

Пространства модулей оснащённых представлений колчанов и наборы операторов*

С. Н. ФЕДОТОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: glwrath@yandex.ru

УДК 512.64

Ключевые слова: колчан, оснащённое представление, линейный оператор, линейная функция.

Аннотация

В работе обсуждается задача классификации наборов линейных операторов и линейных функций на конечномерном векторном пространстве с точностью до замены координат. Данная проблема рассматривается в более широком контексте теории оснащённых представлений колчанов. Основным результатом является построение над произвольным полем полной классификации указанных наборов на открытом по Зарискому подмножестве с описанием семейств нормальных форм и задание вложения пространства модулей в проективное пространство.

Abstract

S. N. Fedotov, Framed moduli spaces and tuples of operators, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 187–209.

In this work, we address the classical problem of classifying tuples of linear operators and linear functions on a finite-dimensional vector space up to base change. Having adopted for the situation considered a construction of framed moduli spaces of quivers, we develop an explicit classification of tuples belonging to a Zariski open subset. For such tuples we provide a finite family of normal forms and a procedure allowing one to determine whether two tuples are equivalent.

1. Введение

Колчан Q — это ориентированный граф, определяемый двумя конечными множествами Q_0 (множество «вершин») и Q_1 (множество «стрелок») и двумя отображениями $h, t: Q_1 \rightarrow Q_0$, которые каждой стрелке ставят в соответствие её начало и конец. Представление W колчана Q — это набор (возможно, конечномерных) векторных пространств W_i , $i \in Q_0$, над некоторым фиксированным полем \mathbb{k} , а также линейных отображений $W_a: W_{ta} \rightarrow W_{ha}$, $a \in Q_1$. Вектором

*Работа поддержана грантом фонда Саймонса.

размерностей $\alpha \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ представления W называется вектор с компонентами $\alpha_i = \dim_{\mathbb{k}} W_i$. Морфизм $\psi: W \rightarrow U$ представлений — это набор линейных отображений $\psi_i: W_i \rightarrow U_i$, $i \in Q_0$, удовлетворяющих условиям $\psi_{ha}W_a = U_a\psi_{ta}$ для всех $a \in Q_1$. Он является изоморфизмом тогда и только тогда, когда все отображения ψ_i — изоморфизмы.

При фиксированных пространствах W_i размерностей $\alpha_i \leq \infty$ классы изоморфизма представлений колчана Q с вектором размерности α находятся во взаимно-однозначном соответствии с орбитами группы

$$\mathrm{GL}(\alpha) := \prod_{i \in Q_0} \mathrm{GL}(W_i)$$

в пространстве представлений

$$\mathrm{Rep}(Q, \alpha) := \bigoplus_{a \in Q_1} \mathrm{Hom}(W_{ta}, W_{ha}).$$

Это действие определяется как $(g \cdot W)_a = g_{ha}W_a g_{ta}^{-1}$, где $g = (g_i)_{i \in Q_0} \in \mathrm{GL}(\alpha)$. Отметим, что однопараметрическая подгруппа $\Delta = \{(tE, \dots, tE)\}$ действует тривиально.

Колчаны предоставляют удобную интерпретацию многих классических задач линейной алгебры. Для нас особый интерес представляет задача классификации наборов из q линейных операторов и k линейных функций на m -мерном векторном пространстве. На языке колчанов она эквивалентна классификации $(m, 1)$ -мерных представлений колчана $L_{q,k}$ с двумя вершинами, q петлями в первой вершине и k стрелками, ведущими из первой вершины во вторую. Известно, что эта проблема является «дикой» даже для $q = 2$ и $k = 0$, т. е. нет никакой надежды выписать полный список неразложимых представлений. Более того, доказано, что теория представлений колчана $L_2 := L_{2,0}$ является неразрешимой; строгую формулировку и доказательство этого результата можно найти в [1, 3]. Тем не менее в работе [2] для случая алгебраически замкнутого поля произвольной характеристики указана общая теоретико-инвариантная процедура, позволяющая, в частности, устанавливать, изоморфны ли два представления колчана с данным вектором размерностей.

В этой работе мы для $\alpha = (m, 1)$ выделим в пространстве $\mathrm{Rep}(L_{q,k}, \alpha)$ открытое подмножество, на котором можно не только построить эффективный классификационный алгоритм, но и выписать конечный набор нормальных форм.

Пусть Q — некоторый колчан, α — вектор размерностей. Зафиксируем дополнительный вектор размерностей ζ и рассмотрим расширенное пространство представлений

$$\mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta) := \mathrm{Rep}(Q, \alpha) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{\alpha_i}, \mathbb{k}^{\zeta_i}).$$

Его элементы называют *оснащёнными представлениями* колчана Q . Определим действие группы $\mathrm{GL}(\alpha)$ на $\mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ следующим образом:

$$g \cdot (M, (f_i)_{i \in Q_0}) = (g \cdot M, (f_i g_i^{-1})_{i \in Q_0}).$$

Оснащённое представление $(M, (f_i)_{i \in Q_0})$ называется *стабильным*, если не существует ненулевого собственного подпредставления N представления M , в котором $N_i \subseteq \ker f_i$ для всех $i \in Q_0$. Обозначим через $\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta)$ множество стабильных оснащённых представлений. Известно (см., например, [9, теорема 2.3]), что подмножество $\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta)$ допускает геометрический фактор, т. е. морфизм в алгебраическое многообразие $\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta) := \text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta) // \text{GL}(\alpha)$, слои которого совпадают с $\text{GL}(\alpha)$ -орбитами. Более того, для колчанов без ориентированных циклов М. Райнеке доказал [9, утверждение 3.9], что фактор $\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta)$ изоморфен грассманиану подпредставлений некоторого инъективного представления колчана Q . В общем случае фактор не является проективным многообразием и не может быть реализован как грассманиан подпредставлений. Тем не менее геометрическая структура фактора может быть частично прояснена, если рассмотреть проекцию $\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta)$ на стандартный категорный фактор $\text{Rep}(Q, \alpha, \zeta) // \text{GL}(\alpha)$ и ограничиться изучением её слоёв (см. [4, 5]).

Оснащённые представления допускают следующую полезную интерпретацию. Добавим к колчану Q дополнительную вершину ∞ и соединим каждую из вершин $i \in Q_0$ с вершиной ∞ дополнительными ζ_i стрелками. Обозначим полученный колчан через Q^ζ . Рассмотрим новый вектор размерностей α^ζ , у которого $\alpha_i^\zeta = \alpha_i$ для $i = 1, \dots, n$ и $\alpha_\infty^\zeta = 1$. Нетрудно показать, что множества $\text{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ и $\text{Rep}(Q^\zeta, \alpha^\zeta)$ могут быть естественным образом отождествлены.

В частности, $\text{Rep}(L_{q,k}, (m, 1))$ — это то же самое, что $\text{Rep}(L_q^{(k)}, m^{(k)})$ или $\text{Rep}(L_q, m, k)$. Таким образом, на открытом по Зарискому подмножестве $\text{Rep}^s(L_{q,k}, (m, 1))$ пространства $\text{Rep}(L_{q,k}, (m, 1))$ возможна полная классификация представлений. Переводя определение стабильной пары на язык линейной алгебры, мы можем сказать, что $\text{Rep}^s(L_{q,k}, (m, 1))$ состоит из наборов

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_q, f_1, \dots, f_k) \in (\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^m))^q \oplus ((\mathbb{k}^m)^*)^k,$$

для которых никакое общее инвариантное подпространство операторов φ_i не лежит в пересечении ядер всех f_j . Мы покажем, как эта классификация может быть явно проведена над произвольным полем \mathbb{k} .

Из [8, утверждение 0.9] следует, что морфизм факторизации

$$\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta) \rightarrow \mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta)$$

является локально тривиальным расслоением. Впрочем, хотелось бы явно описать конечное (и по возможности минимальное) тривиализующее покрытие фактора. Мы построим такое покрытие с помощью \mathcal{J} -скелетов оснащённых представлений. Аналогичное понятие было введено К. Бонгартцем и Б. Хьюзген-Циммерманн для представлений конечномерных алгебр (см., например, [6]); мы слегка изменили и частично упростили его для интересующей нас ситуации. А именно, мы называем \mathcal{J} -скелетом набор путей ненулевой длины в колчане Q^ζ , оканчивающихся в ∞ , вместе с каждым путём содержащий все его финальные отрезки (кроме e_∞ , пути нулевой длины, отвечающего вершине ∞). Мы покажем (теорема 4.5), что $\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta) = \bigcup_{\mathfrak{S}} X(\mathfrak{S})$, где $X(\mathfrak{S})$ — это открытые

подмножества, параметризуемые J -скелетами \mathfrak{S} , причём $X(\mathfrak{S}) \cong \mathrm{GL}(\alpha) \times \mathbb{A}^N$ для некоторого натурального N и ограничение морфизма факторизации на каждое из подмножеств $X(\mathfrak{S})$ является проекцией на второй сомножитель.

Раздел 2 посвящён обобщению конструкции, полученной в работе [9]. В разделе 3 даётся определение J -скелетов оснащённых представлений и устанавливается их существование. В разделе 4 мы доказываем, что фактор может быть вложен как локально замкнутое подмногообразие в произведение классических грассманианов, и строим упомянутое выше тривиализующее покрытие $\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta)$. Кроме того, мы указываем способ построения семейства нормальных форм для каждой стабильной пары (конструкция 4.4) и алгоритм, позволяющий определить, изоморфны ли два стабильных оснащённых представления (следствие 4.6). В разделе 5 мы приводим ряд примеров, демонстрирующих, как работает эта техника.

