Гейзенберговы оболочки алгебр Хохшильда конечномерных алгебр Ли

Ю. П. РАЗМЫСЛОВ, Г. А. ПОГУДИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: pogudin.gleb@gmail.com

УДК 512.554.34+512.554.35

Ключевые слова: дифференцирование, алгебра разделённых степеней, универсальная обёртывающая алгебра, алгебраическая группа, алгебра Хопфа, квазиполиномы, преобразование Бореля.

Аннотация

В работе изучается алгебра Хопфа, которая ставится в соответствие каждой конечномерной алгебре Ли. Этот объект впервые построен Г. Хохшильдом. Мы доказываем несколько фактов о вложении этой алгебры в алгебру формальных степенных рядов, с помощью чего получаем аналогичные результаты для алгебр Ли. А именно, каждая алгебра Ли вкладывается в алгебру специальных дифференцирований с коэффициентами в рациональных функциях от квазиполиномов или полиномов.

Abstract

Yu. P. Razmyslov, G. A. Pogudin, The Heisenberg envelope for the Hochschild algebra of a finite-dimensional Lie algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 147—155.

We consider some kind of Hopf algebra assigned to any finite-dimensional Lie algebra. This algebra was pointed out by Hochschild. We prove several statements on its embeddings into an algebra of formal power series. In particular, we obtain similar results for Lie algebras. More precisely, a Lie algebra can be embedded into a Lie algebra of special derivations with coefficients in rational functions in (quasi)polynomials.

В данной работе пойдёт речь об одной коммутативной алгебре Хопфа, которая ставится в соответствии каждой конечномерной алгебре Ли. Этот объект впервые возник в работах Г. Хохшильда [10, 11]. Мы изучим её поведение при «типичных» вложениях в алгебру формальных степенных рядов. Это, во-первых, сделает сам объект более осязаемым. Во-вторых, позволит получить результаты, касающиеся исходной алгебры Ли (второй и третий пункты теоремы и следствие). Основная теорема этой статьи была сформулирована в докладе [4] и созвучна результату работы [8].

Итак, зафиксируем конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{L}$ над полем k. Введём на её универсальной обертывающей $U(\mathfrak{L})$ коумножение, задав его формулой

$$\Delta l \stackrel{\text{def}}{=} l \otimes 1 + 1 \otimes l$$

для $l \in \mathfrak{L}$ и продолжив по ассоциативности на всю $U(\mathfrak{L})$. Несложно получить следующую общую формулу:

$$\Delta(e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n}) = \sum_{m_i'+m_i''=m_i} C_{m_1}^{m_1'} \cdots C_{m_n}^{m_n'} e_1^{m_1'} \cdots e_n^{m_n'} \otimes e_1^{m_1''} \cdots e_n^{m_n''}.$$

Это коумножение индуцирует умножение на двойственном пространстве $U^*(\mathfrak{L})$, задаваемое формулой

$$\langle f * g; u\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle f \otimes g; \Delta u\rangle$$

(где $f, g \in U^*(\mathfrak{L})$, $u \in U(\mathfrak{L})$). Тогда $U^*(\mathfrak{L})$ становится коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей (функционалом, ставящим в соответствие каждому элементу $U(\mathfrak{L})$ его свободный член). Кроме того, она является $\mathfrak{L}$-модулем относительно действия

$$\langle l \times f; u\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle f; ul\rangle \tag{1}$$

($l \in \mathfrak{L}$, $f \in U^*(\mathfrak{L})$ и $u \in U(\mathfrak{L})$).

Заметим, что структура алгебры на $U^*(\mathfrak{L})$ не зависит от скобки Ли на пространстве $\mathfrak{L}$ и определяется только размерностью $\mathfrak{L}$. Собственно структура алгебры Ли отражается только в действии (1). Эта алгебра известна и называется пополненной алгеброй разделённых степеней $\tilde{O}_n$. При $\operatorname{char} k = 0$ она изоморфна алгебре формальных степенных рядов от n переменных $\tilde{\mathcal{E}}_n$ (см. [5, § 44]). Ниже мы приведём семейство изоморфизмов, которые мы и называли «типичными».

Определим $R(\mathfrak{L})$ как множество тех элементов $U^*(\mathfrak{L})$, орбита которых относительно действия $\mathfrak{L}$ конечномерна. Этот объект впервые введён Г. Хохшильдом в [10] (правда, он использовал несколько иное определение). Очевидно, что $R(\mathfrak{L})$ является $U(\mathfrak{L})$-подмодулем в $U^*(\mathfrak{L})$. Более того, $R(\mathfrak{L})$ — подалгебра. Действительно, если f и g из $R(\mathfrak{L})$ лежали в конечномерных подпространствах V и W соответственно, то $f * g$ попадет в $V \otimes W$.

