Производная π-длина, нильпотентная π-длина и просто π-длина конечных π-разрешимых групп

О. А. ШПЫРКО
Черноморский филиал
МГУ им. М. В. Ломоносова (*Севастополь*)
e-mail: shpyrko@mail.ru

УДК 512.542

Ключевые слова: конечная группа, π-разрешимая группа, π-длина, нильпотентная π-длина, производная π-длина.

Аннотация

Вводится понятие производной π-длины для конечной π-разрешимой группы и описываются её элементарные свойства. Устанавливается зависимость между π-длиной, нильпотентной π-длиной, производной π-длиной, а также производной и нильпотентной длинами π-холловой подгруппы.

Abstract

O. A. Shpyrko, The derived π-length, nilpotent π-length, and simple π-length of finite π-soluble groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 225—235.

The concept of the derived π-length for finite π-soluble groups is introduced and its elementary properties are described. The dependence between the π-length, nilpotent π-length, and derived π-length, and also between the derived and nilpotent lengths of a π-Hall subgroup is determined.

В работе рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют принятым в [1, 8].

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество всех простых чисел, не содержащихся в π, а через $\pi(G)$ — множество простых чисел, делящих порядок группы G. Возрастающим (π', π)-рядом группы G называется ряд

$$1 = P_0 \leqslant N_0 < P_1 < N_1 < \ldots < P_i < N_i < \ldots,$$

где $N_i/P_i = O_{\pi'}(G/P_i)$, $P_{i+1}/N_i = O_\pi(G/N_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь $O_{\pi'}(X)$ и $O_\pi(X)$ — наибольшие нормальные π'- и π-подгруппы группы X соответственно. Если G — π-разрешимая группа, то для некоторого натурального числа k выполняется равенство $N_k = G$. Наименьшее натуральное число k с таким свойством называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi(G)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 225—235.

При $\pi = \{p\}$ определение π-длины π-разрешимой группы превращается в определение p-длины $l_p(G)$, предложенное Ф. Холлом и Г. Хигменом [13] для p-разрешимых групп. Элементарная теория p-длины изложена в [14].

Нильпотентная π-длина π-разрешимой группы G определяется следующим образом. Пусть

$$P_0^n = 1, \quad N_i^n/P_i^n = O_{\pi'}(G/P_i^n),$$
$$P_{i+1}^n/N_i^n = O_\pi^n(G/N_i^n) = F(G/N_i^n), \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Здесь $F(X)$ — подгруппа Фиттинга группы X. Наименьшее значение k, для которого в (π', π^n)-ряде

$$1 = P_0^n \leqslant N_0^n < P_1^n < N_1^n < \ldots < P_i^n < N_i^n < \ldots$$

выполняется равенство $N_k^n = G$, называется нильпотентной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^n(G)$. Ясно, что

$$l_\pi(G) \leqslant l_\pi^n(G),$$

а в случае когда π-холлова подгруппа группы G нильпотентна, справедливо равенство

$$l_\pi^n(G) = l_\pi(G) = \max_{p \in \pi} l_p(G)$$

(см. [5, лемма 4]).

Изучению оценок нильпотентной π-длины $l_\pi^n(G)$ π-разрешимых групп посвящены работы Н. С. Черникова и А. П. Петравчука [4—6], В. С. Монахова и О. А. Шпырко [2, 3, 10—12].

Определим теперь производную π-длину π-разрешимой группы G. Пусть

$$P_0^a = 1, \quad N_i^a/P_i^a = O_{\pi'}(G/P_i^a), \quad P_{i+1}^a/N_i^a = O_\pi^a(G/N_i^a), \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Здесь $O_\pi^a(X)$ — наибольшая нормальная абелева π-подгруппа в группе X. Наименьшее значение k, для которого в (π', π^a)-ряде

$$1 = P_0^a \leqslant N_0^a < P_1^a < N_1^a < \ldots < P_i^a < N_i^a < \ldots$$

выполняется равенство $N_k^a = G$, называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что для любой π-разрешимой группы G справедливо неравенство

$$l_\pi(G) \leqslant l_\pi^n(G) \leqslant l_\pi^a(G),$$

а в случае когда π-холлова подгруппа абелева, справедливо соотношение

$$l_\pi(G) = l_\pi^n(G) = l_\pi^a(G) \leqslant 1.$$

Для единичной группы E положим

$$l_\pi^a(E) = l_\pi^n(E) = l_\pi(E) = 0.$$

В случае когда множество π состоит из одного простого числа p, имеет место равенство

$$l_p(G) = l_\pi(G) = l_\pi^n(G) = l_\pi^a(G).$$

В дальнейшем всюду под $l_\pi^*(G)$ будем понимать либо π-длину $l_\pi(G)$, либо нильпотентную π-длину $l_\pi^n(G)$, либо производную π-длину $l_\pi^a(G)$ группы G. Через $O_\pi^*(G)$ будем обозначать либо $O_\pi(G)$, либо $O_\pi^n(G)$, либо $O_\pi^a(G)$. Нормальный ряд группы G, факторы которого являются либо π'-группами, либо π-группами (нильпотентными π-группами или абелевыми π-группами), будем обозначать через (π', π^*). π-факторы вида $P_{i+1}^*/N_i^* = O_\pi^*(G/N_i^*)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, в (π', π^*)-ряде группы G будем называть π^*-факторами.