Автор благодарен И. В. Аржанцеву за ценные обсуждения. Кроме того, автор благодарен В. Л. Попову, обратившему его внимание на работу [2].

2. Стабильные оснащённые представления

Пусть Q — колчан с n вершинами, а α и ζ — два вектора размерностей. Выберем векторное пространство

$$V = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i,$$

где $\dim V_i = \zeta_i$, $i \in Q_0$. Элементы пространства оснащённых представлений $\mathrm{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ можно рассматривать как пары (M, f) , где M — представление Q , а $f = (f_i: M_i \rightarrow V_i)_{i \in Q_0}$ — отображение градуированных векторных пространств.

Напомним, что путь в колчане Q — это один из символов e_i , $i \in Q_0$, или формальное произведение стрелок $a_1 \cdots a_k$, в котором $t(a_i) = h(a_{i+1})$ для всех $i = 1, \dots, k-1$. Для пути $\tau = a_1 \cdots a_k$ обозначим $t(\tau) = t(a_k)$ и $h(\tau) = h(a_1)$. Положим также $h(e_i) = t(e_i) = i$. Последовательные пути можно перемножать по следующему естественному правилу: если $h(\tau) = t(\sigma)$, то произведение $\sigma \cdot \tau$ определяется как конкатенация этих путей. Символы e_i следует рассматривать как пути нулевой длины; иными словами, $e_i^2 = e_i$ для всех $i \in Q_0$ и $\tau e_{t(\tau)} = e_{h(\tau)} \tau$ для каждого пути τ .

Для каждой вершины $i \in Q_0$ обозначим через I_i следующее представление колчана Q . Положим

$$(I_i)_j = (\mathrm{span}\{\tau \mid \tau: j \rightsquigarrow i \text{ — путь в } Q\})^*,$$

где $\tau: j \rightsquigarrow i$ означает, что путь τ начинается в j -й вершине и заканчивается в i -й, а $(\cdot)^*$ означает переход к двойственному векторному пространству. Для стрелки $a: k \rightarrow l$ определим $((I_i)_{af})(\tau) = f(\tau a)$, где $\tau: l \rightsquigarrow i$, $f \in (I_i)_k$. Это можно переписать в более удобном виде с помощью элементов $(I_i)_j$, двойственных к путям. А именно, каждому пути $\tau: j \rightsquigarrow i$ в колчане Q поставим

в соответствие такой элемент τ^* пространства $(I_i)_j$, что для каждого $\sigma: j \rightsquigarrow i$ имеем

$$\tau^*(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau = \sigma, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что элементы $(I_i)_j$ могут быть записаны как (возможно, бесконечные) формальные линейные комбинации τ^* по всем $\tau: i \rightsquigarrow j$. В этих обозначениях отображения $(I_i)_a$, $a \in Q_1$, принимают следующий вид:

$$(I_i)_a(\tau^*) = \begin{cases} \lambda^*, & \text{если } \tau = \lambda a, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим представление

$$J := \bigoplus_{i \in Q_0} I_i \otimes_{\mathbb{k}} V_i.$$

Заметим, что для J_i как векторного пространства над \mathbb{k} имеем

$$J_i = e_i J \cong \prod_{j \in Q_0} (I_j)_i \otimes_{\mathbb{k}} V_j \cong \prod_{j \in Q_0} \prod_{\tau: i \rightsquigarrow j} V_j \cong \prod_{\tau: i \rightsquigarrow j} V_j^{(\tau)}.$$

В последнем прямом произведении мы ввели дополнительные индексы, чтобы иметь возможность различать компоненты V_j , отвечающие разным путям.

Теперь для каждой пары $(M, f) \in \text{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ определим отображение

$$\Phi_{(M, f)} = (\varphi_i)_{i \in Q_0}: M \rightarrow J$$

следующим образом:

$$\varphi_i = \prod_{\tau: i \rightsquigarrow j} f_j \tau: M_i \rightarrow \prod_{\tau: i \rightsquigarrow j} V_j^{(\tau)}, \quad (2.1)$$

где $\tau(x) := M_{a_1} \dots M_{a_k}(x)$ для $x \in M_i$ и $\tau = a_1 \dots a_k$.

Следующая лемма доказывается непосредственной проверкой.

Лемма 2.1. *Отображение $\Phi_{(M, f)}$ является морфизмом представлений Q .*

Утверждение 2.2. *Подпространство*

$$\ker \Phi_{(M, f)} = \bigoplus_{i \in Q_0} \ker \varphi_i -$$

это максимальное подпредставление в M , содержащееся в $\ker f$.

Доказательство. По лемме 2.1 подпространство $\ker \Phi_{(M, f)}$ является подпредставлением представления M . Кроме того, нетрудно убедиться, что $\ker \Phi_{(M, f)} \subseteq \ker f$. Пусть теперь U — это подпредставление M , содержащееся в $\ker f$. Для каждого $\tau: i \rightsquigarrow j$ имеем тогда, что $\tau U_i = \tau e_i U = \tau U = e_j \tau U \subseteq U_j$. Отсюда следует, что $f_j(\tau \cdot x) = 0$ для всех $x \in U$, $j \in Q_0$ и для всех путей τ , т. е. $U \subseteq \ker \Phi_{(M, f)}$. \square

Следствие 2.3. *Отображение $\Phi_{(M,f)}: M \rightarrow J$ инъективно тогда и только тогда, когда пара (M, f) стабильна.*

Это наблюдение очень важно для нашей конструкции. Отображениям φ_i отвечают (возможно, бесконечные) матрицы со строками $f_{iq\tau}$, где $\tau: j \rightsquigarrow i$, $q \in \{1, \dots, \zeta_i\}$, а через f_{iq} мы обозначили q -ю строку матрицы отображения f_i . При этом отображение инъективно тогда и только тогда, когда один из миноров размера $\alpha_i \times \alpha_i$ соответствующей матрицы не равен нулю. Более того, оказывается, что для проверки инъективности отображения $\Phi_{(M,f)}$ достаточно ограничиться рассмотрением некоторого естественного конечного набора этих миноров. Чтобы описать этот набор, нам удобно будет обратиться к другой интерпретации оснащённых представлений.

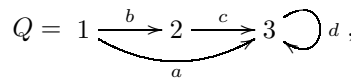
Рассмотрим колчан Q^ζ с множеством вершин $Q_0^\zeta = Q_0 \cup \{\infty\}$, стрелками которого являются стрелки колчана Q и ещё по ζ_i стрелок из каждой вершины $i \in Q_0$ в ∞ . Обозначим новые стрелки через f_{iq} , где i указывает на начало стрелки, $q \in \{1, \dots, \zeta_i\}$. Кроме того, мы расширим вектор размерностей α до $\alpha^\zeta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{Q_0^\zeta}$, положив $\alpha_i^\zeta = \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$, и $\alpha_\infty^\zeta = 1$.

Заметим теперь, что пространства $\text{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ и $\text{Rep}(Q^\zeta, \alpha^\zeta)$ могут быть $\text{GL}(\alpha)$ -эквивариантно отождествлены. В самом деле,

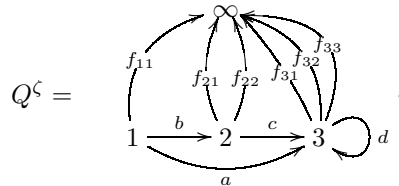
$$\begin{aligned} \text{Rep}(Q, \alpha, \zeta) &= \text{Rep}(Q, \alpha) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{\alpha_i}, \mathbb{k}^{\zeta_i}) \cong \\ &\cong \text{Rep}(Q, \alpha) \oplus \bigoplus_{i \in Q_0} \text{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}^{\alpha_i}, \mathbb{k})^{\zeta_i} = \text{Rep}(Q^\zeta, \alpha^\zeta). \end{aligned}$$

В терминах матриц этот изоморфизм можно трактовать следующим образом. Пусть (M, f) — оснащённое представление, а M — соответствующее представление Q^ζ . Тогда матрицы $\tilde{M}_{f_{iq}}$, $q = 1, \dots, \zeta_i$, являются строками матриц f_i (т. е. именно тем, что мы выше обозначили через f_{iq}). Это оправдывает кажущуюся путаницу в обозначениях.

Пример 2.4. Пусть



$\zeta = (1, 2, 3)$. Тогда



Более того, если $\alpha = (2, 2, 1)$ и

$$(M, f) = \begin{array}{ccccc} & \mathbb{k} & & \mathbb{k}^2 & & \mathbb{k}^3 \\ & \uparrow (1 \ 5) & & \uparrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & & \uparrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbb{k}^2 & \xrightarrow{M_b} & \mathbb{k}^2 & \xrightarrow{M_c} & \mathbb{k} & \xrightarrow{M_d} \mathbb{k} \end{array}$$

для некоторых M_a, M_b, M_c и M_d , то соответствующее представление \tilde{M} колчана Q^ζ имеет вид

$$\tilde{M} = \begin{array}{ccccc} & \mathbb{k} & & \mathbb{k} & & \mathbb{k} \\ & \uparrow (1 \ 5) & & \uparrow (3 \ 1) & & \uparrow (4 \ 2) \\ \mathbb{k}^2 & \xrightarrow{M_b} & \mathbb{k}^2 & \xrightarrow{M_c} & \mathbb{k} & \xrightarrow{M_d} \mathbb{k} \end{array}$$

(1) (0) (3)

Представление J также может быть естественным образом расширено до представления \tilde{J} колчана Q^ζ . Положим $\tilde{J}_i = J_i$ и $\tilde{J}_a = J_a$ для всех $i \in Q_0$ и $a \in Q_1$. Кроме того, пусть $\tilde{J}_\infty = \mathbb{k}$. Наконец, в качестве

$$\bigoplus_{b: i \rightarrow \infty} J_b: J_i \rightarrow \mathbb{k}^{\zeta_i}$$

мы возьмём проекцию

$$\prod_{\tau: i \rightsquigarrow j} V_j^{(\tau)} \rightarrow V_i^{(e_i)}, \quad i \in Q_0.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что построенное таким образом представление \tilde{J} изоморфно представлению I_∞ колчана Q^ζ . В частности, элементы \tilde{J}_i могут быть записаны как (возможно, бесконечные) формальные ряды от $(f_{jq\tau})^*$ по всем $j \in Q_0, q = 1, \dots, \zeta_j$ и $\tau: i \rightsquigarrow j$. Следовательно, пути в колчане Q^ζ можно рассматривать как линейные функции на \tilde{J} .

