Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами

П. П. СЕМЁНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: pamenov@yandex.ru

УДК 512.55+512.64

Ключевые слова: упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных обратимых матриц, эндоморфизмы.

Аннотация

Пусть R — линейно упорядоченное коммутативное кольцо с $1/2$, $G_n(R)$ — подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами. В работе описаны эндоморфизмы данной полугруппы при $n \geqslant 3$.

Abstract

P. P. Semenov, Endomorphisms of semigroups of invertible nonnegative matrices over ordered rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 165—178.

Let R be a linearly ordered commutative ring with $1/2$ and $G_n(R)$ be the subsemigroup of $\mathrm{GL}_n(R)$ consisting of matrices with nonnegative elements. In the paper, we describe endomorphisms of this semigroup for $n \geqslant 3$.

Введение

Пусть R — упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ — подполугруппа в $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами.

В [6] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geqslant 2$. В [3] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geqslant 3$. В [2] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти полугруппы были элементарно эквивалентны. В [4] Е. И. Бунина и П. П. Семёнов описали автоморфизмы полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка больше двух над коммутативными частично упорядоченными кольцами с обратимой двойкой, а в [5] нашли необходимые и достаточные условия их элементарной эквивалентности. В [1]

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 165—178.

Е. И. Бунина описала автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ при условии, что R — частично упорядоченное коммутативное кольцо с обратимой двойкой, порождаемое своими обратимыми элементами. Во всех работах [1—5] было существенно, что в кольце R обратима двойка или хотя бы какое-то целое число. В [7] автор описал автоморфизмы полугруппы неотрицательных матриц над кольцом целых чисел.

Менее привычным вопросом является вопрос описания всех эндоморфизмов данной полугруппы. В [8] автором были описаны эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным полем. В данной работе мы отказываемся от обратимости всех элементов, кроме 2, т. е. описываем все эндоморфизмы полугруппы неотрицательных матриц над линейно упорядоченным кольцом с $1/2$ (при $n > 2$). Основной результат доказанной теоремы состоит в том, что при достаточно большом образе эндоморфизм является стандартным, как и в случае автоморфизмов.

1. Основные определения и обозначения

Определение 1. Кольцо R называется *линейно упорядоченным*, если на нём задано отношение порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\forall\, x, y \in R\ (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$;
2) $\forall\, x, y, z \in R\ (x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z)$;
3) $\forall\, x, y \in R\ (0 \leqslant x \wedge 0 \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant xy)$.

Определение 2. Пусть R — упорядоченное кольцо. Через $G_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Определение 3. Пусть $I = I_n$, $\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых матриц из $G_n(F)$, S_n — симметрическая группа порядка n, S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_n$ (т. е. матрица $(\delta_{i\sigma(j)})$, где $\delta_{i\sigma(j)}$ — символ Кронекера), $\mathrm{S}_n = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$. Через N_S будем обозначать нетривиальную нормальную подгруппу в S_n.

Пусть $\mathrm{diag}[d_1, \ldots, d_n]$ — диагональная матрица с элементами $d_1, \ldots, d_n$ на диагонали, $d_1, \ldots, d_n \in R_+^*$. Через $D_n(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_n(R)$, через N_D — подгруппу в группе $D_n(R)$.

Пусть $E_{i,j}$ — матричная единица.

Определение 4. Через $B_{i,j}(x)$ обозначим матрицу $I + xE_{i,j}$, $B_{i,j}$ обозначает $B_{i,j}(1)$. Пусть $\mathbf{P}$ — подполугруппа в $G_n(R)$, порождённая всеми матрицами S_σ $(\sigma \in \Sigma_n)$, $B_{i,j}(x)$ $(x \in R_+,\ i \neq j)$ и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in D_n(R)$.

Определение 5. Две матрицы $A, B \in G_n(R)$ называются *$\mathcal{P}$-эквивалентными* (см. [6]), если существуют матрицы $A_j \in G_n(R)$, $j = 0, \ldots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$, такие что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Определение 6. Через $GE_n^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_n(R)$, порождённую всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$. В отличие от [8], в нашем случае полугруппа $GE_n^+(R)$ не обязана совпадать с полугруппой $G_n(R)$.

Определение 7. Если G — некоторая полугруппа (например, $G = R_+^*$, $G_n(R)$, $GE_n^+(R)$), то гомоморфизм $\lambda(\cdot)\colon G \to G$ называется *центральным гомоморфизмом* G, если $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega(\cdot)\colon G \to G$, такое что для всех $X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где $\lambda(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Например, если $R = \mathbb{R}$ (поле действительных чисел), то гомоморфизм $\lambda(\cdot)\colon G_n(\mathbb{R}) \to G_n(\mathbb{R})$, такой что $\lambda(A) = |\det A| \cdot I$ для всех $A \in G_n(\mathbb{R})$, является центральным гомоморфизмом, а отображение $\Omega(\cdot)\colon G_n(\mathbb{R}) \to G_n(\mathbb{R})$, такое что $\Omega(A) = |\det A| \cdot A$ для всех $A \in G_n(\mathbb{R})$, является центральной гомотетией. Заметим, что центральная гомотетия $\Omega(\cdot)$ всегда является эндоморфизмом полугруппы G: для всех $X, Y \in G$

$$\Omega(X)\Omega(Y) = \lambda(X)X \cdot \lambda(Y)Y = \lambda(X)\lambda(Y)X \cdot Y = \lambda(XY)XY = \Omega(XY).$$

Для каждой матрицы $M \in \Gamma_n(R)$ пусть Φ_M обозначает такой автоморфизм полугруппы $G_n(R)$, что $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$ для всех $X \in G_n(R)$.

