Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп

М. А. РОЙЗНЕР
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mroizner@gmail.com

УДК 512.541.6+510.67

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, эквивалентность в логике второго порядка, абелевы p-группы, группы автоморфизмов.

Аннотация

Рассмотрим редуцированные абелевы p-группы ($p \geqslant 3$) A_1 и A_2. Мы доказываем, что группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A_1$ и $\operatorname{Aut} A_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда группы A_1 и A_2 эквивалентны в логике второго порядка, ограниченной мощностями базисных подгрупп групп A_1 и A_2.

Abstract

M. A. Roizner, A criterion of elementary equivalence of automorphism groups of reduced Abelian p-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 157—163.

Consider reduced Abelian p-groups ($p \geqslant 3$) A_1 and A_2. In this paper, we prove that the automorphism groups $\operatorname{Aut} A_1$ and $\operatorname{Aut} A_2$ are elementary equivalent if and only if the groups A_1 and A_2 are equivalent in second-order logic bounded by the cardinalities of the basic subgroups of A_1 and A_2.

1. Введение

В данной работе рассматриваются элементарные свойства (т. е. свойства, выразимые в языке первого порядка) групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп.

Впервые вопросы связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были рассмотрены в 1961 г. А. И. Мальцевым в [9]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ ($G = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$, $n, m \geqslant 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Эта теория получила продолжение в 1992 году, когда с помощью конструкции ультрапроизведения и теоремы об изоморфизме [7] К. И. Бейдар и А. В. Михалёв в [11] нашли общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева для случая, когда K и L являются телами и ассоциативными кольцами.

Продолжением исследований в этой области явились работы Е. И. Буниной 1998—2001 гг. [1—3], в которых результаты А. И. Мальцева были распространены на унитарные линейные группы над телами и ассоциативными кольцами с инволюцией, а также на группы Шевалле над полями.

В 2000 г. В. Толстых в [15] рассмотрел связь свойств второго порядка тел и свойств первого порядка групп автоморфизмов бесконечномерных пространств над этими телами. В 2003 г. Е. И. Буниной и А. В. Михалёвым [4] была рассмотрена связь свойств второго порядка ассоциативных колец и свойств первого порядка категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств модулей бесконечного ранга над этими кольцами.

В [5] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв установили связь между свойствами второго порядка абелевой p-группы и свойствами первого порядка её кольца эндоморфизмов.

Данная работа является продолжением работ [6, 13] об элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых p-групп. В данной работе мы получаем критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов для случая, когда группы редуцированные. Именно, мы устанавливаем связь между свойствами первого порядка группы автоморфизмов редуцированной абелевой p-группы ($p \geqslant 3$) и свойствами второго порядка самой группы, ограниченными мощностью её базисной подгруппы. Данный результат является усилением результата работы [13].

2. Предварительные сведения

Будем говорить, что элемент a группы A *делится* на натуральное число n (обозначение $n \mid a$), если уравнение $nx = a$ ($a \in A$) имеет решение в группе A. Группа D называется *делимой*, если $n \mid a$ для всех $a \in D$ и всех натуральных чисел n. Группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ служат примерами делимых групп. Группа A называется *редуцированной*, если она не имеет ненулевых делимых подгрупп.

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ nG = G \cap nA.$$

Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) подгруппа B — прямая сумма циклических p-групп и бесконечных циклических групп;
2) B — сервантная подгруппа группы A;
3) фактор-группа A/B — p-делимая группа.

Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы [10].

Нам в дальнейшем будут важны p-группы и их p-базисные подгруппы. Если A — p-группа и q — простое число, отличное от p, то группа A имеет лишь одну q-базисную подгруппу, равную 0. Поэтому в случае p-групп мы будем называть p-базисные подгруппы просто *базисными*.

Нам понадобятся следующие факты о базисных подгруппах.

Теорема 1 [14]. *Подгруппа*

$$B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n,$$

где B_n — прямая сумма групп $\mathbb{Z}_{p^n}$, служит базисной подгруппой для p-группы A тогда и только тогда, когда при любом целом $n > 0$ подгруппа $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ является максимальным p^n-ограниченным прямым слагаемым группы A.

Теорема 2 (Л. Я. Куликов [8]). *Если B — базисная подгруппа редуцированной p-группы A, то*

$$|A| \leqslant |B|^{\omega}.$$

Теорема 3 [10]. *Если два эндоморфизма редуцированной абелевой группы совпадают на некоторой её базисной подгруппе, то они равны.*

Теорема 4 [12]. *Если на абелевой группе A определена p-адическая топология, то p-базисная подгруппа B плотна в A в этой топологии.*

Бесконечная система $L = \{a_i\}_{i \in I}$ элементов группы A называется *независимой*, если в L всякая конечная подсистема независима. Независимая система M элементов группы A называется *максимальной*, если в A не существует независимой системы, строго содержащей M. *Рангом* $\mathrm{r}(A)$ группы A называется мощность её максимальной независимой системы, содержащей только элементы бесконечного порядка или порядка, равного степени простого числа. *Финальным рангом* базисной подгруппы B p-группы A называется минимум кардинальных чисел $\mathrm{r}(p^n B)$.

