. — P. 2065—2072.