Для каждого $y(\cdot) \in \mathrm{End}(R_+)$ через Φ^y обозначим такой эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, что $\Phi^y(X) = \Phi^y\big((x_{ij})\big) = \big(y(x_{ij})\big)$ для всех $X = (x_{ij}) \in G_n(R)$.

2. Нормальные подгруппы

Лемма 1. *$\Gamma_n(R) = D_n(R) \cdot \mathrm{S}_n$, т. е. группа $\Gamma_n(R)$ состоит из всех мономиальных матриц.*

Доказательство. Очевидно, что любая мономиальная матрица обратима, т. е. $D_n(R)\mathrm{S}_n \subset \Gamma_n(R)$.

Теперь рассмотрим некоторую матрицу $A = (a_{ij}) \in \Gamma_n(R)$. Требуется показать, что в каждой её строке (столбце) содержится ровно один ненулевой элемент. Предположим, что это не так и i-я строка матрицы A содержит по крайней мере два ненулевых (т. е. положительных) элемента: $a_{i,k}$ и $a_{i,j}$. Рассмотрим обратную матрицу $B = (b_{l,m})$. Её k-я строка ненулевая, поэтому найдётся такое l, что $b_{k,l} > 0$. Значит,

$$\delta_{il} = a_{i,1}b_{1,l} + \ldots + a_{i,n}b_{n,l} \geqslant a_{i,k}b_{k,l} > 0,$$

и поэтому $i = l$.

Аналогично найдётся такое m, что $b_{j,m} > 0$, т. е. $i = m$. Таким образом, $l = m = i$. Значит, $b_{j,i} > 0$, $b_{k,i} > 0$.

Из условия $I = BA$ вытекает, что

$$\delta_{j,k} = b_{j,1}a_{1,k} + \ldots + b_{j,n}a_{n,k} \geqslant b_{j,i}a_{i,k} > 0.$$

Следовательно, $j = k$, что противоречит предположению о том, что i-я строка содержит два ненулевых элемента. $\square$

Заметим, что представление матрицы $A \in \Gamma_n(R)$ в виде $A = DS_\sigma$, $D \in \in D_n(R)$, $\sigma \in \Sigma_n$, единственно.

Лемма 2. *Пусть $N \lhd \Gamma_n(R)$ и $N \nsubseteq D_n(R)$. Тогда N — полупрямое произведение групп N_S и N_D, где N_D — подгруппа в группе диагональных матриц, такая что если в ней лежит матрица с определителем α, то в ней лежат все диагональные матрицы с определителем α.*

Доказательство. Заметим, что любая матрица из $\Gamma_n(R)$ имеет вид $S_\sigma \cdot D$ и

$$S_{\sigma_1} \cdot D_1 \cdot S_{\sigma_2} \cdot D_2 = S_{\sigma_1\sigma_2} \cdot D'.$$

Рассмотрим множество

$$T = \{\sigma \in \mathrm{S}_n \mid \text{найдётся } D \in D_n(R), \text{ такая что } S_\sigma \cdot D \in N\}.$$

Из сказанного выше следует, что $T \lhd \mathrm{S}_n$. Если $T = e$, то N состоит только из диагональных матриц, что противоречит условию. Далее будем считать, что в T есть хотя бы два элемента.

Пусть в N содержится матрица $S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, где

$$\sigma = (i_1\, i_2\, \ldots\, i_{k_1})(i_{k_1+1}\, i_{k_1+2}\, \ldots i_{k_2}) \ldots (i_{k_t+1}\, i_{k_t+2}\, \ldots\, i_n).$$

Докажем, что тогда в N содержится и матрица $S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, где β_i — произвольные элементы поля R, удовлетворяющие условиям

$$\prod_{j=1}^{k_{p+1}-k_p} \beta_{i_{k_p+j}} = \prod_{j=1}^{k_{p+1}-k_p} \alpha_{i_{k_p+j}}, \quad 0 \leqslant p \leqslant t.$$

Для этого сопряжём $S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ с диагональной матрицей $\mathrm{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_n]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_n] \cdot S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \cdot \mathrm{diag}[d_1^{-1}, d_2^{-1}, \ldots, d_n^{-1}] = \\ = S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[d_{\sigma^{-1}(1)}\alpha_1 d_1^{-1}, d_{\sigma^{-1}(2)}\alpha_2 d_2^{-1}, \ldots, d_{\sigma^{-1}(n)}\alpha_n d_n^{-1}].\end{aligned}$$

Из этого соотношения понятно, какие можно взять d_i, чтобы получить матрицу

$$S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n].$$

Теперь возьмём матрицу $(S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n])^{-1} \cdot S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$. Это диагональная матрица, причём понятно, что так можно получить любую диагональную матрицу $\mathrm{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_n]$, удовлетворяющую условиям $\prod\limits_{j=1}^{k_{p+1}-k_p} d_{i_{k_p+j}} = 1$ для всех p, $0 \leqslant p \leqslant t$.

Докажем, что можно получить любую диагональную матрицу с определителем 1. Разберём для этого три случая.