Для пары $(M, f) \in \text{Rep}(Q, \alpha, \zeta)$ рассмотрим соответствующее представление \tilde{M} колчана Q^ζ . Тогда отображение $\Phi_{(M, f)}$ индуцирует морфизм $\tilde{\Phi}_{\tilde{M}}: \tilde{M} \rightarrow \tilde{J}$ представлений Q^ζ , для которого $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i$ при $i \in Q_0$ и $\tilde{\varphi}_\infty = \text{id}_{\mathbb{k}}$. По следствию 2.3 пара (M, f) стабильна тогда и только тогда, когда соответствующее отображение $\tilde{\Phi}_{\tilde{M}}$ является вложением.

3. Скелеты стабильных пар

Пусть Q, α и ζ такие же, как и прежде.

Определение. Набор путей в колчане Q^ζ назовём e_∞ -набором, если все его элементы заканчиваются в вершине ∞ . Для e_∞ -набора \mathfrak{X} и вершины $i \in Q_0$

обозначим через \mathfrak{R}_i подмножество в \mathfrak{R} , состоящее из путей с началом в i -й вершине. Вектор размерностей e_∞ -набора \mathfrak{R} — это вектор $\underline{\dim} \mathfrak{R} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|Q_0|}$, i -я компонента которого равна мощности \mathfrak{R}_i .

Пусть теперь \tilde{M} — это α^ζ -мерное представление Q^ζ , а $\tau = f_{iq}a_1 \dots a_s$, $a_i \in Q_1$, — путь в Q^ζ , оканчивающийся в ∞ . Поскольку $\alpha_\infty^\zeta = 1$, матричное произведение $\tilde{M}_{f_{iq}} \tilde{M}_{a_1} \dots \tilde{M}_{a_s}$ есть строка длины $\alpha_{t(a_s)}$. Эту строку естественно назвать матрицей пути τ . Теперь каждому α -мерному e_∞ -набору \mathfrak{R} мы поставим в соответствие полиномиальную функцию

$$D(\mathfrak{R}) = \prod_{i \in Q_0} D(\mathfrak{R}_i)$$

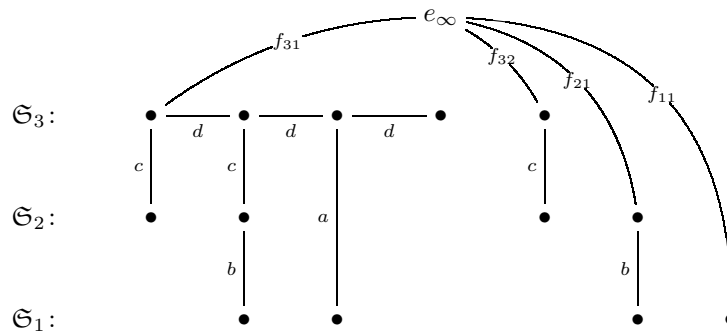
на $\text{Rep}(Q^\zeta, \alpha^\zeta)$, где $D(\mathfrak{R}_i)$ — это определитель матрицы размера $\alpha_i \times \alpha_i$, строками которой являются матрицы путей из \mathfrak{R}_i . Нетрудно проверить, что $D(\mathfrak{R})$ является $\text{GL}(\alpha)$ -полуинвариантной функцией. Следовательно, она определяет $\text{GL}(\alpha)$ -инвариантное подмножество $U(\mathfrak{R}) \subseteq \text{Rep}(Q^\zeta, \alpha^\zeta)$, состоящее из представлений, на которых она не обращается в нуль.

Наша матричная интерпретация следствия 2.3 показывает, что $\text{Rep}^s(Q^\zeta, \alpha^\zeta)$ является объединением подмножеств $U(\mathfrak{R})$ по всем возможным α -мерным e_∞ -наборам \mathfrak{R} . Теперь из этого покрытия мы выделим конечное подпокрытие.

Определение. Под *абстрактным J -скелетом* мы будем понимать e_∞ -набор \mathfrak{S} , который вместе с каждым путём содержит все его финальные отрезки, кроме e_∞ . Иными словами, если $\tau a \in \mathfrak{S}$, где $a \in Q_1$, то $\tau \in \mathfrak{S}$.

Абстрактный J -скелет \mathfrak{S} можно представлять себе как дерево с корнем e_∞ , другими вершинами которого являются пути из \mathfrak{S} . При этом две вершины σ и τ соединяются ребром, если $\sigma = \tau a$ для некоторой стрелки $a \in Q_1$.

Пример 3.1. Пусть Q и ζ такие же, как в примере 2.4. Тогда дерево



отвечает абстрактному J -скелету с вектором размерности $(4, 4, 5)$ (на рёбрах отмечены соответствующие стрелки). При этом

$$D(\mathfrak{S}) = \begin{vmatrix} f_{31} \\ f_{31}d \\ f_{31}d^2 \\ f_{31}d^3 \\ f_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{31}c \\ f_{31}dc \\ f_{32}c \\ f_{21} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{31}dcb \\ f_{31}d^2a \\ f_{21}b \\ f_{11} \end{vmatrix}.$$

Определение. Мы будем говорить, что абстрактный J -скелет \mathfrak{S} является J -скелетом стабильной пары (M, f) , если $\underline{\dim} \mathfrak{S} = \underline{\dim} M$ и соответствующее представление \tilde{M} колчана Q^ζ лежит в $U(\mathfrak{S})$.

Замечание. Так как пути в Q^ζ — линейные функции на J , это определение можно переформулировать на языке теории представлений. А именно, абстрактный J -скелет \mathfrak{S} является J -скелетом пары (M, f) , если ограничения путей из \mathfrak{S} дают базис в $\tilde{\Phi}_{\tilde{M}}(\tilde{M})$.

Лемма 3.2. Каждая стабильная пара (M, f) обладает J -скелетом.

Доказательство. Пусть (M, f) — стабильная пара. Пусть также \tilde{M} — соответствующее представление колчана Q^ζ . Обозначим через N его образ $\tilde{\Phi}_{\tilde{M}}(\tilde{M}) \subseteq \tilde{J}$. Прежде всего мы должны показать, что ограничения путей в Q порождают N^* как векторное пространство. Пусть $\varpi_1, \dots, \varpi_m$ — базис в $\tilde{\Phi}_{\tilde{M}}(\tilde{M})$, где $\varpi_i = \sum c_\tau \tau^*$. Заметим, что для некоторого t

$$\dim \left(\text{span} \left\{ \sum_{\tau, l(\tau) \leq t} c_\tau \tau^* \right\} \right) = m,$$

где через $l(\tau)$ обозначена длина пути τ . Тогда, очевидно, линейная оболочка всех путей длины не более t порождает $\tilde{\Phi}_{\tilde{M}}(\tilde{M})^*$.

Теперь мы видим, что из ограничений путей можно выбрать базис пространства $\tilde{\Phi}_{\tilde{M}}(\tilde{M})^*$, но пока неясно, почему можно найти J -скелет с требуемым свойством.

Будем индуктивно строить J -скелет нашего представления. Начнём с того, что для каждой вершины $i \in Q_0$ выберем максимальный набор $f_{i_{q_1}}, \dots, f_{i_{q_t}}$, ограничения $f_{i_{q_1}}|_N, \dots, f_{i_{q_t}}|_N$ элементов которого линейно независимы. Далее на каждом шаге мы будем добавлять путь τa , где τ — один из уже выбранных путей, a — некоторая стрелка, причём ограничение $\tau a|_N$ не лежит в линейной оболочке ограничений предыдущих путей. Этот процесс мы будем продолжать до тех пор, пока это возможно; таким образом мы получим некоторое максимальное среди всех ограничений абстрактных J -скелетов линейно независимое подмножество $\Gamma \subseteq N^*$. Впрочем, мы должны ещё проверить, что оно порождает N^* . Пусть $\tau|_N \notin \text{span}\{\Gamma\}$. Если ограничение на N никакого из финальных отрезков τ не лежит в $\text{span}\{\Gamma\}$, то мы нашли стрелку $f_{l_{q_i}}$, ограничение которой не лежит в $\text{span}\{\Gamma\}$, противоречие. Таким образом, $\tau = \mu\nu$, где $\mu|_N \in \text{span}\{\Gamma\}$, т. е. $\mu|_N = \sum_{\kappa \in \Gamma} c_\kappa \kappa|_N$. Следовательно, $\tau|_N = \sum_{\kappa \in \Gamma} c_\kappa \kappa|_N \nu|_N$. Но в силу максимальной Γ каждый из $\kappa|_N \nu|_N$ лежит в $\text{span}\{\Gamma\}$. \square

Из леммы 3.2 следует, что $\text{Rep}^s(Q^\zeta, \alpha^\zeta)$ является объединением $U(\mathfrak{S})$, где \mathfrak{S} пробегает все α -мерные J -скелеты. Так как число J -скелетов с фиксированным вектором размерности конечно, мы получаем требуемое конечное покрытие множества $\text{Rep}^s(Q^\zeta, \alpha^\zeta)$.