Ранее были получены следующие результаты об элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых p-групп.

Теорема 5 (Е. И. Бунина, М. А. Ройзнер [6]). *Пусть A, A' — p-группы, $p \geqslant 3$. Если $\mathrm{Aut}\, A \equiv \mathrm{Aut}\, A$, то группы A и A' обладают эквивалентными в логике второго порядка базисными подгруппами и делимыми частями.*

Теорема 6 (М. А. Ройзнер [13]). *Пусть A и A' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Пусть μ_{fin} и μ'_{fin} — финальные ранги групп B и B' соответственно. Тогда если $\mathrm{Aut}\, A \equiv$ $\equiv \mathrm{Aut}\, A'$, то $\mathrm{Th}_2^{\mu_{\mathrm{fin}}}(A) = \mathrm{Th}_2^{\mu'_{\mathrm{fin}}}(A')$.*

3. Интерпретация ограниченной логики второго порядка

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть A и A' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Тогда если $\operatorname{Aut} A \equiv \operatorname{Aut} A'$, то* $\mathrm{Th}_2^{|B|}(A) = \mathrm{Th}_2^{|B'|}(A')$.

Рассмотрим абелеву p-группу A. Пусть B — её базисная подгруппа мощности $\mu_B = |B|$. Мы хотим выразить теорию второго порядка группы A, ограниченную мощностью μ_B, с помощью теории первого порядка группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$. Согласно теореме 5 в этой теории первого порядка выражается полная теория второго порядка группы B. Если группа A ограниченна, то она совпадает со своей базисной подгруппой, и в этом случае теорема доказана. Поэтому далее мы будем считать, что группа A является неограниченной. По теореме 6 можно выразить теорию второго порядка группы A, ограниченную финальным рангом μ_{fin} базисной подгруппы B. Далее мы будем выражать формулы теории $\mathrm{Th}_2^{\mu_B}(A)$ через формулы теорий $\mathrm{Th}_2(B)$ и $\mathrm{Th}_2^{\mu_{\mathrm{fin}}}(A)$. Заметим также, что выражение формул теории $\mathrm{Th}_2(B)$ и формул теории $\mathrm{Th}_2^{\mu_{\mathrm{fin}}}(A)$ может быть согласованно, т. е. существует формула, показывающая, когда в формулах этих теорий выражается один и тот же элемент $b \in B$.

Чтобы выразить теорию второго порядка группы A, ограниченную мощностью μ_B, необходимо уметь выражать произвольную «последовательность» мощности не больше μ_B элементов $g_1, g_2, \dots$ группы A. Для этого разобьём элементы группы B на μ_B классов счётной мощности. На каждом классе независимо будет выражаться один элемент из $g_1, g_2, \dots$ (или не выражаться ни один элемент). Разбиение элементов на классы можно осуществить одним отображением $\tilde{f}$ на множестве B: два элемента b_1 и b_2 лежат в одном классе, если $\tilde{f}(b_1) = \tilde{f}(b_2)$. Условия, что всего таких классов μ_B и что каждый класс счётен, легко записываются в логике второго порядка. Также на каждом классе можно выделить унарную операцию «следующий за» с помощью отображения S. Это операция позволит отождествить каждый класс с множеством натуральных чисел. Обозначим необходимые условия на отображения $\tilde{f}$ и S через $\mathrm{Correct}(\tilde{f}, S)$.

Рассмотрим класс B_k элементов группы B и элемент g_k, который мы хотим выразить на этом классе. По теореме 4 для элемента g_k существует сходящаяся к нему в p-адической топологии последовательность элементов $b_1, b_2, \dots$ базисной подгруппы B. Такую последовательность можно задать отображением f_k из счётного класса B_k в элементы $b_1, b_2, \dots$. На такую последовательность надо наложить условие сходимости к элементу g_k в p-адической топологии. Мы наложим более сильное условие

$$\mathrm{Converges}(f_k, g_k) := \forall\, i \in B_k\ h(g_k - b_{i+1}) > h(g_k - b_i),$$

где часть $h(g_k - b_{i+1}) > h(g_k - b_i)$ означает, что элемент $h(g_k - b_{i+1})$ имеет бо́льшую p-высоту, чем элемент $h(g_k - b_i)$. Эта часть выражается следующим образом. Свойство некоторого элемента a иметь p-высоту, не меньшую n, равносильно тому, что существует последовательность элементов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ с условиями $a_0 = a$, $pa_i = a_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$. С помощью этого свойства легко записать в логике второго порядка условие, что один элемент имеет бо́льшую p-высоту, чем другой элемент.