Замечание 1. Эта конструкция на самом деле является частным случаем конечного дуала (см. [12, 9.1]), который определяется как алгебра тех функционалов, ядро которых содержит двусторонний идеал конечной коразмерности. Легко проверить, что в случае $U(\mathfrak{L})$ он действительно совпадает с $R(\mathfrak{L})$ (см. [12, L.9.1.1]).

Введём на $R(\mathfrak{L})$ коумножение, которое сделает её алгеброй Хопфа и будет индуцировать на $U(\mathfrak{L})$ стандартное умножение. Для начала заметим, следуя Ж. Диксмье [3, гл. 2.7], что для конечномерного $\mathfrak{L}$-модуля V формула

$$\theta(v, v^*)(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle u \times v; v^*\rangle$$

ставит в соответствие любой паре $v \in V$ и $v^* \in V^*$ элемент $R(\mathfrak{L})$. Более того, все элементы $R(\mathfrak{L})$ имеют такой вид (для $f \in R(\mathfrak{L})$ в качестве V можно выбрать орбиту f). Переписав формулу для действия (1) в этих обозначениях, получим

$$u \times \theta(v; v^*) = \theta(u \times v; v^*).$$

Зададим отображение
$$\delta\colon R(\mathfrak{L}) \to R(\mathfrak{L}) \otimes R(\mathfrak{L}).$$
Рассмотрим $f \in R(\mathfrak{L})$. Пусть $f = \theta(v, v^*)$ (где $v \in V$, $v^* \in V^*$). Фиксируем некоторый базис $v_1, \ldots, v_k$ в V; $v_1^*, \ldots, v_k^*$ — двойственный к нему базис. Тогда
$$\delta\bigl(\theta(v, v^*)\bigr) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \theta(v_i, v^*) \otimes \theta(v, v_i^*). \tag{2}$$

Лемма 1. *Коумножение δ корректно определено, ассоциативно и задаёт на $U(\mathfrak{L})$ стандартное умножение.*

Доказательство. Чтобы установить корректность, в данном случае необходимо проверить независимость определения от выбора представления V и выбора базиса в нём. Второе почти очевидно, так как тензор $\sum v_i \otimes v_i^*$ — тождественный оператор, а правая часть формулы (2) ведёт себя при замене базиса так же, как этот тензор. Для доказательства первого утверждения заметим, что орбита v в V изоморфна орбите f в $R(\mathfrak{L})$. Тогда можно выбрать базис $v_1, \ldots, v_k$ в V так, что $v_1 = v$ и $v_1, \ldots, v_{k'}$ — базис орбиты v (k' — размерность этой орбиты). Легко убедиться, что при таком выборе базиса отображение δ, определённое с помощью V, совпадает с δ, определённым с помощью орбиты f, а от выбора базиса δ не зависит.

Теперь докажем, что δ задаёт на $U(\mathfrak{L})$ стандартное умножение. Достаточно проверить, что $\langle f; u_1u_2\rangle = \langle \delta f; u_1 \otimes u_2\rangle$, где u_1 и u_2 — мономы из $U(\mathfrak{L})$. Действительно,
$$\langle \delta f; u_1 \otimes u_2\rangle = \Bigl\langle \sum_{i=1}^{k} \theta(e_i; v^*) \otimes \theta(v; e_i^*); u_1 \otimes u_2 \Bigr\rangle.$$
Так как
$$\langle u_1 \times e_i; v^*\rangle = \langle e_i; (-1)^{\deg u_1} u_1 \times v^*\rangle,$$
имеем, что
$$\Bigl\langle \sum_{i=1}^{k} \theta(e_i; v^*) \otimes \theta(v; e_i^*); u_1 \otimes u_2 \Bigr\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i; (-1)^{\deg u_1} u_1 \times v^*\rangle \langle u_2 \times v; e_i^*\rangle.$$
В силу двойственности базисов $e_1, \ldots, e_n$ и $e_1^*, \ldots, e_n^*$
$$\sum_{i=1}^{k} \langle e_i; -u_1 \times v^*\rangle \langle u_2 \times v; e_i^*\rangle = \langle u_2 \times v; -u_1 \times v^*\rangle = \langle u_1u_2 \times v; v^*\rangle = \langle f; u_1u_2\rangle. \quad \square$$

Замечание 2. Формула для δ и идея доказательства леммы навеяны леммой 2.7.14 из [3].