I. $T = \mathrm{S}_n$. Тогда в группе N есть матрица вида $S_\sigma \cdot \mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$, где σ — цикл длины n. Значит, применяя предыдущие рассуждения, мы можем получить любую диагональную матрицу с определителем 1.

II. $T = \mathrm{A}_n$. Тогда в T есть либо цикл длины n, либо цикл длины $n-1$. Если есть цикл длины n, то случай аналогичен предыдущему. Пусть есть цикл $(1, 2, \ldots, n-1)$. Тогда в нашей группе лежат все матрицы с определителем 1 вида $\mathrm{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, 1]$. Сопрягая такие матрицы с транспозициями, можно получить все диагональные матрицы с единичным определителем и с 1 на произвольном месте. Перемножая их, можем получить уже любую диагональную матрицу с единичным определителем.

III. $T = \mathrm{V}_4$. Тогда в N есть матрицы вида $\mathrm{diag}[a, 1/a, b, 1/b]$ и $\mathrm{diag}[c, d, 1/c, 1/d]$. Пусть мы хотим получить матрицу $\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \gamma, 1/(\alpha\beta\gamma)]$. Тогда возьмём $a = 1$, $b = \alpha\gamma$, $c = \alpha$, $d = \beta$. Таким образом, мы опять получили любую диагональную матрицу с определителем 1.

Рассмотрим теперь множества $N_x = \{M \in N \mid \det M = x\}$. Как доказано ранее, $N_x = \{S_\sigma \cdot D\}$, где D — любая диагональная матрица с определителем x, подстановки σ образуют некоторую подгруппу, которую мы обозначим через $S(x) \lhd \mathrm{S}_n$. Докажем, что $S(1)$ неединичная. По условию есть нетривиальная $S(x)$, но так как $n > 2$, то $|S(x)| > 2$, поэтому существуют $S_{\sigma_1} D_1$, $S_{\sigma_2} D_2 \in N_x$, такие что $\sigma_1 \neq \sigma_2$, тогда $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \in S(1)$. Отсюда следует, что $S(x)$ не является тривиальной ни для какого x, для которого есть хоть одна матрица с определителем, равным x.

Нам остаётся доказать, что для любых x_1, x_2 $S(x_1) = S(x_2)$, если, конечно, оба множества непусты. Рассмотрим множество $X_{\mathrm{S}_n} = \{x \in R^* \mid S(x) = \mathrm{S}_n\}$. Аналогично определим X_{A_n} и X_{V_4}. Заметим, что каждое из этих множеств будет подгруппой в мультипликативной группе поля, поэтому в них во всех лежит 1. Значит, для любого x $S(x) = S(1)$ или $N_x = \varnothing$. □

3. Действие эндоморфизма на матрицах подстановок

Рассмотрим ограничение φ эндоморфизма Φ полугруппы $G_n(R)$ на группу $\Gamma_n(R)$. Это эндоморфизм группы. Пусть $N = N_S \leftthreetimes N_D = \mathrm{Ker}\,\varphi$. Поскольку мы описали нормальные подгруппы $\Gamma_n(R)$, то теперь мы можем описать эндоморфизмы $G_n(R)$. Сделаем это отдельно для каждой группы N_S.

Лемма 3. *Пусть эндоморфизм Φ таков, что существуют i, j, такие что $\Phi(B_{i,j}) = I_n$. Тогда образ этого эндоморфизма является подгруппой в Γ_n.*

Доказательство. Заметим, что если $\Phi(B_{i,j}) = I_n$ хоть для одной пары i, j, то $\Phi(B_{k,l}) = I_n$ для всех k, l, поскольку все эти матрицы сопряжены с матрицами подстановок. Тогда $\Phi(GE_n^+) = \Phi(P)$. Действительно, пусть матрица M

$\mathcal{P}$-эквивалентна матрице $M_1 \in P$. Тогда переход от $\Phi(M_1)$ к $\Phi(M)$ осуществляется с помощью обратимых матриц (см. определение). Значит, $\Phi(M) \in \Phi(P)$, а $\Phi(P)$ в свою очередь лежит в Γ_n. □

Таким образом, в случае когда $\Phi(B_{i,j}) = I_n$, зная описание всех нормальных подгрупп в Γ_n, мы можем понять, какие могут быть образы полугруппы $G_n(R)$.

Везде далее будем рассматривать случай, когда ни одна матрица $B_{i,j}$ не переходит в единицу.

Лемма 4. *Пусть эндоморфизм Φ переводит все диагональные матрицы в скалярные. Тогда матрицы $B_{i,j}$ лежат в ядре.*

Доказательство.

$$\Phi(B_{1,2}) = \Phi(\mathrm{diag}[2, 1, \ldots, 1])\Phi(B_{1,2})\Phi(\mathrm{diag}[1/2, 1, \ldots, 1]) = \Phi(B_{1,2}^2).$$

Следовательно, $\Phi(B_{1,2}) = I_n$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что все $B_{i,j}$ переходят в единичную матрицу. □

Таким образом, рассматривая случай, когда ни одна матрица $B_{i,j}$ не переходит в единицу, мы можем считать, что есть диагональная матрица, не переходящая в центр полугруппы $G_n(R)$.