4. Вложение пространства модулей

Пусть $\Gamma(\alpha)$ — множество путей, возникающих во всех J -скелетах с вектором размерности α , а $\tilde{\Gamma}(\alpha)$ — объединение Γ с множеством

$$\{\tau a \mid \tau \in \Gamma(\alpha), a \in Q_1, h(a) = t(\tau)\}.$$

Пусть также

$$\hat{J} = \bigoplus_{\tau \in \tilde{\Gamma}(\alpha)} V_{h(\tau)}^{(\tau)}.$$

Отметим, что на \hat{J} имеется естественная Q_0 -градуировка. В самом деле, мы можем положить

$$\hat{J}_i = \bigoplus_{\tau \in \tilde{\Gamma}(\alpha), t(\tau)=i} V_{h(\tau)}^{(\tau)}.$$

Зададим отображение

$$\hat{\Phi}_{(M,f)}: M \rightarrow \hat{J}$$

следующим образом:

$$\hat{\varphi}_i = \bigoplus_{\tau \in \tilde{\Gamma}(\alpha)} f_{h(\tau)\tau}: M_i \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \tilde{\Gamma}(\alpha), t(\tau)=i} V_{h(\tau)}^{(\tau)} = \hat{J}_i.$$

Ясно, что пара (M, f) стабильна тогда и только тогда, когда отображение $\hat{\Phi}_{(M,f)}$ инъективно.

Зафиксируем некоторые обозначения. Пусть $\tilde{\Gamma}_i(\alpha)$ — подмножество в $\tilde{\Gamma}(\alpha)$, состоящее из путей, начинающихся в i -й вершине. Пусть далее

$$(B^{(1)}, \dots, B^{(n)}) \in \prod_{i=1}^n \text{Mat}_{|\tilde{\Gamma}_i(\alpha)| \times \alpha_i}(\mathbb{k}).$$

По определению $\tilde{\Gamma}(\alpha)$ строки матрицы $B^{(i)}$ отвечают путям в Q^ζ , начинающимся в i -й вершине. Таким образом, вместо того чтобы использовать численные индексы, мы будем для пути τ в колчане Q обозначать через B_τ строку матрицы $B^{(t(\tau))}$, отвечающую τ . Наконец, для произвольного подмножества $\mathfrak{T} \subseteq \tilde{\Gamma}(\alpha)$ (не обязательно являющегося J -скелетом) с вектором размерности α обозначим через $B(\mathfrak{T}_i)$ подматрицу матрицы $B^{(i)}$, состоящую из строк, отвечающих путям из \mathfrak{T}_i , а через $U(\mathfrak{T})$ — открытое подмножество в $\prod_{i=1}^n \text{Mat}_{|\tilde{\Gamma}_i(\alpha)| \times \alpha_i}(\mathbb{k})$, состоящее из наборов $(B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$, для которых все $B(\mathfrak{T}_i)$ невырожденны.

Для Q_0 -градуированного векторного пространства $W = \bigoplus_{i \in Q_0} W_i$ положим

$$\text{Ином}_\alpha(W) := \prod_{i \in Q_0} \text{Ином}_{\alpha_i}(W_i),$$

где $\text{Ином}_{\alpha_i}(W_i)$ — это множество инъективных линейных отображений из векторного пространства \mathbb{k}^{α_i} в W_i . Определим $\text{Gr}_\alpha(W)$ как произведение грасммианов $\prod_{i \in Q_0} \text{Gr}_{\alpha_i}(W_i)$. Нетрудно убедиться, что $\text{Gr}_\alpha(W)$ есть фактор множества $\text{Ином}_\alpha(W)$ по естественному действию группы $\text{GL}(\alpha)$. Наконец, введём отображение

$$\hat{\Phi}: \text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta) \rightarrow \text{Ином}_\alpha(\hat{J}), \quad (M, f) \mapsto \hat{\Phi}_{(M, f)}.$$

Отождествим $\text{Ином}_\alpha(\hat{J})$ с открытым подмножеством

$$\bigcup_{\mathfrak{S}: \dim \mathfrak{S} = \alpha} U(\mathfrak{S}) \subseteq \prod_{i=1}^n \text{Mat}_{|\tilde{\Gamma}_i(\alpha)| \times \alpha_i}(\mathbb{k}).$$

Легко убедиться, что $\text{Im } \hat{\Phi}$ содержится в

$$Z(\alpha) := \bigcup_{\substack{\mathfrak{S} - J\text{-скелет,} \\ \dim(\mathfrak{S}) = \alpha}} U(\mathfrak{S}).$$

Определение. Для J -скелета \mathfrak{S} положим

$$X(\mathfrak{S}) = \text{Im}(\hat{\Phi}) \cap U(\mathfrak{S}).$$

Утверждение 4.1. Образ $\hat{\Phi}$ является локально замкнутым подмногообразием в $\text{Ином}_\alpha(\hat{J})$.

Доказательство. Достаточно показать, что каждое из подмножеств $X(\mathfrak{S})$ замкнуто в $U(\mathfrak{S})$. Зафиксируем J -скелет \mathfrak{S} и для каждой стрелки $a \in Q_1$ положим

$$\mathfrak{S}a = \{\tau a \mid \tau \in \mathfrak{S}, h(a) = t(\tau)\}.$$

Если набор матриц $(B^{(1)}, \dots, B^{(n)}) \in U(\mathfrak{S})$ лежит в $\text{Im } \hat{\Phi}$, мы можем восстановить все отображения $M_a, a \in Q_1$, для его прообраза (M, f) , так как для всех $a \in Q_1$ имеем $B(\mathfrak{S}_{ta}a) = B(\mathfrak{S}_{ta})M_a$ и, следовательно, $M_a = B(\mathfrak{S}_{ta})^{-1}B(\mathfrak{S}_{ta}a)$. Теперь заметим, что $(B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$ принадлежит образу $\hat{\Phi}$ в том и только том случае, когда для всех $\tau \in \Gamma(\alpha)$ и a , для которых $ta = h(\tau)$, имеет место равенство $B_{\tau a} = B_\tau M_a$. Используя полученное для a выражение, мы перепишем его в виде

$$B_{\tau a} = B_\tau B(\mathfrak{S}_{ta})^{-1}B(\mathfrak{S}_{ta}a). \quad (4.1)$$

Собранные вместе, эти уравнения определяют замкнутое по Зарискому подмногообразие $X(\mathfrak{S})$ в $U(\mathfrak{S})$. Склеивая их, мы получаем замкнутое подмногообразие $X_0(\alpha) \subseteq Z(\alpha)$, совпадающее с $\text{Im } \hat{\Phi}$. Следовательно, $\text{Im } \hat{\Phi}$ является локально замкнутым подмногообразием в $\text{Ином}_\alpha(\hat{J})$. \square

Из доказательства этого утверждения мы получаем следствие.

Следствие 4.2. *Отображение*

$$\hat{\Phi}: \text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta) \rightarrow \text{Im } \hat{\Phi} = X_0(\alpha)$$

является $\text{GL}(\alpha)$ -эквивариантным изоморфизмом алгебраических многообразий.

Доказательство. Чтобы построить обратный морфизм, мы должны найти способ восстанавливать пару (M, f) по её образу $(B^{(1)}, \dots, B^{(n)}) \in \text{IHom}_\alpha(\hat{J})$. Но f_{iq} может быть получено как $B_{f_{iq}}$, а M_a равно $B(\mathfrak{S}_{ta})^{-1}B(\mathfrak{S}_{ta}a)$ в $U(\mathfrak{S})$, тогда как на пересечениях $U(\mathfrak{S}) \cap U(\mathfrak{T})$ равенство

$$B(\mathfrak{S}_{ta})^{-1}B(\mathfrak{S}_{ta}a) = B(\mathfrak{T}_{ta})^{-1}B(\mathfrak{T}_{ta}a)$$

является прямым следствием соотношений, определяющих X_0 .

Эквивариантность этого изоморфизма очевидна. \square

Далее мы будем отождествлять $X(\mathfrak{S}) \subseteq \text{IHom}_\alpha(\hat{J})$ с его прообразом

$$\text{Rep}(Q, \mathfrak{S}) = \hat{\Phi}^{-1}(X(\mathfrak{S})) \subseteq \text{Rep}^s(q, \alpha, \zeta)$$

и рассуждать о нём как о подмножестве в $\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta)$ всякий раз, как нам будет удобно.

Далее мы опишем две важные конструкции, которые будут использованы при доказательстве теоремы 4.5.

Конструкция 4.3. **Морфизм факторизации** $X(\mathfrak{S}) \rightarrow X(\mathfrak{S})//\text{GL}(\alpha)$.