Замечание 3. Согласно теореме 9.1.3 из [12] вместе с отображениями $\varepsilon^*\bigl(\theta(v; v^*)\bigr) = \langle v; v^*\rangle \cdot 1$ (коединица) и $S^*\bigl(\theta(v; v^*)\bigr) = \theta(v^*; v)$ (антипод) δ задаёт на $R(\mathfrak{L})$ структуру алгебры Хопфа.

Пусть теперь зафиксировано конечномерное подпредставление ρ алгебры $\mathfrak{L}$ в подпространстве $V \subset R(\mathfrak{L})$. Рассмотрим подалгебру с единицей S_ρ, порождённую V и V^*. Легко убедиться, что S_ρ — подалгебра Хопфа. Структура алгебры Хопфа задаёт на $k-\operatorname{Spec}(S_\rho)$ структуру алгебраической группы (соответствующую теорию можно найти в [9, гл. 2, раздел 7.6]), касательная алгебра которой содержит $\rho(\mathfrak{L})$. Та же группа была построена в [10] по иным соображениям.

Перейдём к формулировке основной теоремы. Пусть далее $e_1, \ldots, e_n$ — базис $\mathfrak{L}$. Каждому элементу $f \in U^*(\mathfrak{L})$ соответствует формальный ряд

$$\sum \langle f; e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n} \rangle (e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n})^*.$$

Определим два отображения. Первое — преобразование Бореля

$$B\colon k[[x_1, \ldots, x_n]] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \tilde{\mathcal{E}}_n \to U^*(\mathfrak{L}),$$

$$B\left(\sum a_{m_1,\ldots,m_n} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}\right) = \sum a_{m_1,\ldots,m_n} (e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n})^*.$$

Второе определено только в случае $\operatorname{char} k = 0$ и является изоморфизмом алгебр:

$$\varphi\left(\sum a_{m_1,\ldots,m_n} (e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n})^*\right) = \sum a_{m_1,\ldots,m_n} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}.$$

Это семейство изоморфизмов мы и называли «типичным».

Теорема. *Для каждого $l \in \mathfrak{L}$ определим n «степенных рядов» $\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_n \in \tilde{O}_n$ по формуле*

$$\bar{l}_i = \sum_{m_1,\ldots,m_n} \langle e_i^*; (e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n}) \times l \rangle (e_1^{m_1} \cdots e_n^{m_n})^*.$$

1. *Отображение*
$$\rho(l) = \bar{l}_1 \partial_1 + \ldots + \bar{l}_n \partial_n \tag{3}$$
из $\mathfrak{L}$ в специальные дифференцирования алгебры $\tilde{O}_n$ — точное представление $\mathfrak{L}$. Кроме того, $\mathfrak{L}$ задаёт n-мерное распределение на $k-\operatorname{Spec}\big(R(\mathfrak{L})\big)$.
2. *Обратное преобразование Бореля B^{-1} переводит $R(\mathfrak{L})$ в степенные ряды вида*
$$\frac{p(x_1, \ldots, x_n)}{q_1(x_1) \cdots q_n(x_n)}$$
(где p и q_i — многочлены). В случае когда $\operatorname{char} k = 0$ и k алгебраически замкнуто, $\varphi\big(R(\mathfrak{L})\big)$ лежит в алгебре квазиполиномов и $\varphi(\bar{l}_i)$ выражаются через квазиполиномы рационально.
3. *Если радикал $\mathfrak{L}$ нильпотентен и $\operatorname{char} k = 0$, то в некотором базисе $\varphi(\bar{l}_i)$ — рациональные функции. Если же в $\mathfrak{L}$ можно выбрать базис из элементов, нильпотентных в любом конечномерном представлении, то в этом базисе $\varphi\big(R(\mathfrak{L})\big)$ лежит в многочленах*.*

*Аналогичный результат для нильпотентных алгебр Ли получен в [8].