Лемма 5. *Пусть $N_S = \mathrm{S}_n$ или $N_S = \mathrm{A}_n$. Тогда $\Phi\big(B_{ij}(x)\big) = I_n$ и $\Im\big(G_n(R)\big)$ — абелева группа.*

Доказательство. Пусть $\Phi(B_{12}) = A$. Тогда

$$\Phi(B_{23}) = \Phi\big(S_{(1\,2\,3)}B_{12}S_{(1\,2\,3)^{-1}}\big) = \Phi(B_{12}) = A.$$

Теперь воспользуемся соотношением $B_{13}B_{23}B_{12} = B_{12}B_{23}$. Поскольку матрица A обратима в $\mathrm{GL}_n(R)$, то $\Phi(B_{13}) = I_n$. Учитывая, что все матрицы B_{ij} сопряжены с матрицами подстановок, получаем, что $\Phi(B_{ij}) = I_n$, следовательно, $\Phi(B_{ij})(x) = I_n$. Поэтому по лемме 3 образом $G_n(R)$ является группа. Докажем, что в этом случае она коммутативна.

Рассмотрим произвольную матрицу из $\mathbf{P}$. По определению она является произведением матриц S_σ, D, $B_{ij}(x)$. Если $N_S = \mathrm{S}_n$, то образ $\Im\mathbf{P}$ порождается образами диагональных матриц и, очевидно, коммутативен. Если же $N_S = \mathrm{A}_n$, то нужно доказать, что коммутируют образы диагональных матриц и матриц нечётных подстановок. Заметим, что все матрицы нечётных подстановок переходят в одну и ту же матрицу M порядка 2. Поэтому $\Phi(\mathrm{diag}[1, \ldots, d, \ldots, 1])$ коммутирует с M, поскольку $\mathrm{diag}[1, \ldots, d, \ldots, 1]$ коммутирует с матрицей $S_{(i,j)}$, где i, j — номера двух мест диагональной матрицы, на которых стоят единицы. Такие найдутся, поскольку размерность не менее трёх. Очевидным образом любая диагональная матрица представляется в виде произведения матриц с одним неединичным элементом. □

Лемма 6. *Пусть $N_S = \mathrm{V}_4$. Тогда $\Phi\big(B_{ij}(x)\big) = I_n$.*

Доказательство. По лемме 2 в ядре лежат все диагональные матрицы с единичным определителем, в частности $D = \mathrm{diag}[2, 1, 1, 1/2]$. Заметим, что $DB_{1,2}D^{-1} = B_{1,2}^2$. Отсюда получаем, что $\Phi(B_{1,2}) = \Phi^2(B_{1,2})$, а значит $\Phi(B_{1,2}) = I_n$. Следовательно, все остальные матрицы $B_{i,j}$ тоже перейдут в единицу. □

Лемма 7. *Пусть $N_S = I_n$. Тогда*

$$\Phi(D) \subset D, \quad \Phi(\operatorname{diag}[x, 1, \ldots, 1]) = \operatorname{diag}[y, z, \ldots, z].$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\Phi(S_\sigma)$ не может быть диагональной матрицей, поскольку имеет конечный порядок. Таким образом, $\Phi(S_\sigma) = D_\sigma S_{\sigma'}$. Рассмотрим отображение ψ, определённое следующим образом: $\psi(\sigma) = \sigma'$. Докажем, что оно является автоморфизмом группы S_n.

Пусть $\psi(\sigma_1) = \psi(\sigma_2)$. Это означает, что $\Phi(\sigma_1\sigma_2^{-1})$ — диагональная матрица. Следовательно, она единичная из соображений порядка. Значит, отображение биективно. Гомоморфность следует из того, что $DS_\sigma = S_\sigma D'$, где D, D' — диагональные матрицы.

Рассмотрим теперь матрицу $D_x = \operatorname{diag}[x, 1, \ldots, 1]$. Пусть $\Phi(D_x) = DS_\sigma$. Она коммутирует со всеми подстановками, оставляющими 1 на месте. Значит, и её образ будет коммутировать со всеми образами этих подстановок, поэтому можно сделать вывод, что $\sigma = e$ и $D = \operatorname{diag}[y, z, \ldots, z]$. Можно прийти к аналогичному заключению и о матрицах с неединичным элементом на любом (не обязательно первом) месте. Эти матрицы порождают группу всех диагональных матриц. Следовательно, образ любой диагональной матрицы диагональный. □

Лемма 8. *Пусть $N_S = I_n$ и $\Phi(B_{ij}) \neq I_n$ для некоторых i, j. Тогда существует внутренний автоморфизм Φ_M полугруппы $G_n(R)$, такой что $\Phi_M\Phi(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \mathrm{S}_n$.*