Отождествим $\text{IHom}_\alpha(\hat{J})$ с открытым по Зарискому подмножеством в

$$\prod_{i \in Q_0} \text{Mat}_{|\tilde{\Gamma}_i(\alpha)| \times \alpha_i}(\mathbb{k}).$$

Зафиксируем J -скелет \mathfrak{S} и предположим, что его элементы как-либо упорядочены (например, лексикографически). Для набора матриц $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$ определим

$$B_{\hat{\mathfrak{S}}} := (B_{\hat{\mathfrak{S}}}^{(1)}, \dots, B_{\hat{\mathfrak{S}}}^{(n)}),$$

где $B_{\hat{\mathfrak{S}}}^{(i)}$ — это подматрица матрицы $B^{(i)}$, состоящая из строк, которые отвечают путям из

$$\bigcup_{a \in Q_1} (\mathfrak{S}a \setminus \mathfrak{S}) \cup \{f_{iq} \notin \mathfrak{S}\}.$$

Обозначим через T_i число строк в $B_{\hat{\mathfrak{S}}}^{(i)}$.

Рассмотрим морфизм

$$\pi_{\mathfrak{S}}: \prod_{i \in Q_0} \text{Mat}_{|\tilde{\Gamma}_i(\alpha)| \times \alpha_i}(\mathbb{k}) \rightarrow \prod_{i \in Q_0} \text{Mat}_{T_i \times \alpha_i}(\mathbb{k}),$$

заданный по правилу

$$B^{(i)} \mapsto (B^{(i)} \cdot B(\mathfrak{S}_i)^{-1})_{\hat{\mathfrak{S}}}. \quad (4.2)$$

Мы утверждаем, что он является морфизмом факторизации для действия $\text{GL}(\alpha)$ на $X(\mathfrak{S})$. Доказательство этого будет предъявлено ниже.

Конструкция 4.4. Сечение $s_{\mathfrak{S}}$: $\prod_{i \in Q_0} \text{Mat}_{T_i \times \alpha_i}(\mathbb{k}) \rightarrow X(\mathfrak{S})$. Пусть

$$C \in \prod_{i \in Q_0} \text{Mat}_{T_i \times \alpha_i}(\mathbb{k}).$$

Напомним, что каждая строка каждой из матриц $C^{(i)}$ отвечает пути из

$$\bigcup_{a \in Q_1} (\mathfrak{S}a \setminus \mathfrak{S}) \cup \{f_{iq} \notin \mathfrak{S}\}.$$

Возьмём единичную матрицу $E^{(i)}$ размера $\alpha_i \times \alpha_i$ и поставим в соответствие её j -й строке j -й путь из \mathfrak{S}_i (с учётом введённого выше порядка на путях). Теперь добавим к $C^{(i)}$ все строки $E^{(i)}$, отвечающие путям из

$$\mathfrak{S} \cap \left(\bigcup_{a \in Q_1, ta=i} \mathfrak{S}a \right)$$

и обозначим полученную матрицу через $\tilde{C}^{(i)}$. Нашим первым шагом будет восстановление стабильной пары (M^C, f^C) ; затем с её помощью мы получим матрицу в $\pi_{\mathfrak{S}}^{-1}(C)$. Положим $M_a^C = \tilde{C}(\mathfrak{S}a)$ для всех $a \in Q_1$ и

$$f_i^C = \begin{cases} E_{f_i}^{(i)}, & \text{если } f_i \in \mathfrak{S}, \\ C_{f_i}^{(i)} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Наконец, возьмём $B^C = \Phi_{(M^C, f^C)}$. Отметим, что на языке линейной алгебры сечение морфизма факторизации — это нормальная форма. Таким образом, для каждой стабильной пары мы получаем конечное семейство нормальных форм, параметризуемое J -скелетами этой пары.

Теперь мы готовы доказать теорему.

Теорема 4.5.

1. Имеем

$$\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta) = \bigcup_{\mathfrak{S} - J\text{-скелет}} X(\mathfrak{S}),$$

где $X(\mathfrak{S})$ — открытые по Зарискому подмножества в $\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta)$, причём $X(\mathfrak{S}) \cong \text{GL}(\alpha) \times \mathbb{A}^N$ для некоторого натурального N , а ограничение на $X(\mathfrak{S})$ морфизма факторизации есть проекция на второй сомножитель. В частности,

$$\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta) = \bigcup_{\mathfrak{S} - J\text{-скелет}} X(\mathfrak{S}) // \text{GL}(\alpha)$$

является покрытием открытыми подмножествами, изоморфными аффинному пространству.

2. Пространство модулей $\mathcal{M}^s(Q, \alpha, \zeta)$ изоморфно локально замкнутому подмногообразию в $\text{Gr}_{\alpha}(\hat{J})$.

Доказательство. Прежде всего мы должны дать обоснование приведённым выше конструкциям.

Начнём с первой. Морфизм $\pi_{\mathfrak{S}}$ является $\mathrm{GL}(\alpha)$ -эквивариантным, так как для каждого $g \in \mathrm{GL}(\alpha)$ имеем

$$\pi_{\mathfrak{S}}(g \cdot B)^{(i)} = \pi_{\mathfrak{S}}(Bg^{-1})^{(i)} = (B^{(i)}g_i^{-1} \cdot g_i B(\mathfrak{S}_i)^{-1})_{\mathfrak{S}} = \pi_{\mathfrak{S}}(B_i).$$

Покажем, что морфизм $\pi_{\mathfrak{S}}$ сюръективен. Пусть $C \in \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Mat}_{T_i \times \alpha_i}(\mathbb{k})$, а $B^C \in X(\mathfrak{S})$ — набор матриц, предоставленный второй конструкцией. Мы должны убедиться, что $\pi_{\mathfrak{S}}(B^C) = C$. Но $B(\mathfrak{S}_i) = E^{(i)}$, так что $B(\mathfrak{S}a) = B(\mathfrak{S}_{ha})a = M_a^C = \tilde{C}(\mathfrak{S}a)$ для всех $a \in Q_1$, а значит, $\pi_{\mathfrak{S}}(B) = B_{\mathfrak{S}} = C$. Аналогично $B_{f_i}^{(i)} = C_{f_i}^{(i)}$ для всех $f_i \notin \mathfrak{S}$. Таким образом, $\pi_{\mathfrak{S}}(B) = C$, и следовательно, мы доказали сюръективность $\pi_{\mathfrak{S}}$ и корректность второй конструкции.

Теперь докажем, что слои $\pi_{\mathfrak{S}}$ совпадают с $\mathrm{GL}(\alpha)$ -орбитами в $X(\mathfrak{S})$. Заметим, что для $B^C \in \pi_{\mathfrak{S}}^{-1}(C)$ имеет место равенство $((B^C)^{(i)} \cdot B^C(\mathfrak{S}_i)^{-1})(\mathfrak{S}) = E^{(i)}$, где $E^{(i)}$ — единичная матрица. Нетрудно убедиться, что $\mathrm{GL}(\alpha)$ -орбита в $X(\mathfrak{S})$ содержит ровно один набор матриц с таким свойством. В частности, каждая матрица $B \in \pi_{\mathfrak{S}}^{-1}(C)$ равняется $g(B) \cdot B^C$, где $g(B)_i = B(\mathfrak{S}_i)$.

Таким образом, изоморфизм

$$\mathrm{GL}(\alpha) \times \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Mat}_{T_i \times \alpha_i}(\mathbb{k}) \rightarrow X(\mathfrak{S})$$

может быть получен как

$$(g, C) \mapsto g \cdot B^C = ((B^C)^{(i)} g_i^{-1})_{i \in Q_0}.$$

Чтобы доказать вторую часть теоремы, достаточно проверить, что каждый из факторов $X(\mathfrak{S})//\mathrm{GL}(\alpha)$ вкладывается в $\mathrm{Gr}(\mathfrak{S}) := U(\mathfrak{S})//\mathrm{GL}(\alpha)$ как локально замкнутое многообразие. Заметим, что естественная проекция

$$\pi_0: U(\mathfrak{S}) \rightarrow \mathrm{Gr}(\mathfrak{S})$$

может быть проинтерпретирована как отображение

$$\prod_{i \in Q_0} \mathrm{Mat}_{|\tilde{\Gamma}_i(\alpha)| \times \alpha_i}(\mathbb{k}) \rightarrow \prod_{i \in Q_0} \mathrm{Mat}_{(|\tilde{\Gamma}_i(\alpha)| - \alpha_i) \times \alpha_i}(\mathbb{k}), \quad B \mapsto (B^{(i)} \cdot B(\mathfrak{S}_i)^{-1})_{\tilde{\Gamma}(\alpha) \setminus \mathfrak{S}}.$$

Рассуждая в этих терминах, легко понять, что фактор $X(\mathfrak{S})//\mathrm{GL}(\alpha)$ изоморфен подмногообразию в $\mathrm{Gr}(\mathfrak{S})$, задаваемому уравнениями

$$C_{\tau a} = C_{\tau} C(\mathfrak{S}_{ta} a)$$

по всем путям τ и стрелкам a , для которых $\tau a \notin \left(\bigcup_{a \in Q_1, ta=i} \mathfrak{S}a \right)$. \square

Следствие 4.6.

1. Каждая стабильная пара (M, f) обладает конечным семейством нормальных форм, каждая из которых отвечает одному из J -скелетов пары (M, f) . Если \mathfrak{S} — J -скелет пары (M, f) , то соответствующая нормальная форма пары (M, f) имеет вид (M^C, f^C) , где $C = \pi_{\mathfrak{S}}(M, f)$.

2. Следующая процедура может быть использована для проверки изоморфности двух стабильных пар (M, f) и (M', f') .