Прежде чем перейти к доказательству, приведём простой, но важный, на наш взгляд, пример. Пусть $\mathfrak{L}$ — одномерная абелева алгебра Ли над $\mathbb{C}$. В этом случае образующая алгебры действует на рядах как обычная производная и алгебра $\varphi\big(R(\mathfrak{L})\big)$ совпадает с алгеброй квазиполиномов. То, что она там лежит, следует напрямую из теоремы. С другой стороны, легко проверить, что орбита любого квазиполинома конечномерна. Выпишем для этой алгебры формулы для δ:

$$\delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1, \quad \delta(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} \otimes e^{\lambda x}.$$

Тогда подалгебре многочленов соответствует группа $\mathbb{C}$ по сложению, а каждой подалгебре вида $\mathbb{C}[e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}]$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{C}^*$. Отметим, что, рассматривая эти группы отдельно, мы упускаем из виду их возможные взаимосвязи.

Заметим также, что в случае абелевой группы размерности n алгебра $\varphi\big(R(\mathfrak{L})\big)$ также будет совпадать с алгеброй квазиполиномов.

Доказательство.

1. Утверждение о том, что формула (3) задаёт вложение алгебры $\mathfrak{L}$ в дифференцирования алгебры $\tilde{O}_n$, тривиально следует из соображения, что действия, определённые формулами (3) и (1), совпадают. По теореме Хариш-Чандры (см. [2, гл. 4]) для любого элемента $U(\mathfrak{L})$ существует конечномерное представление, в котором он действует не нулём. Отсюда вытекает точность $\rho|_{R(\mathfrak{L})}$ на $U(\mathfrak{L})$.

Для доказательства факта об n-мерном распределении (из которого сразу будет следовать точность представления) мы будем пользоваться техникой, основанной на гомоморфизмах Тейлора (см. [5, § 44.3]). Суть её состоит в следующем. Пусть A — коммутативная ассоциативная алгебра над k с единицей, и пусть есть линейный функционал ψ на A-модуле V. Тогда ему соответствует гомоморфизм Тейлора — гомоморфизм A-модулей $\bar{\psi}\colon V \to A^*$. Он определяется формулой $\bar{\psi}(v)(a) = \psi(a \times v)$, где $a \in A$ и $v \in V$. В дальнейшем нам пригодится следующее соотношение:

$$\bar{\psi}(v)(1) = \psi(v). \tag{4}$$

Применим эту конструкцию для случая $A = U(\mathfrak{L})$. Если V конечномерно, образ $\bar{\psi}$ будет лежать в $R(\mathfrak{L})$.

В $k - \operatorname{Spec}\big(R(\mathfrak{L})\big)$ есть выделенный элемент

$$\varepsilon^*(f) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f; 1\rangle.$$

Докажем сначала, что $\mathfrak{L}$ задаёт в точке ε^* n-мерное распределение. Рассмотрим для $\mathfrak{L}$ точное конечномерное представление в пространстве V (оно существует согласно теоремам Адо и Ивасавы, см. [2, гл. 4]). Пусть элемент $v_1 \in V$ таков, что $e_1 \times h_1 \neq 0$. Тогда можно так заменить каждый элемент e_i (при $i > 1$) на $e_i - \alpha_i e_1$, чтобы элемент $e_1 \times h_1$ не лежал в линейной оболочке $e_2 \times h_1, \ldots e_n \times h_1$. Тогда есть функционал ψ_1 на V, такой что $\psi(e_i \times h_1) = \delta_i^1$. Аналогичным образом строим ψ_i и h_i, причём на i-м шаге меняем e_j только при $j > i$. Таким образом мы получим такой набор ψ_i и h_i, что матрица $\big(\psi_i(e_j \times h_i)\big)$ будет треугольной с единицами на диагонали. Теперь положим

$$W = \underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{n \text{ штук}}, \quad \psi = \psi_1 \oplus \cdots \psi_n, \quad f_i = \underbrace{0 \oplus \ldots h_i \oplus 0}_{\text{не } 0 \text{ на } i\text{-м месте}}. \tag{5}$$

Тогда $\det\big(\psi(e_i \times f_j)\big) \neq 0$, поэтому $\det\Big(\varepsilon^*\big(e_i \times \bar{\psi}(h_j)\big)\Big) \neq 0$ в силу (4). Это означает, что в точке ε^* задано n-мерное распределение.

Замечание 4. Заметим, что теорема Адо, помимо точности, гарантирует нам, что ниль-радикал алгебры $\mathfrak{L}$ в представлении V (а значит, и в W и в $\bar{\psi}(W)$) нильпотентен.