Доказательство. Рассмотрим две мономиальные матрицы, которым соответствует одна и та же подстановка. Заметим, что образам этих двух матриц соответствует также одна и та же подстановка (по предыдущей лемме). Таким образом, мы получаем автоморфизм ψ группы S_n. Предположим сначала, что $n \neq 6$. В этом случае ψ — внутренний автоморфизм, сопряжение с помощью δ. Рассмотрим $\Phi_1 = \Phi_{S_\delta} \circ \Phi$. По построению $\Phi_1\big(S_{(1\,2\,\ldots\,n)}\big) = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_n]S_{(1\,2\,\ldots\,n)}$. Так как $S_{(1\,2\,\ldots\,n)}^n = I_n$, имеем, что $\prod\limits_{j=1}^{n} d_i = 1$. Возьмём теперь диагональную матрицу $M_2 = \operatorname{diag}[c_1, c_2, \ldots, c_n]$, где $c_i = \prod\limits_{j=1}^{i} d_i^{-1}$. Тогда искомая матрица есть $M = M_2S_\delta$. Заметим, что по построению $\Phi' = \Phi_M \circ \Phi$ оставляет на месте матрицу цикла $(1, 2, \ldots, n)$. Остаётся доказать, что $\Phi'\big(S_{(1\,2)}\big) = S_{(1\,2)}$. Поскольку $S_{(1\,2)}^2 = I_n$, имеем, что $\Phi'\big(S_{(1\,2)}\big) = \operatorname{diag}[\alpha, \alpha^{-1}, 1, \ldots, 1]S_{(1\,2)}$. Посмотрим, куда переходит $S_{(2\,3\,\ldots\,n)} = S_{(1\,2)}S_{(1\,2\,\ldots\,n)}$. Получим матрицу $\operatorname{diag}[\alpha^{-1}, \alpha, 1, \ldots, 1]S_{(2\,3\,\ldots\,n)}$. Но поскольку её порядок равен $n-1$, получаем, что $\alpha = 1$.

Рассмотрим случай, когда $n = 6$ и автоморфизм ψ — нестандартный автоморфизм группы S_6. Пусть автоморфизм ψ устроен следующим образом:

$$\psi\big((12)\big) = (12)(34)(56), \quad \psi\big((123456)\big) = (23)(456).$$

Тогда

$$\psi\big((23)\big) = (13)(25)(46), \quad \psi\big((34)\big) = (12)(36)(45),$$
$$\psi\big((45)\big) = (13)(24)(56), \quad \psi\big((56)\big) = (12)(35)(46), \quad \psi\big((24)\big) = (14)(26)(35).$$

Как и в предыдущем случае, мы можем взять диагональную матрицу M_2, такую что

$$\Phi'\big(S_{(123456)}\big) = \Phi_{M_2} \circ \Phi\big(S_{(123456)}\big) = S_{(23)(456)}.$$

Покажем, что $\Phi'\big(S_{(12)}\big) = S_{(12)(34)(56)}$. Из соображений порядка имеем, что

$$\Phi'\big(S_{(12)}\big) = \operatorname{diag}[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}]S_{(12)(34)(56)}.$$

Как и ранее, рассмотрим

$$\Phi'\big(S_{(23456)}\big) = \operatorname{diag}[\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}, \gamma, \gamma^{-1}]S_{(12463)}.$$

Поскольку $S^5_{(23456)} = I_n$, имеем, что $\alpha\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta = 1$, т. е. $\gamma = 1$. Рассмотрим

$$\Phi'\big(S_{(23)}\big) = \Phi'\big(S_{(123456)}\big)\Phi'\big(S_{(12)}\big)\Phi'\big(S_{(654321)}\big) = \\ = \operatorname{diag}[1, \alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}, 1]S_{(13)(25)(46)}.$$

Матрица

$$\Phi'\big(S_{(321)}\big) = \Phi'\big(S_{(23)}\big)\Phi'\big(S_{(12)}\big) = \operatorname{diag}[\beta, \alpha, 1\beta, \alpha^{-1}\beta^{-1}, \beta^{-1}]S_{(154)(236)}$$

имеет порядок 3. Поэтому $\alpha\beta^{-1} = 1$, т. е. $\alpha = \beta$. Таким образом,

$$\Phi'(34) = \Phi'\big(S_{(123456)}\big)\Phi'\big(S_{(23)}\big)\Phi'\big(S_{(654321)}\big) = \operatorname{diag}[1, 1, \alpha, \alpha^{-1}, \alpha, \alpha^{-1}]S_{(12)(36)(45)}.$$

Матрица

$$\Phi'\big(S_{(432)}\big) = \Phi'\big(S_{(34)}\big)\Phi'\big(S_{(23)}\big) = \operatorname{diag}[\alpha, 1, \alpha, \alpha^{-2}, \alpha^2, \alpha^{-1}]S_{(165)(243)}$$

имеет порядок 3. Поэтому $\alpha = 1$.

Пусть

$$\Phi'\big(B_{1,2}(1)\big) = B_{1,2} = (b_{i,j}).$$

Матрица $B_{1,2}$ должна коммутировать с

$$\Phi'\big(S_{(34)}\big) = S_{(12)(36)(45)}, \quad \Phi'\big(S_{(45)}\big) = S_{(13)(24)(56)}, \quad \Phi'\big(S_{(56)}\big) = S_{(12)(35)(46)}.$$

Из этого условия получаем, что матрица $B_{1,2}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b & c & c & c & c \\ b & a & c & c & c & c \\ c & c & a & b & c & c \\ c & c & b & a & c & c \\ c & c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & b & a \end{pmatrix}.$$

Но тогда

$$\Phi'\big(B_{1,3(1)}\big) = \Phi'\big(S_{(23)}B_{1,2}(1)S_{(23)}\big) = \begin{pmatrix} a & c & c & c & c & b \\ c & a & c & b & c & c \\ c & c & a & c & b & c \\ c & b & c & a & c & c \\ c & c & b & c & a & c \\ b & c & c & c & c & a \end{pmatrix}.$$

Эти две матрицы должны коммутировать. После подсчёта, приравнивая элементы, стоящие на месте $(1,4)$, получаем, что $c^2 + b^2 - 2bc = 0$, т. е. $b = c$. Таким образом,

$$\Phi'\big(B_{1,2}(1)\big) = B_{1,2} = \begin{pmatrix} a & c & c & c & c & c \\ c & a & c & c & c & c \\ c & c & a & c & c & c \\ c & c & c & a & c & c \\ c & c & c & c & a & c \\ c & c & c & c & c & a \end{pmatrix} = \Phi'\big(B_{1,3}(1)\big).$$