Из отображений f_k можно составить частичное отображение $f = \bigcup\limits_{k \in \mu_B} f_k$, кодирующее всю «последовательность» элементов $g_1, g_2, \ldots$. Все такие частичные отображения выделяются условием, что на каждом классе k они либо выражают какой-то элемент $g \in A$, либо пусты:

$$\mathrm{Seq}(f) := \forall\, k\ \Big(\big(\forall\, b \in B_k\ \forall\, g\ \neg f(b,g) \big) \vee \exists\, g\ \big(\mathrm{Converges}(f_k, g) \big) \Big).$$

Два таких отображения будем считать одинаковыми, если они кодируют одни и те же элементы на всех классах B_k:

$$f = f' := \forall\, k\ \forall\, g_k\ \big(\mathrm{Converges}(f_k, g_k) \Leftrightarrow \mathrm{Converges}(f'_k, g_k) \big).$$

Оставшаяся часть доказательства теоремы, а именно интерпретация логики второго порядка, проходит по обычной схеме, представленной в [6]. Предложение ϕ переводится в предложение

$$\exists\, \tilde{f}\ \exists\, S\ \mathrm{Correct}(\tilde{f}, S) \wedge \phi',$$

где формула ϕ' получается из предложения ϕ по следующим правилам:

1) подформула $\forall\, P_m(x_1, \ldots, x_m)\ (\ldots)$ заменяется на подформулу
$$\forall\, f_1^P \ldots \forall\, f_m^P\ \big(\mathrm{Seq}(f_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Seq}(f_m) \Rightarrow (\ldots) \big);$$

2) подформула $\exists\, P_m(x_1, \ldots, x_m)\ (\ldots)$ заменяется на подформулу
$$\exists\, f_1^P \ldots \exists\, f_m^P\ \big(\mathrm{Seq}(f_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Seq}(f_m) \wedge (\ldots) \big);$$

3) подформула $P_m(g_1, \ldots, g_m)$ заменяется на подформулу
$$\exists\, k\ \Big(\mathrm{Converges}\big((f_1^P)_k, g_1 \big) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Converges}\big((f_m^P)_k, g_m \big) \Big).$$

Полученное предложение переводится на язык первого порядка группы автоморфизмов по уже известному алгоритму. В результате получается предложение, выполняющееся тогда и только тогда, когда исходное предложение ϕ выполняется в логике второго порядка группы A, ограниченной мощностью μ_B. Теорема доказана.

4. Критерий элементарной эквивалентности

Докажем обратную теорему.

Теорема 8. *Пусть A и A' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно. Тогда если $\mathrm{Th}_2^{|B|}(A) = \mathrm{Th}_2^{|B'|}(A')$, то $\mathrm{Aut}\, A \equiv \mathrm{Aut}\, A'$.*

Выразим теорию первого порядка группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$ в ограниченном языке второго порядка группы A. Очевидно, эта теория выражается в полном языке второго порядка группы A (каждый автоморфизм естественным образом задаётся бинарным отношением на A). Но согласно теореме 3 каждый автоморфизм однозначно задаётся своим ограничением на базисной подгруппе B, которое уже в свою очередь имеет мощность $|B|$, а значит, выражается в языке, ограниченным этой мощностью. Саму базисную подгруппу B группы A несложно выделить в этом языке с помощью теоремы 1. Теорема 8 доказана.

Таким образом, совмещая результаты теорем 7 и 8, получаем критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп.

Теорема 9. *Пусть A и A' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Тогда*

$$\operatorname{Aut} A \equiv \operatorname{Aut} A' \iff \mathrm{Th}_2^{|B|}(A) = \mathrm{Th}_2^{|B'|}(A').$$

Заметим, что если базисная подгруппа B имеет мощность не меньшую, чем мощность континуума, то согласно теореме 2 группа A равномощна подгруппе B. В этом случае теория второго порядка группы A, ограниченная мощностью $|B|$, совпадает с полной теорией второго порядка группы A. Получаем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть A и A' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Пусть $|B|, |B'| \geqslant 2^\omega$. Тогда*

$$\operatorname{Aut} A \equiv \operatorname{Aut} A' \iff A \equiv_2 A'.$$

Литература

[1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.

[2] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265—1278.

[3] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 157—158.

[4] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 51—134.

[5] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 135—224.

[6] Бунина Е. И., Ройзнер М. А. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 81—112.

[7] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[8] Куликов Л. Я. Обобщённые примарные группы. I, II // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 247—326; 1953. — Т. 2. — С. 85—167.

[9] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — 1961. — С. 110—132.

[10] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974.

[11] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 29—35.

[12] Kaloujnine L. Sur les groupes abéliens primaires sans éléments de hauteur infinie // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1947. — Vol. 225. — P. 713—715.

[13] Roizner M. A. Elementary equivalence of the automorphism groups of reduced Abelian p-groups. — 2007. — arXiv:math.GR/1207.1951v1.

[14] Szele T. On the basic subgroups of Abelian p-groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1954. — Vol. 5. — P. 129—141; Math. Soc. — 1953. — Vol. 28. — P. 247—250.

[15] Tolstykh V. Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups // Ann. Pure Appl. Logic. — 2000. — Vol. 105. — P. 103—156.