Пусть теперь задан произвольный элемент $\lambda \in k - \operatorname{Spec}\big(R(\mathfrak{L})\big)$. Обозначим

$$\lambda^{-1} \overset{\text{def}}{=} \lambda \circ S^*.$$

Это тоже элемент $k - \operatorname{Spec}\big(R(\mathfrak{L})\big)$, причём легко проверить, что $\lambda \otimes \lambda^{-1} \circ \delta = \varepsilon^*$. Модифицируем $\bar{\psi}(f_i)$, определённые выше:

$$f_i' \overset{\text{def}}{=} (\lambda^{-1} \otimes 1 \circ \delta)\overline{\psi}(f_i).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\det\big(\lambda(e_i \times f_j')\big) &= \det\Big(\Big(\big(\lambda^{-1} \otimes (\lambda \circ e_i \times)\big) \circ \delta\Big)\bar{\psi}(f_j)\Big) = \\ &= \det\Big(\big((\lambda^{-1} \otimes \lambda) \circ \delta\big)\bar{\psi}(e_i \times f_j)\Big) = \det\Big(\varepsilon^*\big(e_i \times \bar{\psi}(h_j)\big)\Big) \neq 0.\end{aligned}$$

Замечание 5. Как было замечено выше, структура алгебры Хопфа на $R(\mathfrak{L})$ задаёт на $k - \operatorname{Spec}\big(R(\mathfrak{L})\big)$ структуру алгебраической группы, причём эта группа действует на $R(\mathfrak{L})$ (для $\lambda \in k - \operatorname{Spec}\big(R(\mathfrak{L})\big)$ это действие задаётся как $(\lambda \otimes 1) \circ \delta$). По сути, во второй части доказательства мы такими сдвигами переносим полученное распределение из единицы группы (т. е. ε^*) в любую другую точку.

2. Рассмотрим $f \in R(\mathfrak{L})$. Достаточно показать, что для каждого i существует $q_i(x_i)$, такой что $q_i(x_i)B^{-1}(f)$ — многочлен от x_i. Пусть F — конечномерный подмодуль $R(\mathfrak{L})$, содержащий f. Тогда оператор $e_i \times$ имеет на нём характеристический многочлен

$$a_m t^m + \ldots + a_0,$$

где $a_m \neq 0$. А это значит, что

$$\langle f; u_1(a_m e_i^m + \ldots + a_0)u_2 \rangle = 0$$

для любых $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{L})$. Положим теперь

$$q_i(x_i) = a_0 x_i^m + \ldots + a_m.$$

Тогда

$$q_i(x_i)B^{-1}(f) = q_i(x_i) \sum_{k_1,\ldots,k_n} \langle f; e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n} \rangle x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

Теперь сгруппируем слагаемые при одних и тех же мономах. Те мономы, куда x_i входит в степени, не меньшей m, сократятся, так как коэффициент при них будет иметь вид

$$\langle f; e_1^{k_1} \cdots e_{i-1}^{k_{i-1}}(a_m e_i^m + \cdots + a_0) \cdots e_n^{k_n} \rangle = 0.$$

Если теперь основное поле имеет характеристику 0 и алгебраически замкнуто, то $q_1(x_1) \cdots q_n(x_n)$ раскладывается на линейные множители, а соответствующая рациональная функция — на простейшие дроби. Тогда утверждение о попадании $R(\mathfrak{L})$ в квазиполиномы следует из того, что преобразование Бореля переводит многочлены в многочлены и из соотношения

$$B\left(\frac{1}{(1-x)^k}\right) = e^x r(x),$$

где $r(x)$ — многочлен степени $k-1$.

Замечание 6. Заметим, что корни многочленов $q_i(x_i)$ (а значит, и показатели экспонент) отнюдь не всегда могут принимать произвольные значения. Они все являются собственными числами оператора, соответствующего e_i. Эти значения в свою очередь в полупростой алгебре Ли определяются весами представлений. Отсюда, в частности, следует конечнопорождённость $R(\mathfrak{L})$ в случае полупростоты $\mathfrak{L}$.

Утверждение о том, что $\varphi(\bar{l}_i)$ рационально выражаются через квазиполиномы, следует из того, что $\mathfrak{L}$ задаёт на $\operatorname{Spec}\bigl(R(\mathfrak{L})\bigr)$ n-мерное распределение. Действительно, это означает, что найдутся такие ряды $f_1, \ldots, f_n$ из $\varphi\bigl(R(\mathfrak{L})\bigr)$, что $\det|e_i \times f_j|$ имеет ненулевой свободный член, а значит, обратим в кольце степенных рядов. Но тогда обратим в кольце степенных рядов (и является квазиполиномом) определитель матрицы $(\delta_{x_j} f_i)_{i,j}$, так как матрица $(e_i \times f_j)$ есть произведение этой на матрицу из коэффициентов $\overline{(e_i)}_j$. Для любого $l \in \mathfrak{L}$ ряды $\bar{l}_i$ находятся из решения системы линейных уравнений с матрицей $(\delta_{x_j} f_i)$ и правой частью $l \times f_i$. Все коэффициенты и правая часть — квазимногочлены, определитель обратим в кольце степенных рядов, а значит, $\bar{l}_i$ действительно выражаются через квазимногочлены рационально.