Далее из условия $B_{1,2}B_{1,3} = B_{1,3}B_{2,3}B_{1,2}$ получаем, что $\Phi'(B_{2,3}) = I_6$. □

4. Получение эндоморфизма полукольца неотрицательных элементов

Лемма 9. *Пусть Φ' — такой эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, что $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in S_\sigma$ и $\Phi'(B_{i,j}) \neq I_n$. Тогда $\Phi\big(B_{1,2}(x)\big) = B_{1,2}\big(b(x)\big)$, где ψ — эндоморфизм полукольца R_+.*

Доказательство. Положим $A = \Phi(B_{1,2})$. Поскольку A коммутирует с матрицами подстановок, оставляющими на месте 1 и 2, имеем, что

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & u & u & \dots & u \\ \gamma & \delta & v & v & \dots & v \\ x & y & a & b & \dots & b \\ x & y & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & y & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Но, учитывая, что $B_{1,2}$ коммутирует со всеми диагональными матрицами вида $\operatorname{diag}[1, \dots, t, \dots, 1]$ и найдётся такое t, что её образ не лежит в центре (по лемме 4), получаем, что $u = v = x = y = b = 0$.

Возьмём элемент $x \in R_+$, такой что

$$\Phi'(\operatorname{diag}[x, 1, \dots, 1)] = \operatorname{diag}[\xi(x), \gamma(x), \dots, \gamma(x)] \neq \lambda I_n.$$

Тогда

$$\Phi'\big(B_{12}(x)\big) = \Phi'(\mathrm{diag}[x,1,\dots,1]B_{12}(1)\,\mathrm{diag}[x^{-1},1,\dots,1]) =$$

$$= \mathrm{diag}[\xi(x),\eta(x),\dots,\eta(x)]\begin{pmatrix}\alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a\end{pmatrix}\mathrm{diag}[\xi(x)^{-1},\eta(x)^{-1},\dots,\eta(x)^{-1}] =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha & \nu(x)\beta & & & \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a\end{pmatrix},$$

где $\nu(x) = \xi(x)\eta(x)^{-1}$.

Заметим, что $\Phi'\big(B_{12}(1)\big)$ и $\Phi'\big(B_{12}(x)\big)$ коммутируют. Напишем это условие в матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \nu(x)\beta \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \nu(x)\beta \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix}\alpha^2+\nu(x)^{-1}\beta\gamma & \nu(x)\alpha\beta+\beta\delta \\ \gamma\alpha+\nu(x)^{-1}\delta\gamma & \nu(x)\gamma\beta+\delta^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2+\nu(x)\beta\gamma & \alpha\beta+\nu(x)\beta\delta \\ \nu(x)^{-1}\gamma\alpha+\delta\gamma & \nu(x)^{-1}\gamma\beta+\delta^2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\nu(x)^{-1}\beta\gamma = \nu(x)\beta\gamma$. Так как мы полагали, что матрица $\mathrm{diag}[\xi(x),\gamma(x),\dots,\gamma(x)]$ нескалярная, получаем, что $\beta\gamma = 0$.

Далее воспользуемся соотношением

$$\big(B_{12}(1)\big)^2 = \mathrm{diag}[2,1,\dots,1]B_{12}(1)\cdot\mathrm{diag}[1/2,1,\dots,1],$$

из которого будет следовать (при условии $\beta\gamma = 0$), что $a = \alpha = \delta = 1$. Таким образом,

$$A = \Phi'(B_{1,2}) = \begin{pmatrix}1 & \beta & & & \\ \gamma & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}, \quad \beta\gamma = 0.$$

Воспользуемся соотношением

$$B_{1,2}B_{1,3} = B_{1,3}B_{2,3}B_{1,2}.$$

Получаем, что

$$\begin{pmatrix}1 & \beta & \beta^2 \\ \gamma & 1 & \beta \\ 0 & \gamma & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \beta & \beta \\ \gamma & 1 & \beta \\ \gamma+\gamma^2 & \gamma & 1\end{pmatrix}.$$

Значит, $\gamma + \gamma^2 = 0$, откуда следует, что $\gamma = 0$. Также имеем $\beta = \beta^2$, значит, $\beta = 1$ или $\beta = 0$. Но поскольку $\Phi'(B_{1,2}) \neq I_n$, имеем, что $\Phi'(B_{1,2}) = B_{1,2}$. Отсюда получаем искомое отображение $b(\cdot)$ по следующему правилу:

$$\Phi'\big(B_{1,2}(x)\big) = \Phi'(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1] B_{12}(1)\,\mathrm{diag}[x^{-1}, 1, \ldots, 1]) = B_{1,2}\big(b(x)\big).$$

Докажем, что $b(\cdot)$ — эндоморфизм полукольца R_+.

