Модули со свойством Накаямы*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: модуль со свойством Накаямы, max-кольцо.

Аннотация

Исследуются модули M_A со свойством Накаямы. В частности, для инвариантного справа кольца A доказано, что все правые A-модули обладают свойством Накаямы в точности тогда, когда кольцо A совершенно справа.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Modules with Nakayama's property, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 179—185.

Modules M_A with Nakayama's property are studied. In particular, for a right invariant ring A, it is proved that all right A-modules satisfy Nakayama's property if and only if the ring A is right perfect.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули — унитарными. Утверждения типа «A — совершенное кольцо» означают, что A — совершенное справа и слева кольцо. Пусть A — кольцо и M — правый A-модуль. В [3] модуль M называется модулем *со свойством Накаямы*, если для любого идеала B кольца A со свойством $MB = M$ найдётся такой элемент $b \in B$, что $M(1-b) = 0$. Аддитивная группа рациональных чисел является примером модуля над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, не обладающего свойством Накаямы (см. также пример 3 ниже). Хорошо известно следующее утверждение.

Факт 1 [5, теорема 2.2.]. Все конечно порождённые модули над коммутативными кольцами обладают свойством Накаямы.

Идеал B кольца A называется *t-нильпотентным слева*, если для любого счётного подмножества $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ в B найдётся такой номер n, что

$$b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 = 0.$$

Кольцо A с радикалом Джекобсона $J(A)$ называется *совершенным справа*, если выполнены следующие два эквивалентных (см. [1, 11.6.3; 4]) условия:

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 11-01-00794-а.

1) фактор-кольцо $A/J(A)$ по радикалу Джекобсона $J(A)$ артиново и идеал $J(A)$ t-нильпотентен слева;
2) A — кольцо с условием минимальности для главных левых идеалов.

В частности, каждое артиново справа или слева кольцо является совершенным кольцом.

В [3] доказано следующее утверждение.

Факт 2 [3, теорема 4.9]. Все модули над коммутативным кольцом A обладают свойством Накаямы в точности тогда, когда A — совершенное кольцо.

Если A — кольцо и M — правый A-модуль, то для любого подмножества X в M через $\mathrm{r}(X)$ обозначается правый идеал $\{a \in A \mid Xa = 0\}$ в A, называемый *правым аннулятором* множества X. Кольцо A называется *квазиинвариантным справа*, если все его максимальные правые идеалы являются идеалами. Все коммутативные кольца и все кольца верхнетреугольных матриц над коммутативными кольцами являются квазиинвариантными кольцами.

Пример 3. Пусть A — кольцо всех верхнетреугольных матриц порядка 3 над полем F и e — матрица из A, у которой в верхнем левом углу стоит 1, а на остальных местах стоят нули. Непосредственно проверяется, что главный правый идеал eA — идеал в A, причём $eA(AeA) = eA$ и $\mathrm{r}(eA) = 0$. Поэтому циклический правый модуль eA над квазиинвариантным артиновым кольцом A не обладает свойством Накаямы, причём если поле F конечно, то A — конечное квазиинвариантное кольцо.

В связи с фактами 1, 2 и примером 3 мы докажем теорему 4, которая является основным результатом данной работы. Напомним, что кольцо называется *инвариантным справа*, если все его правые идеалы являются идеалами. Кольцо называется *нормальным* или *абелевым*, если все его идемпотенты центральны. Каждое коммутативное кольцо инвариантно, все инвариантные справа кольца квазиинвариантны справа и нормальны, тело гамильтоновых кватернионов — некоммутативное инвариантное кольцо, кольца верхнетреугольных матриц над коммутативными кольцами квазиинвариантны и не являются нормальными.

Теорема 4.

1. *Не все конечно порождённые модули над совершенными квазиинвариантными кольцами обладают свойством Накаямы.*
2. *Все конечно порождённые правые модули над инвариантными справа кольцами обладают свойством Накаямы.*
3. *Если A — квазиинвариантное справа кольцо и все правые A-модули обладают свойством Накаямы, то кольцо A совершенно справа.*
4. *Если A — совершенное справа нормальное кольцо, то все правые A-модули обладают свойством Накаямы.*
5. *Если A — квазиинвариантное справа нормальное кольцо, то все правые A-модули обладают свойством Накаямы в точности тогда, когда кольцо A совершенно справа.*

Замечание 5. В частности, теорема 4 показывает, что утверждения, аналогичные фактам 1 и 2, верны для инвариантных справа колец и не обязательно верны для не инвариантных справа колец.