- а) Посчитать наборы матриц B и B' , отвечающие (M, f) и (M', f') .
- б) Найти их J -скелеты, проверив невырожденность максимальных миноров матриц B и B' .
- в) Если у этих пар нет общих J -скелетов, они не изоморфны.
- г) Если \mathfrak{S} является общим J -скелетом, найти (M^C, f^C) и $(M^{C'}, f^{C'})$ для $C = \pi_{\mathfrak{S}}(B)$ и $C' = \pi_{\mathfrak{S}}(B')$.
- д) Пары (M, f) и (M', f') изоморфны тогда и только тогда, когда $(M^C, f^C) = (M^{C'}, f^{C'})$.

Замечание. Размерности аффинных пространств, покрывающих фактор, равны размерности самого фактора, т. е. разности $\dim \text{Rep}(Q, \alpha, \zeta) - \dim \text{GL}(\alpha)$. Для $Q = L_{q,k}$ получаем

$$\begin{aligned} \dim X(\mathfrak{S})//\text{GL}_m &= \dim \text{Rep}(L_q, m, k) - \dim \text{GL}_m = \\ &= (m^2q + mk) - m^2 = m(mq + k - m), \end{aligned}$$

так что $X(\mathfrak{S})//\text{GL}_m \cong \mathbb{A}^{m(mq+k-m)}$.

Мы описали аффинные карты, покрывающие фактор. Так как все они являются аффинными пространствами, на каждой из них мы получаем удобную систему локальных координат. Функции перехода между ними могут быть заданы следующим образом. Пусть \mathfrak{S} и \mathfrak{T} — два J -скелета, а $B \in \prod_{i \in Q_0} \text{Mat}_{|\Gamma_i(\alpha)| \times \alpha_i}(\mathbb{k})$ — набор матриц, отвечающий точке в пространстве $\text{Rep}^s(Q, \alpha, \zeta)$. Тогда мы можем выразить матричные элементы B через матричные элементы $(B^{(i)} \cdot B(\mathfrak{S}_i)^{-1})_{\mathfrak{S}}$, $i \in Q_0$, и с их помощью получить выражение для $(B^{(j)} \cdot B(\mathfrak{T}_j)^{-1})_{\mathfrak{T}}$.

Эта же процедура может быть использована для установления соответствия между нормальными формами одной стабильной пары, полученными с помощью разных J -скелетов.

5. Примеры

Пусть Q — это колчан L_q , $\alpha = (m)$. Легко убедиться, что каждый J -скелет, который может в такой ситуации возникнуть, является подмножеством в

$$\{f_i W(a_1, \dots, a_q) \mid W \text{ — слово из символов } a_j \text{ длины не более } m-1\},$$

так что мы можем положить

$$\tilde{\Gamma}(m) = \{f_i W(a_1, \dots, a_q) \mid W \text{ — слово из символов } a_j \text{ длины не более } m\}.$$

В таком случае в пространстве \hat{J} можно выбрать базис $\{u^{i,W}\}_{i,W}$, индексированный числами $i = 1, \dots, k$ и словами $W = W(a_1, \dots, a_q)$ длины не более m , и

положить

$$\varphi(m) = \sum_{i,W} f_i W(a_1, \dots, a_q) m \cdot u^{i,W}.$$

Пример 5.1. Пусть $q = k = 1$. В этом случае мы имеем дело с задачей классификации пар (a, f) , где a — линейный оператор в пространстве \mathbb{k}^m , а f — линейная функция. Расширенный колчан $L_1^{(1)} = L_{1,1}$ имеет вид

$$a \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} 1 \xrightarrow{f} \infty.$$

Возможен только один J -скелет, а именно $\mathfrak{S} = \{f, fa, \dots, fa^{m-1}\}$. Значит, $\tilde{\Gamma}(m) = \{f, fa, \dots, fa^m\}$, а $\hat{J} = \bigoplus_{i=0}^m V_1^{(fa^i)}$, где $V_1 = \mathbb{k}$, так что как векторное пространство \hat{J} совпадает с \mathbb{k}^{m+1} . Имеем

$$\hat{\Phi}: \text{Rep}(L_1, m, 1) \rightarrow \text{Mat}_{(m+1) \times m}(\mathbb{k}), \quad (a, f) \mapsto \hat{\Phi}_{(a,f)} = \begin{pmatrix} f \\ fa \\ \vdots \\ fa^m \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что условие стабильности, т. е. инъективности отображения $\hat{\Phi}_{(a,f)}$, в данном случае равносильно тому, что f является циклическим вектором для естественного действия $\text{GL}_m : (\mathbb{k}^m)^*$. Подмножество $X(\mathfrak{S}) \subseteq \text{Mat}_{(m+1) \times m}(\mathbb{k})$ совпадает с $U(\mathfrak{S})$, т. е. состоит из всех матриц $B = (b_{ij})$, у которых первые m строк линейно независимы. В самом деле, единственное условие $B_{fa^m} = B_{fa^{m-1}} B(\mathfrak{S})^{-1} B(\mathfrak{S}a)$ является тождеством. Далее, для матрицы A размера $(m+1) \times m$ имеем, что $A_{\mathfrak{S}} = A_{fa^m}$, т. е. морфизм факторизации $\pi_{\mathfrak{S}}$ имеет вид

$$\pi_{\mathfrak{S}} : B = (b_{ij}) \mapsto (b_{m+1,1}, \dots, b_{m+1,m}) \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}^{-1}.$$

Пространство модулей изоморфно \mathbb{A}^m , и $\pi_{\mathfrak{S}}$ допускает сечение

$$\mathbb{A}^m \rightarrow \text{Rep}(L_1, m, 1),$$

отправляющее $C = (c_0, \dots, c_{m-1})$ в пару

$$f^C = (1, 0, \dots, 0), \quad a^C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_{m-2} & c_{m-1} \end{pmatrix},$$

где c_i — коэффициенты характеристического многочлена оператора a .

Пример 5.2. Пусть $q = 1$, $m = k = 2$. Соответствующий расширенный колчан $L_1^{(2)} = L_{1,2}$ имеет вид

$$a \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xleftarrow{f_2} \end{array} \infty .$$

Возможны три J -скелета:

$$\mathfrak{S}_1 = \{f_1, f_1a\}, \quad \mathfrak{S}_2 = \{f_2, f_2a\}, \quad \mathfrak{S}_3 = \{f_1, f_2\}.$$

Таким образом,

$$\tilde{\Gamma}(m) = \{f_1, f_2, f_1a, f_2a, f_1a^2, f_2a^2\}$$

и

$$\hat{\Phi}: \text{Rep}(L_1, 2, 2) \rightarrow \text{Mat}_{6 \times 2}(\mathbb{k}), \quad (a, f_1, f_2) \mapsto \hat{\Phi}_{(a, f_1, f_2)} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_1a \\ f_2a \\ f_1a^2 \\ f_2a^2 \end{pmatrix}.$$

В частности, $\hat{J} = \mathbb{k}^6$.

Прежде всего мы опишем подмножество

$$\text{Im } \hat{\Phi} = X(\mathfrak{S}_1) \cup X(\mathfrak{S}_2) \cup X(\mathfrak{S}_3) \subseteq \text{Mat}_{6 \times 2}(\mathbb{k}).$$

Карта $X(\mathfrak{S}_1)$ состоит из матриц $B = (b_{ij})$ размера 6×2 , удовлетворяющих условиям

$$|B(\mathfrak{S}_1)| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а также

$$B_{f_2a} = B_{f_2}B(\mathfrak{S}_1)^{-1}B(\mathfrak{S}_1a), \quad B_{f_2a^2} = B_{f_2a}B(\mathfrak{S}_1)^{-1}B(\mathfrak{S}_1a).$$

Последние два равенства могут быть расписаны как

$$(b_{41}, b_{42}) = (b_{21}, b_{22}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix}$$

и

$$(b_{61}, b_{62}) = (b_{41}, b_{42}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix}$$

соответственно. Аналогично видим, что $X(\mathfrak{S}_2) \subseteq \text{Mat}_{6 \times 2}(\mathbb{k})$ состоит из матриц $B = (b_{ij})$, у которых

$$|B(\mathfrak{S}_2)| = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \neq 0$$

и

$$\begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{41} & b_{42} \\ b_{61} & b_{62} \end{pmatrix}.$$

Наконец, $X(\mathfrak{S}_3) \subseteq \text{Mat}_{6 \times 2}(\mathbb{k})$ — это подмножество, состоящее из матриц $B = (b_{ij})$, удовлетворяющих условиям

$$B(\mathfrak{S}_3) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

и

$$\begin{pmatrix} b_{51} & b_{52} \\ b_{61} & b_{62} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}.$$

Теперь выпишем морфизмы факторизации

$$\pi_{\mathfrak{S}_i} : \text{Rep}(L_1, \mathfrak{S}_i) \cong X(\mathfrak{S}_i) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{S}_1} : (a, f_1, f_2) &\mapsto \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 a \end{pmatrix}^{-1}, & B = (b_{ij}) &\mapsto \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}^{-1}; \\ \pi_{\mathfrak{S}_2} : (a, f_1, f_2) &\mapsto \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2 a \end{pmatrix}^{-1}, & B = (b_{ij}) &\mapsto \begin{pmatrix} b_{41} & b_{42} \\ b_{61} & b_{62} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}^{-1}; \\ \pi_{\mathfrak{S}_3} : (a, f_1, f_2) &\mapsto \begin{pmatrix} f_1 a \\ f_2 a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}^{-1}, & B = (b_{ij}) &\mapsto \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Каждый из морфизмов $\pi_{\mathfrak{S}_i}$ допускает сечение $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k}) \rightarrow \text{Rep}(L_1, \mathfrak{S}_i)$, отображающее матрицу $C = (x_{ab}^{(i)})$ в тройку (a^C, f_1^C, f_2^C) , в которой

$$\begin{aligned} a^C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, & f_1^C &= (1, 0), & f_2^C &= (x_{11}^{(1)}, x_{12}^{(1)}) & \text{при } i = 1, \\ a^C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, & f_1^C &= (x_{11}^{(2)}, x_{12}^{(2)}), & f_2^C &= (1, 0) & \text{при } i = 2, \\ a^C &= C = \begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, & f_1^C &= (1, 0), & f_2^C &= (0, 1) & \text{при } i = 3. \end{aligned}$$