Так как для всех $x_1, x_2 \in F_+$

$$B_{12}(x_1 + x_2) = B_{12}(x_1) B_{12}(x_2),$$

то

$$\begin{aligned} B_{12}\big(b(x_1 + x_2)\big) &= \Phi'\big(B_{12}(x_1 + x_2)\big) = \Phi'\big(B_{12}(x_1) B_{12}(x_2)\big) = \\ &= \Phi'\big(B_{12}(x_1)\big)\Phi'\big(B_{12}(x_2)\big) = B_{12}\big(b(x_1)\big) \cdot B_{12}\big(b(x_2)\big) = B_{12}\big(b(x_1) + b(x_2)\big), \end{aligned}$$

откуда получаем, что для всех $x_1, x_2 \in R_+$ справедливо $b(x_1+x_2) = b(x_1)+b(x_2)$, поэтому $b(\cdot)$ аддитивно.

Для того чтобы доказать мультипликативность отображения $b(\cdot)$, используем следующие условия:

1) $\Phi'\big(B_{13}(x)\big) = \Phi'\big(S_{(2,3)} B_{12}(x) S_{(2,3)}\big) = \alpha S_{(2,3)} B_{12}\big(b(x)\big) \alpha S_{(2,3)} = \alpha^2 B_{13}\big(b(x)\big) = B_{13}\big(b(x)\big)$;
2) аналогично $\Phi'\big(B_{32}(x)\big) = B_{32}\big(b(x)\big)$;
3) $B_{13}(x_1) B_{32}(x_2) = B_{32}(x_2) B_{13}(x_1) B_{12}(x_1 x_2)$, следовательно,

$$\Phi'\big(B_{13}(x_1)\big)\Phi'\big(B_{32}(x_2)\big) = \Phi'\big(B_{32}(x_2)\big)\Phi'\big(B_{13}(x_1)\big)\Phi'\big(B_{12}(x_1 x_2)\big),$$

поэтому

$$B_{13}\big(b(x_1)\big) B_{32}\big(b(x_2)\big) = B_{32}\big(b(x_2)\big) B_{13}\big(b(x_1)\big) B_{12}\big(b(x_1 x_2)\big).$$

Тогда для всех $x_1, x_2 \in R_+$

$$\begin{pmatrix} 1 & b(x_1)b(x_2) & b(x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b(x_2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b(x_1 x_2) & b(x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b(x_2) & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, для всех $x_1, x_2 \in R_+$ $b(x_1 x_2) = b(x_1) b(x_2)$.

Значит, $b(\cdot)$ является мультипликативным отображением. $\square$

5. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть эндоморфизм Φ таков, что $\Phi(B_{i,j}) \neq I_n$. Тогда существуют $M \in \Gamma_n(R)$, $b \in \mathrm{End}(R_+)$, центральная гомотетия Ω, такие что Φ совпадает с $\Phi_M \circ \Phi^b \circ \Omega$ на полугруппе $GE_n^+(R)$.*

Доказательство. Заметим, что из лемм 8 и 9 следует, что эндоморфизм $\Phi'' = \Phi_M \circ \Phi^b$ совпадает с автоморфизмом Φ на полугруппе, порождённой матрицами подстановок и $B_{i,j}(x)$.

По лемме 7

$$\Phi'(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1)] = \mathrm{diag}[\xi(x), \gamma(x), \ldots, \gamma(x)].$$

Пусть

$$\Phi''(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1)] = \mathrm{diag}[\xi'(x), \gamma'(x), \ldots, \gamma'(x)].$$

Используя соотношения $\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1]B_{1,2}(1)\,\mathrm{diag}[x^{-1}, 1, \ldots, 1] = B_{1,2}(x)$ и $\Phi''\big(B_{i,j}(x)\big) = \Phi\big(B_{i,j}(x)\big)$, получаем, что $\xi(x)\gamma^{-1}(x) = \xi'(x)\gamma'^{-1}(x)$. Обозначим $\omega(x) = \xi(x)\xi'^{-1}(x)$. Тогда $\Phi(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1]) = \omega(x)\Phi''(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1])$. Заметим, что отображение $\omega(\cdot)\colon R_+ \to R_+$ мультипликативно. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\omega(x_1x_2)\Phi''(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1]) = \Phi(\mathrm{diag}[x_1x_2, 1, \ldots, 1]) = \\
&\quad = \Phi(\mathrm{diag}[x_1, 1, \ldots, 1])\Phi(\mathrm{diag}[x_2, 1, \ldots, 1]) = \\
&\quad = \omega(x_1)\Phi''(\mathrm{diag}[x_1, 1, \ldots, 1])\omega(x_2)\Phi''(\mathrm{diag}[x_2, 1, \ldots, 1]) = \\
&\quad = \omega(x_1)\omega(x_2)\Phi''(\mathrm{diag}[x_1x_2, 1, \ldots, 1]).
\end{aligned}$$

Если $D = \mathrm{diag}[x_1, \ldots, x_n] \in D_n(R)$, то

$$\begin{aligned}
&\Phi''(D) = \Phi''\big(\mathrm{diag}[x_1, 1, \ldots, 1]S_{1,2}\,\mathrm{diag}[x_2, 1, \ldots, 1]S_{(1,2)}S_{(1,3)} \times \\
&\quad \times \mathrm{diag}[x_3, 1, \ldots, 1]S_{(1,3)} \ldots S_{(1,n)}\,\mathrm{diag}[x_n, 1, \ldots, 1]S_{(1,n)}\big) = \\
&\quad = \omega(x_1)\Phi(\mathrm{diag}[x_1, 1, \ldots, 1])S_{(1,2)}\omega(x_2) \times \\
&\quad \times \mathrm{diag}[x_2, 1, \ldots, 1]S_{(1,2)} \ldots S_{(1,n)}\omega(x_n)\,\mathrm{diag}[x_n, 1, \ldots, 1]\omega(x_n) = \\
&\quad = \omega(x_1)\ldots\omega(x_n)\Phi(D) = \omega(x_1 \ldots x_n)\Phi(D).
\end{aligned}$$