Доказательство теоремы 4 разбито на ряд утверждений. Приведём необходимые определения и обозначения.

Собственный идеал P кольца A называется *примитивным справа*, если P является аннулятором некоторого простого правого A-модуля (т. е. если существует такой максимальный правый идеал B кольца A, что P — наибольший идеал кольца A, лежащий в B). Следовательно, каждый максимальный идеал является примитивным справа и слева идеалом. Модуль M_A называется *примитивно делимым*, если $M = MP$ для каждого примитивного справа идеала P кольца A. Кольцо A называется *правым* $\max$-*кольцом*, если каждый ненулевой правый A-модуль имеет максимальный подмодуль.

Через $J(M)$ обозначается *радикал Джекобсона* модуля M, т. е. $J(M)$ — пересечение всех максимальных подмодулей в M, причём $J(M) = M$, если M не имеет максимальных подмодулей. Кольцо A называется *полусовершенным*, если $A/J(A)$ — артиново кольцо и все его идемпотенты поднимаются до идемпотентов кольца A. Кольцо A называется *локальным*, если $A/J(A)$ — тело. Ненулевой идемпотент $e \in A$ называется *локальным*, если eAe — локальное кольцо. Кольцо называется *регулярным*, если каждый его главный правый или левый идеал порождается идемпотентом. Кольцо называется *строго регулярным*, если каждый его главный правый или левый идеал порождается центральным идемпотентом. Строго регулярные кольца совпадают с инвариантными регулярными кольцами. Подмодуль X модуля M называется *малым* (в M), если $X+Y \neq M$ для каждого собственного подмодуля Y в M.

Лемма 6. *Пусть $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ — конечное прямое произведение колец и M — правый A-модуль. Тогда M — A-модуль со свойством Накаямы в точности тогда, когда MA_i — A_i-модуль со свойством Накаямы для любого i.*

Лемма 6 проверяется непосредственно.

Лемма 7. *Если A — локальное кольцо, то каждый правый A-модуль M с условием $M \neq MJ(A)$ является модулем со свойством Накаямы.*

Доказательство. Пусть B — такой идеал кольца A, что $MB = M$. Надо доказать, что $M(1-b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$. Так как $M \neq MJ(A)$, то B не содержится в $J(A)$. Поскольку кольцо A локально, то $B = A$ и можно взять 1 в качестве элемента b. □

Лемма 8. *Нормальные полусовершенные кольца совпадают с конечными прямыми произведениями локальных колец.*

Лемма 8 вытекает из того, что кольцо A является полусовершенным в точности тогда, когда его единица является конечной суммой локальных ортогональных идемпотентов [1, 11.3.5, 11.4.3].

Лемма 9. *Пусть A — нормальное полусовершенное кольцо и M — такой правый A-модуль, что $MJ(A)$ — малый подмодуль в M. Тогда M — модуль со свойством Накаямы.*

Доказательство. По лемме 8 $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ — конечное прямое произведение локальных колец. Зафиксируем $A_i = R$. По лемме 6 достаточно доказать, что MR является R-модулем со свойством Накаямы. Если $MR \neq MRJ(R)$, то это верно по лемме 7.

Допустим, что $MR = MRJ(R)$. Тогда MR — прямое слагаемое A-модуля, лежащее в $MJ(A)$. Кроме того, $MJ(A)$ — малый подмодуль в M по условию. Поэтому $MR = 0$ и MR — A-модуль со свойством Накаямы. □

Лемма 10 [1, 11.5.5]. *Пусть A — кольцо, M — правый A-модуль и B — t-нильпотентный слева идеал кольца A. Тогда MB — малый подмодуль в M.*

Лемма 11. *Если A — совершенное справа нормальное кольцо, то каждый правый A-модуль обладает свойством Накаямы.*

Доказательство. Пусть M — правый A-модуль. Так как кольцо A совершенно справа, то $J(A)$ — t-нильпотентный слева идеал. По лемме 10 $MJ(A)$ — малый подмодуль в M. Совершенное справа кольцо A полусовершенно [1, 11.6.2]. По лемме 9 M — модуль со свойством Накаямы. □