Лемма 2. *Пусть в $\mathfrak{L}$ базис выбран так, что его элементы действуют в подпредставлении $V \subset R(\mathfrak{L})$ нильпотентно. Тогда в этом базисе $\varphi(V)$ лежит в многочленах.*

Доказательство. Пусть N таково, что при ограничении на V e_i^N действует как 0 при всех i. Тогда, очевидно, коэффициент при $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ обращается в 0, если хотя бы одно m_i больше N. □

3. Рассмотрим разложение Леви—Мальцева алгебры $\mathfrak{L}$ (см. [2]). В полупростой подалгебре можно выбрать базис, элементы которого будут нильпотентными операторами в любом конечномерном представлении. Осталось дополнить

этот базис до базиса алгебры, выбрав оставшиеся элементы из радикала. Тогда согласно замечанию 4 элементы этого базиса будут нильпотентными операторами в представлении W. По лемме 2 $f_1, \ldots, f_n$ из предыдущего пункта — многочлены. Теперь то, что $\bar{l}_i$ — рациональные функции, получается дословным повторением рассуждения из предыдущего пункта.

Если же в $\mathfrak{L}$ можно выбрать базис, как в формулировке теоремы, то по лемме 2 $\varphi\big(R(\mathfrak{L})\big)$ лежит в многочленах. □

Следствие. Для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{L}$ над полем характеристики 0 существует её вложение π в алгебру специальных дифференцирований алгебры формальных степенных рядов, такое что

$$\pi(l) = \bar{l}_1\partial_{x_1} + \ldots + \bar{l}_n\partial_{x_n},$$

где $\bar{l}_i$ — рациональные функции.

Доказательство. По теореме Адо любая конечномерная алгебра Ли может быть вложена в $\mathrm{gl}(m)$. Теперь заметим, что $\mathrm{gl}(m)$ вкладывается в $\mathrm{sl}(m+1)$: добавляем ещё одну координату и к каждой $(m \times m)$-матрице приписываем нули, а в углу пишем минус след. Алгебра $\mathrm{sl}(m+1)$ проста, т. е. имеет базис из абсолютно нильпотентных элементов (действительно, достаточно выбрать такой базис в каждой sl_2-тройке (e_+, e_-, h); можно взять e_+, e_- и $h+e_- - e_+$). Осталось воспользоваться пунктом 3 теоремы. □

Заметим, что следствие — утверждение типа гипотезы Гельфанда—Кириллова (см. [1]).

Литература

[1] Гельфанд И. М., Кириллов А. А. О телах, связанных с обёртывающими алгебрами Ли // ДАН СССР. — 1966. — Т. 167, № 3. — С. 503—506.

[2] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[3] Диксмье Ж. Универсальные обёртывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.

[4] Панкратьев Е. В., Размыслов Ю. П. Гейзенберговы оболочки вейле-уоттоновских подалгебр. Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвящённой 250-летию Московского ун-та. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2004.

[5] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[6] Размыслов Ю. П. Введение в теорию алгебр и их представлений. — Изд-во Моск. ун-та, 1991.

[7] Размыслов Ю. П. Парадигма макс-фактора. Тезисы докладов Международной алгебраической конференции, посвящённой 250-летию Московского ун-та. — М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 2004.

[8] Размыслов Ю. П., Погудин Г. А. Парадигма макс-фактора и конечномерные представления алгебр Ли.

[9] Хамфри Дж. Линейные алгебраические группы. — М.: Наука, 1980.

[10] Hochschild G. Algebraic Lie algebras and representative functions // Illinois J. Math. — 1959. — Vol. 3, no. 4. — P. 499—523.

[11] Hochschild G. Algebraic groups and Hopf algebras // Illinois J. Math. — 1970. — Vol. 14, no. 1. — P. 52—65.

[12] Montgomery S. Hopf Algebras and Their Actions on Rings. — Providence: Amer. Math. Soc., 1993. — (Regional Conf. Ser. Math.; Vol. 82).