Ясно, что любая матрица $A \in \mathbf{P}$ может быть представлена в виде

$$A = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]A_1 \ldots A_k,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R_+$,

$$A_1, \ldots, A_k \in \{S_\sigma,\ B_{ij}(x) \mid \sigma \in \mathrm{S}_n,\ x \in R_+,\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Phi''(A) &= \Phi''(\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]A_1 \ldots A_k) = \\
&= \omega(\alpha_1 \ldots \alpha_n)\,\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]A_1 \ldots A_k = \omega(\alpha_1 \ldots \alpha_n)A.
\end{aligned}$$

Теперь введём отображение $\bar{\omega}(\cdot)\colon \mathbf{P} \to R_+$ по следующему правилу: если $A \in \mathbf{P}$ и $A = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]A_1 \ldots A_k$, где

$$A_1, \ldots, A_k \in \{S_\sigma,\ B_{ij}(x) \mid \sigma \in \mathrm{S}_n,\ x \in R_+,\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j\},$$

то $\bar{\omega}(A) = \omega(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Отображение $\bar{\omega}(\cdot)$ однозначно определено, так как если

$$A = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]A_1 \ldots A_k = \mathrm{diag}[\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n]A'_1 \ldots A'_m,$$

то $\Phi''(A) = \omega(\alpha_1 \dots \alpha_n)A$ и $\Phi''(A) = \omega(\alpha'_1 \dots \alpha'_n)A$, и поэтому $\omega(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \omega(\alpha'_1 \dots \alpha'_n)$.

Так как

$$\bar\omega(AA')AA' = \Phi''(AA') = \Phi''(A)\Phi''(A') = \bar\omega(A)A \cdot \bar\omega(A')A' = \bar\omega(A)\bar\omega(A')AA',$$

то $\bar\omega$ является гомоморфизмом $\mathbf{P} \to R_+$.

Теперь мы видим, что на полугруппе $\mathbf{P}$ автоморфизм Φ''' совпадает с центральной гомотетией $\Omega(\cdot)\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, где для всех $A \in \mathbf{P}$ $\Omega(A) = \bar\omega(A) \cdot A$.

Пусть $B \in G_n(R)$. Тогда матрица B $\mathcal{P}$-эквивалентна некоторой матрице $A \in \mathbf{P}$, т. е. существуют матрицы $A_0, \dots, A_k \in G_n(R)$, $A_0 = A \in \mathbf{P}$, $A_k = B$, и матрицы P_i, $\tilde P_i$, Q_i, $\tilde Q_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$, такие что для всех $i = 0, \dots, k-1$

$$P_i A_i \tilde P_i = Q_i A_{i+1} \tilde Q_i.$$

Тогда

$$\Phi'''(P_0 A_0 \tilde P_0) = \Phi'''(Q_0 A_1 \tilde Q_0),$$

т. е.

$$\bar\omega(P_0)P_0\bar\omega(A_0)A_0\bar\omega(\tilde P_0)\tilde P_0 = \bar\omega(Q_0)Q_0\Phi''(A_1)\bar\omega(\tilde Q_0)\tilde Q_0.$$

Следовательно,

$$\bar\omega(P_0A_0\tilde P_0)P_0A_0\tilde P_0 = \bar\omega(Q_0\tilde Q_0)Q_0\Phi'''(A_1)\tilde Q_0,$$

значит,

$$\bar\omega(P_0A_0\tilde P_0)\bar\omega(Q_0\tilde Q_0)^{-1}Q_0A_1\tilde Q_0 = Q_0\Phi'''(A_1)\tilde Q_0.$$

Таким образом,

$$\Phi'''(A_1) = \bar\omega(P_0A_0\tilde P_0)\bar\omega(Q_0\tilde Q_0)^{-1}A_1, \dots,$$
$$\Phi'''(B) = \Phi''(A_n) = \bar\omega(P_{n-1})\bar\omega(A_{n-1})\bar\omega(\tilde P_{n-1})\bar\omega(Q_{n-1})^{-1}\bar\omega(\tilde Q_{n-1}).$$

Значит, мы можем продолжить отображение $\bar\omega(\cdot)\colon \mathbf{P} \to R_+^*$ до некоторого отображения $\lambda(\cdot)\colon G_n(R) \to R_+^*$, такого что для каждого $B \in G_n(R)$

$$\Phi'''(B) = \lambda(B) \cdot B.$$

Так как Φ''' является автоморфизмом полугруппы $G_n(R)$, то $\lambda(\cdot)$ является центральным гомоморфизмом $\lambda(\cdot)\colon G_n(R) \to R_+^*$, значит, автоморфизм $\Phi'''\colon G_n(R) \to G_n(R)$ является центральной гомотетией. $\square$

Автор выражает благодарность Е. И. Буниной и А. В. Михалёву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Мат. заметки. — 2011. — Т. 91, № 1. — С. 3—12.

[2] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 39—53.

[3] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.

[4] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 69—100.

[5] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 75—85.

[6] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.

[7] Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 9. — С. 117—132.

[8] Семёнов П. П. Эндоморфизмы полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами над упорядоченными полями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012.