Лемма 12. *Пусть A — кольцо и M — ненулевой правый A-модуль со свойством Накаямы.*

1. *Если M — примитивно делимый модуль, то для любого ненулевого элемента $m \in M$ аннулятор $\mathrm{r}(m)$ не содержится ни в одном примитивном справа идеале кольца A.*
2. *Если кольцо A квазиинвариантно справа, то модуль M не является примитивно делимым.*
3. *Если кольцо A квазиинвариантно справа, то модуль M имеет максимальный подмодуль.*

Доказательство. 1. Пусть m — ненулевой элемент модуля M и P — примитивный справа идеал кольца A. Допустим, что $\mathrm{r}(m) \subseteq P$. Так как M — примитивно делимый модуль, то $MP = M$. Поскольку M — модуль со свойством Накаямы, то существует такой элемент $p \in P$, что

$$1 - p \in \mathrm{r}(M) \subseteq \mathrm{r}(m) \subseteq P.$$

Тогда

$$1 = (1 - p) + p \in P, \quad P = A.$$

Получено противоречие.

2. Пусть m — ненулевой элемент модуля M. Существует такой максимальный правый идеал P кольца A, что $\mathrm{r}(m) \subseteq P$. Так как кольцо A квазиинвариантно справа, то P — идеал в A. Поэтому P — примитивный справа идеал. Из утверждения 1 следует, что модуль M не является примитивно делимым.

3. По утверждению 2 модуль M не является примитивно делимым. Поэтому существует такой примитивный справа идеал P кольца A, что $M \neq MP$. Так как кольцо A квазиинвариантно справа, то фактор-кольцо A/P является телом. Ненулевое векторное пространство M/MP над телом A/P имеет одномерное фактор-пространство. Поэтому A-модуль M/MP имеет простой фактор-модуль и M имеет максимальный подмодуль. $\square$

Лемма 13 ([2]; см. также [6, теорема 26.8]). *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — квазиинвариантное справа правое $\max$-кольцо*;
2) *фактор-кольцо $A/J(A)$ строго регулярно и идеал $J(A)$ t-нильпотентен слева.*

Лемма 14. *Пусть A — кольцо, над которым каждый правый модуль обладает свойством Накаямы.*

1. *Для любого фактор-кольца A/B кольца A каждый правый A/B-модуль обладает свойством Накаямы.*
2. *Если B — идеал кольца A и $B^2 = B$, то существует такой идемпотент $e \in B$, что $b = be$ для любого элемента $b \in B$, откуда следует, что $B = Be = Ae$ — главный левый идеал, порождённый идемпотентом e.*
3. *Если $J(A) = 0$ и кольцо A квазиинвариантно справа, то A — артиново кольцо.*
4. *Если кольцо A квазиинвариантно справа, то кольцо A совершенно справа.*

Доказательство. 1. Утверждение 1 проверяется непосредственно.

2. Так как $B^2 = B$ и модуль B_A обладает свойством Накаямы, то существует такой элемент $e \in B$, что $B(1-e) = 0$. Тогда $e(1-e) = 0$ и e — идемпотент.

3. Достаточно доказать, что любой левый идеал B кольца A порождается идемпотентом. По лемме 13 кольцо A строго регулярно. В частности, кольцо A инвариантно слева и B — идеал. По утверждению 2 B порождается идемпотентом.

4. По утверждению 1 каждый правый $A/J(A)$-модуль обладает свойством Накаямы. Так как $J\big(A/J(A)\big) = 0$, то по утверждению 3 фактор-кольцо $A/J(A)$ артиново. По лемме 13 идеал $J(A)$ t-нильпотентен слева. Поэтому кольцо A совершенно справа. $\square$

Если X и Y — подмножества правого модуля M над кольцом A, то обозначим $(X \,^{\cdot}_{\cdot}\, Y) = \{a \in A \mid Xa \subseteq Y\}$.