Если тройка $T := (a, f_1, f_2)$ принадлежит $\text{Rep}(Q, \mathfrak{S}_i) \cap \text{Rep}(Q, \mathfrak{S}_j)$ для некоторых $i \neq j$, получаем две нормальные формы

$$\left(a^{\pi_{\mathfrak{S}_i}(T)}, f_1^{\pi_{\mathfrak{S}_i}(T)}, f_2^{\pi_{\mathfrak{S}_i}(T)} \right), \quad \left(a^{\pi_{\mathfrak{S}_j}(T)}, f_1^{\pi_{\mathfrak{S}_j}(T)}, f_2^{\pi_{\mathfrak{S}_j}(T)} \right),$$

отвечающие (2×2) -матрицам $\pi_{\mathfrak{S}_i}(T) = (x_{ab}^{(i)})$ и $\pi_{\mathfrak{S}_j}(T) = (x_{ab}^{(j)})$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{x_{11}^{(3)}}{x_{12}^{(3)}} & \frac{1}{x_{12}^{(3)}} \\ x_{12}^{(3)} x_{21}^{(3)} - x_{11}^{(3)} x_{22}^{(3)} & x_{11}^{(3)} + x_{22}^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(3)} & x_{12}^{(3)} \\ x_{21}^{(3)} & x_{22}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_{11}^{(1)}}{x_{12}^{(1)}} & \frac{1}{x_{12}^{(1)}} \\ \frac{(x_{12}^{(1)})^2 x_{21}^{(1)} - (x_{11}^{(1)})^2 - x_{11}^{(1)} x_{12}^{(1)} x_{22}^{(1)}}{x_{12}^{(1)}} & \frac{x_{11}^{(1)} + x_{12}^{(1)} x_{22}^{(1)}}{x_{12}^{(1)}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_{11}^{(1)} + x_{12}^{(1)} x_{22}^{(1)}}{(x_{12}^{(1)})^2 x_{21}^{(1)} - (x_{11}^{(1)})^2 - x_{11}^{(1)} x_{12}^{(1)} x_{22}^{(1)}} & \frac{x_{12}^{(1)}}{(x_{12}^{(1)})^2 x_{21}^{(1)} - (x_{11}^{(1)})^2 - x_{11}^{(1)} x_{12}^{(1)} x_{22}^{(1)}} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Вернёмся ненадолго к случаю произвольных m , q и k . Поскольку фактор вложен в $\text{Gr}_m(\hat{J})$, неплохо было бы установить связь между локальными координатами на $Y(\mathfrak{S}) := X(\mathfrak{S})//\text{GL}(\alpha)$ и плюккеровыми координатами на $\text{Gr}_m(\hat{J})$. Заметим, что последние имеют вид $p_{\mathfrak{A}}$, где \mathfrak{A} пробегает m -элементные подмножества $\tilde{\Gamma}(m)$. В самом деле, естественная проекция

$$\text{Mat}_{k(m+1)^q \times m}(\mathbb{k}) \supseteq \text{IHom}_m(\hat{J}) \twoheadrightarrow \text{Gr}_m(\hat{J})$$

отображает матрицу B в точку ω_B , плюккеровы координаты которой — миноры матрицы B размера $m \times m$. Итак, обозначим через $p_{\mathfrak{A}}$ координату, соответствующую минору со строками из \mathfrak{A} . Что касается локальных координат на $Y(\mathfrak{S})$, их определение, а также правило Крамера позволяют понять, что они отвечают m -элементным подмножествам \mathfrak{A} множества $\tilde{\Gamma}(m)$, которые получаются из \mathfrak{S} заменой одного из элементов на элемент множества $(\mathfrak{S}a \setminus \mathfrak{S}) \cup \{f_i \notin \mathfrak{S}\}$.

В примере 5.2 $\text{Gr}_m(\hat{J}) = \text{Gr}_2(\mathbb{k}^6)$. Как было предложено выше, проиндексируем плюккеровы координаты парами путей. Например, вместо p_{25} мы будем теперь писать $p_{f_2, f_1 a^2}$. Для точки ω_B , отвечающей матрице $B \in \text{Mat}_{6 \times 2}(\mathbb{k})$ ранга m , эта координата равна (точнее, пропорциональна)

$$\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{51} & b_{52} \end{vmatrix},$$

что в свою очередь равняется

$$\begin{vmatrix} f_2 \\ f_1 a^2 \end{vmatrix},$$

если $(b_{ij}) = \hat{\Phi}((a, f_1, f_2))$. Мы получаем следующие выражения:

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_{f_2, f_1 a}}{p_{f_1, f_1 a}} & -\frac{p_{f_1, f_2}}{p_{f_1, f_1 a}} \\ -\frac{p_{f_1 a, f_1 a^2}}{p_{f_1, f_1 a}} & \frac{p_{f_1, f_1 a^2}}{p_{f_1, f_1 a}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_{f_1, f_2 a}}{p_{f_2, f_2 a}} & -\frac{p_{f_1, f_2}}{p_{f_2, f_2 a}} \\ -\frac{p_{f_2 a, f_2 a^2}}{p_{f_2, f_2 a}} & \frac{p_{f_2, f_2 a^2}}{p_{f_2, f_2 a}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(3)} & x_{12}^{(3)} \\ x_{21}^{(3)} & x_{22}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_{f_2, f_1 a}}{p_{f_1, f_2}} & \frac{p_{f_1, f_1 a}}{p_{f_1, f_2}} \\ -\frac{p_{f_2, f_2 a}}{p_{f_1, f_2}} & \frac{p_{f_1, f_2 a}}{p_{f_1, f_2}} \end{pmatrix}.$$

Теперь мы зададим замыкание в $\text{Gr}_2(\hat{J})$ фактора из примера 5.2 уравнениями в плюккеревых координатах. Прежде всего, имеются соотношения Плюккера. Кроме того, добавляются следующие уравнения, которые приходят из функций перехода между $x_{ab}^{(i)}$ и $x_{cd}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} p_{f_1 a, f_1 a^2} p_{f_2, f_2 a} &= p_{f_2 a, f_2 a^2} p_{f_1, f_1 a}, & p_{f_1, f_1 a^2} p_{f_2, f_2 a} &= p_{f_2, f_2 a^2} p_{f_1, f_1 a}, \\ p_{f_1 a, f_1 a^2} p_{f_1, f_2}^2 &= p_{f_1, f_1 a} (p_{f_1, f_1 a} p_{f_2, f_2 a} - p_{f_2, f_1 a} p_{f_1, f_2 a}), \\ p_{f_2 a, f_2 a^2} p_{f_1, f_2}^2 &= p_{f_2, f_2 a} (p_{f_1, f_1 a} p_{f_2, f_2 a} - p_{f_2, f_1 a} p_{f_1, f_2 a}), \\ p_{f_1, f_1 a^2} p_{f_1, f_2} &= p_{f_1, f_1 a} (p_{f_1, f_2 a} - p_{f_2, f_1 a}), \\ p_{f_2, f_2 a^2} p_{f_1, f_2} &= p_{f_2, f_2 a} (p_{f_1, f_2 a} - p_{f_2, f_1 a}). \end{aligned}$$

Как мы видим, не все $p_{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \subseteq \tilde{\Gamma}(m)$, встречаются в качестве числителей в выражениях для локальных координат на факторе. Те из них, которые участвуют в этих выражениях, мы назовём *значимыми*, а остальные *избыточными*. Утверждается, что избыточные координаты могут быть устранены, т. е. мы можем выразить их как полиномы в локальных координатах на каждой из аффинных карт. В самом деле, мы можем выразить f_i и a_j , а с их помощью получить все максимальные миноры матрицы отображения $\Phi_{(a, f)}$. Например,

$$\begin{aligned} \frac{p_{f_1 a, f_2 a}}{p_{f_1, f_1 a}} &= \frac{p_{f_1, f_2} p_{f_1 a, f_1 a^2}}{p_{f_1, f_1 a^2}^2}, & \frac{p_{f_1 a, f_2 a}}{p_{f_2, f_2 a}} &= \frac{p_{f_1, f_2} p_{f_2 a, f_2 a^2}}{p_{f_2, f_2 a^2}^2}, \\ \frac{p_{f_1 a, f_2 a}}{p_{f_1, f_2}} &= \frac{p_{f_1, f_1 a} p_{f_2, f_2 a} - p_{f_1, f_2 a} p_{f_1 a, f_2}}{p_{f_1, f_2}^2}, \\ \frac{p_{f_1, f_2 a^2}}{p_{f_1, f_1 a}} &= \frac{p_{f_1, f_2} p_{f_1 a, f_1 a^2} p_{f_1, f_1 a} + p_{f_2, f_1 a} p_{f_1, f_1 a^2} p_{f_1, f_1 a} - p_{f_1, f_2} p_{f_1, f_1 a^2}^2}{p_{f_1, f_1 a}^3}, \\ \frac{p_{f_1, f_2 a^2}}{p_{f_1, f_2}} &= \frac{p_{f_1, f_2 a}^2 - p_{f_1, f_1 a} p_{f_2, f_2 a}}{p_{f_1, f_2}^2}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к общему случаю, мы можем рассмотреть очевидную «проекцию» $\mathcal{M}^s(L_q, m, k) \rightarrow \mathbb{P}^N$, где $N+1$ — это число значимых координат. Ясно, что она определена корректно. Обозначим через \hat{Y}_0 образ фактора в \mathbb{P}^N . Утверждается, что замыкание \hat{Y}_0 в \hat{Y} (или, во всяком случае, подмногообразии, содержащее