Лемма 15. *Пусть A — инвариантное справа кольцо, B — идеал в A, n — натуральное число и M — n-порождённый правый A-модуль с образующими $m_1, \ldots, m_n$.*

1. *$B(1-b) \subseteq (1-b)B$ для любого элемента $b \in B$.*
2. *Пусть $n \geqslant 2$ и $N = \sum\limits_{i=1}^{n-1} m_iA$. Если $M = MB$, то $A = B + (m_nA \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)$ и $N = NB$.*
3. *Если $M = MB$, то $M(1-b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$.*

Доказательство. 1. Пусть $b_1 \in B$. Так как A инвариантно справа, то $(1-b)A$ — идеал. Поэтому $b_1(1-b) = (1-b)a$ для некоторого элемента $a \in A$. Тогда

$$a = (1-b)a + ba = b_1(1-b) + ba \in B, \quad B(1-b) \subseteq (1-b)B.$$

2. Обозначим

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2, \\ \sum\limits_{i=2}^{n-1} m_i A, & \text{если } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Для каждого m_i существует такой элемент $b_i \in B$, что

$$m_i \in M = MB = \sum_{j=1}^{n} m_j B, \quad m_i(1-b_i) \in \sum_{j \neq i} m_j B.$$

Тогда

$$m_n A(1-b_n) \subseteq NB = m_1 B + YB, \quad m_1 A(1-b_1) \subseteq YB + m_n B,$$

поскольку A инвариантно справа. Кроме того, $B(1-b_1) \subseteq (1-b_1)B$ по утверждению 1. Поэтому $A = B + (m_n A \,^{\cdot}_{\cdot}\, N)$ и

$$m_1 A(1-b_1)(1-b_n) \subseteq (YB + m_n B)(1-b_n) \subseteq \\ \subseteq YB + m_n B(1-b_n) \subseteq YB + m_n(1-b_n)B \subseteq YB + m_1 B = NB.$$

Тогда существует такой элемент $b^* \in B$, что

$$m_1(1-b_1)(1-b_n) - m_1 b^* \in YB, \quad m_1[(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in YB.$$

Обозначим

$$b = 1 - [(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in B.$$

Тогда

$$m_1 = m_1 b + m_1(1-b) = m_1 b + m_1[(1-b_1)(1-b_n) - b^*] \in m_1 B + YB = NB.$$

Поэтому $m_1 A \subseteq NB$. Аналогично можно доказать, что $m_i A \subseteq NB$ при $i = 2, \ldots, n-1$. Поэтому $N = NB$.

3. Проведём индукцию по n.

Допустим, что $n = 1$ и $M = m_1 A$. Обозначим $m = m_1$. Так как A инвариантно справа, то $\mathrm{r}(M) = \mathrm{r}(m)$ и $mA = mAB = mB$. Поэтому $m(1-b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$. Тогда $M(1-b) = 0$.

Допустим, что $n > 1$ и утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших n. Обозначим

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A.$$

По утверждению 2 $A = B+(m_n A \,\dot{.}\, N)$ и $N = NB$. По предположению индукции $A = B + \mathrm{r}(N)$. Тогда

$$M(m_n A \,\dot{.}\, N)\mathrm{r}(N) = (N + m_n A)(m_n A \,\dot{.}\, N)\mathrm{r}(N) = \\ = N(m_n A \,\dot{.}\, N)\mathrm{r}(N) + m_n A(m_n A \,\dot{.}\, N)\mathrm{r}(N) \subseteq N\mathrm{r}(N) = 0.$$

Поэтому $(m_n A \,\dot{.}\, N)\mathrm{r}(N) \subseteq \mathrm{r}(M)$ и

$$A = A \cdot A = \big(B + (m_n A \,\dot{.}\, N)\big)\big(B + \mathrm{r}(N)\big) \subseteq B + (m_n A \,\dot{.}\, N)\mathrm{r}(N) \subseteq \\ \subseteq B + \mathrm{r}(M) \subseteq A. \quad \square$$

Окончание доказательства теоремы 4. Утверждение 1 вытекает из примера 3.

Утверждение 2 доказано в утверждении 3 леммы 15.

Утверждение 3 доказано в утверждении 4 леммы 14.

Утверждение 4 доказано в лемме 11.

Утверждение 5 вытекает из утверждений 3 и 4. □

Литература

[1] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[2] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми каждый модуль обладает максимальным подмодулем // Мат. заметки. — 1997. — Т. 61, № 3. — С. 407—415.

[3] Azizi A. On generalization of Nakayama's lemma // Glasgow Math. J. — 2010. — Vol. 52. — P. 605—617.

[4] Bass H. Finistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings // Trans. Am. Math. Soc. — 1960. — Vol. 95, no. 3. — P. 466—488.

[5] Matsumura H. Commutative Ring Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.

[6] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.