его в качестве одной из неприводимых компонент) задаётся в \mathbb{P}^N только уравнениями, происходящими из функций перехода, т. е. соотношения Плюккера более не нужны. Причина этого в том, что на аффинной карте $Y(\mathfrak{S})$, отвечающей J -скелету \mathfrak{S} , мы можем выразить все значимые координаты $p_{\mathfrak{X}}$ через локальные координаты на $Y(\mathfrak{S})$, используя только функции перехода. А так как $Y(\mathfrak{S})$ — аффинное пространство, эти локальные координаты алгебраически независимы. Таким образом, больше никаких уравнений не понадобится.

В случае $q = 1$, $m = k = 2$ у нас есть пятнадцать плюккеревых координат, из которых лишь девять значимы, а остальные шесть избыточны. Таким образом, фактор может быть вложен как локально замкнутое подмногообразие в \mathbb{P}^8 .

Пример 5.3. Пусть $q = m = 2$, $k = 1$. Обозначим петли через a и b . Возможны два J -скелета:

$$\mathfrak{S}_1 = \{f, fa\}, \quad \mathfrak{S}_2 = \{f, fb\}.$$

Таким образом,

$$\tilde{\Gamma}(m) = \{f, fa, fa^2, fb, fab, fba, fb^2\}$$

(мы зафиксируем этот порядок путей и в соответствии с ним будем строить отображение Φ) и $\hat{J} = \mathbb{k}^7$.

Нетрудно убедиться, что

$$X(\mathfrak{S}_1) = \left\{ B \in \text{Mat}_{7 \times 2}(\mathbb{k}) \left| \begin{array}{l} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \\ (b_{61} \ b_{62}) = (b_{31} \ b_{32}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}, \\ (b_{71} \ b_{72}) = (b_{31} \ b_{32}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

и

$$X(\mathfrak{S}_2) = \left\{ B \in \text{Mat}_{7 \times 2}(\mathbb{k}) \left| \begin{array}{l} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \neq 0, \\ (b_{41} \ b_{42}) = (b_{21} \ b_{22}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{61} & b_{62} \end{pmatrix}, \\ (b_{51} \ b_{52}) = (b_{21} \ b_{22}) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{71} & b_{72} \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Морфизмы факторизации имеют вид

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{S}_1} : (a, b, f) &\mapsto \begin{pmatrix} fa^2 \\ fb \\ fab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ fa \end{pmatrix}^{-1}, \quad B = (b_{ij}) \mapsto \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1}, \\ \pi_{\mathfrak{S}_2} : (a, b, f) &\mapsto \begin{pmatrix} fa \\ fba \\ fb^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ fb \end{pmatrix}^{-1}, \quad B = (b_{ij}) \mapsto \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{61} & b_{62} \\ b_{71} & b_{72} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

В частности,

$$X(\mathfrak{S}_1) // \mathrm{GL}(\alpha) \cong \mathrm{Mat}_{3 \times 2}(\mathbb{k}) \cong \mathbb{A}^6.$$

Сечения

$$s_i : \mathrm{Mat}_{3 \times 2}(\mathbb{k}) \rightarrow X(\mathfrak{S}_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}(Q, \mathfrak{S}_i)$$

строятся как

$$s_1 : \begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \\ x_{31}^{(1)} & x_{32}^{(1)} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \\ x_{31}^{(1)} & x_{32}^{(1)} \end{pmatrix}, (1 \ 0) \right),$$

$$s_2 : \begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \\ x_{31}^{(2)} & x_{32}^{(2)} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x_{31}^{(2)} & x_{32}^{(2)} \end{pmatrix}, (1 \ 0) \right).$$

При этом функции перехода имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \\ x_{31}^{(1)} & x_{32}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12}^{(2)} x_{21}^{(2)} - x_{11}^{(2)} x_{22}^{(2)} & x_{11}^{(2)} + x_{22}^{(2)} \\ -\frac{x_{11}^{(2)}}{x_{12}^{(2)}} & \frac{1}{x_{12}^{(2)}} \\ \frac{(x_{12}^{(2)})^2 x_{31}^{(2)} - (x_{11}^{(2)})^2 - x_{11}^{(2)} x_{12}^{(2)} x_{32}^{(2)}}{x_{12}^{(2)}} & \frac{x_{11}^{(2)} + x_{12}^{(2)} x_{32}^{(2)}}{x_{12}^{(2)}} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \\ x_{31}^{(2)} & x_{32}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x_{21}^{(1)}}{x_{22}^{(1)}} & \frac{1}{x_{22}^{(1)}} \\ \frac{(x_{22}^{(1)})^2 x_{11}^{(1)} - (x_{21}^{(1)})^2 - x_{12}^{(1)} x_{22}^{(1)} x_{21}^{(1)}}{x_{22}^{(1)}} & \frac{x_{21}^{(1)} + x_{12}^{(1)} x_{22}^{(1)}}{x_{22}^{(1)}} \\ x_{22}^{(1)} x_{31}^{(1)} - x_{21}^{(1)} x_{32}^{(1)} & x_{21}^{(1)} + x_{32}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя

$$\begin{pmatrix} x_{11}^{(1)} & x_{12}^{(1)} \\ x_{21}^{(1)} & x_{22}^{(1)} \\ x_{31}^{(1)} & x_{32}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p_{fa,fa^2}}{p_{f,fa}} & \frac{p_{f,fa^2}}{p_{f,fa}} \\ -\frac{p_{fa,fb}}{p_{f,fa}} & \frac{p_{f,fb}}{p_{f,fa}} \\ -\frac{p_{fa,fab}}{p_{f,fa}} & \frac{p_{f,fab}}{p_{f,fa}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{11}^{(2)} & x_{12}^{(2)} \\ x_{21}^{(2)} & x_{22}^{(2)} \\ x_{31}^{(2)} & x_{32}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_{fa,fb}}{p_{f,fb}} & \frac{p_{f,fa}}{p_{f,fb}} \\ -\frac{p_{fb,fb a}}{p_{f,fb}} & \frac{p_{f,fb a}}{p_{f,fb}} \\ -\frac{p_{fb,fb^2}}{p_{f,fb}} & \frac{p_{f,fb^2}}{p_{f,fb}} \end{pmatrix},$$

мы получаем следующую систему уравнений, задающую фактор:

$$p_{fa,fa^2} p_{f,fb}^2 + p_{f,fa} (p_{fa,fb} p_{f,fb a} + p_{f,fa} p_{fb,fb a}) = 0,$$

$$p_{fb,fb^2} p_{f,fa}^2 - p_{f,fa} (p_{f,fb} p_{fa,fab} - p_{fa,fb} p_{f,fab}) = 0,$$

$$p_{f,fa} p_{f,fb} - p_{f,fa} (p_{fa,fb} + p_{f,fb}) = 0,$$

$$p_{f,fb} p_{f,fa} - p_{f,fb} (p_{f,fb} - p_{fa,fb}) = 0.$$

Итак, из 21 возможной координаты 11 значимы, а остальные 10 избыточны. Таким образом, фактор изоморфен локально замкнутому подмногообразию в \mathbb{P}^{10} , получаемому пересечением дополнения к множествам нулей $p_{f,fa}$ и $p_{f,fb}$ с замкнутым подмножеством, задаваемым указанными выше уравнениями. В частности, \hat{Y} является полным пересечением.

Литература

- [1] Кокорин А. И., Мартыянов В. И. Универсальные расширенные теории // Алгебра. — Иркутск, 1973. — С. 107—113.
- [2] Попов В. Л. Две орбиты: когда одна лежит в замыкании другой? // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2009. — Т. 264. — С. 152—164.
- [3] Baur W. Decidability and undecidability of theories of Abelian groups with predicates for subgroups // *Compositio Math.* — 1975. — Vol. 31. — P. 23—30.
- [4] Engel J., Reineke M. Smooth models of quiver moduli // *Math. Z.* — 2009. — Vol. 262. — P. 817—848.
- [5] Fedotov S. Framed moduli and Grassmannians of submodules // *Trans. Amer. Math. Soc.* — To appear. — [arXiv:1010.4761v2](https://arxiv.org/abs/1010.4761v2).
- [6] Huisgen-Zimmermann B. Classifying representations by way of Grassmannians // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 2007. — Vol. 359. — P. 2687—2719.
- [7] King A. D. Moduli of representations of finite-dimensional algebras // *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*. — 1994. — Vol. 45 (180). — P. 515—530.
- [8] Mumford D., Fogarty J., Kirwan F. *Geometric Invariant Theory*. — Berlin: Springer, 1994. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete (2)).
- [9] Reineke M. Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups // *J. Algebra*. — 2008. — Vol. 320, no. 1. — P. 94—115.