Лемма 1. *Пусть G — группа. Тогда*

$$O_{\pi'}\big(G/O_{\pi'}(G)\big) = O_\pi^*\big(G/O_\pi^*(G)\big) = 1.$$

Доказательство. Пусть G — группа. Предположим противное:

$$1 \neq O_\pi^*\big(G/O_\pi^*(G)\big) = K/O_\pi^*(G) \lhd G/O_\pi^*(G).$$

Отсюда следует, что $K \lhd G$, и, так как

$$|K| = |O_\pi^*(G)| \cdot |K : O_\pi^*(G)|,$$

то K либо нормальная π-подгруппа, либо нормальная нильпотентная π-подгруппа, либо нормальная абелева π-подгруппа группы G. Поэтому во всех трёх случаях $K = O_\pi^*(G)$, противоречие. Аналогично доказывается равенство $O_{\pi'}\big(G/O_{\pi'}(G)\big) = 1$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Каждая π-разрешимая группа обладает (π', π^*)-рядом, и, наоборот, каждая группа, обладающая (π', π^*)-рядом, является π-разрешимой.*

Доказательство. Утверждение вытекает из определений π-разрешимой группы и (π', π^*)-рядов. □

Лемма 3. *Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда в любом (π', π^*)-ряде группы G число неединичных π^*-факторов не меньше, чем $l_\pi^*(G)$.*

Доказательство. Утверждение получаем из того факта, что каждая нормальная π-подгруппа (нормальная нильпотентная π-подгруппа или нормальная абелева π-подгруппа) π-разрешимой группы G содержится в $O_\pi^*(G)$, поэтому число π^*-факторов в любом (π', π^*)-ряде π-разрешимой группы G не может быть меньше, чем $l_\pi^*(G)$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Пусть G — π-разрешимая группа, K — нормальная подгруппа в G, причём $l_\pi^*(K) = k$, $l_\pi^*(G/K) = t$. Тогда $l_\pi^*(G) \leqslant k + t$.*

Доказательство. Пусть G — π-разрешимая группа, K — нормальная подгруппа в G, причём $l_\pi^*(K) = k$, $l_\pi^*(G/K) = t$. Тогда для группы K можно построить (π', π^*)-ряд следующего вида:

$$1 = P_0^* \leqslant N_0^* < P_1^* < N_1^* < \ldots < P_k^* \leqslant N_k^* = K.$$

Для фактор-группы G/K (π', π^*)-ряд примет вид

$$1 = K/K \leqslant P_{k+1}^*/K \leqslant N_{k+1}^*/K < P_{k+2}^*/K < \ldots < P_t^*/K \leqslant N_t^*/K = G/K.$$

Рассмотрим следующий ряд для группы G:

$$1 = P_0^* \leqslant N_0^* < P_1^* < N_1^* < \ldots < P_k^* \leqslant N_k^* = K \leqslant \\ \leqslant P_{k+1}^* \leqslant N_{k+1}^* < P_{k+2}^* < \ldots < P_t^* \leqslant N_t^* = G.$$

Так как для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ подгруппы N_i^* и P_i^* характеристичны в K и $K \lhd G$, то подгруппы N_i^* и P_i^* нормальны в G. Из нормальности подгрупп N_s^*/K и P_s^*/K в фактор-группе G/K следует нормальность подгрупп N_s^* и P_s^* в группе G для всех $s = k+1, \ldots, t$. Таким образом, построенный ряд является (π', π^*)-рядом группы G. Следовательно, по лемме 3 $l_\pi^*(G) \leqslant k + t$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда*

1) *если H — подгруппа группы G, то*

$$l_\pi^*(H) \leqslant l_\pi^*(G);$$

2) *если $N \lhd G$, то*

$$l_\pi^*(G/N) \leqslant l_\pi^*(G);$$

если N — нормальная π'-подгруппа группы G, то

$$l_\pi^*(G/N) = l_\pi^*(G);$$

3) *если N — нормальная π-подгруппа (нормальная нильпотентная π-подгруппа или нормальная абелева π-подгруппа) группы G, то*

$$l_\pi^*(G/N) = l_\pi^*(G) - i,$$

где $i \in \{0, 1\}$;

4) *если G и V — π-разрешимые группы, то*

$$l_\pi^*(G \times V) = \max\{l_\pi^*(G), l_\pi^*(V)\};$$

5) *если N_1 и N_2 — нормальные подгруппы в G, то*

$$l_\pi^*\big(G/(N_1 \cap N_2)\big) \leqslant \max\{l_\pi^*(G/N_1), l_\pi^*(G/N_2)\}.$$

Доказательство. Утверждения для π-длины $l_\pi(G)$ и нильпотентной π-длины $l_\pi^n(G)$ группы G следуют из [5, лемма 1].

Остаётся доказать утверждения для производной π-длины. Пусть G — π-разрешимая группа, $l_\pi^a(G) = t$. Зафиксируем (π', π^a)-ряд группы G

$$1 = P_0^a \leqslant N_0^a < P_1^a < N_1^a < \ldots < P_t^a \leqslant N_t^a = G,$$

в котором факторы N_i^a/P_i^a — нормальные π'-подгруппы в группе G/P_i^a, а факторы P_i^a/N_{i-1}^a — нормальные абелевы π-подгруппы в G/N_{i-1}^a, $i = 1, 2, \ldots, t$, причём число абелевых π-факторов совпадает с $t = l_\pi^a(G)$.

1. Пересекая (π', π^a)-ряд группы G с подгруппой H, получаем следующий ряд для подгруппы H:

$$1 = 1 \cap H = P_0^a \cap H \leqslant N_0^a \cap H < P_1^a \cap H < \ldots < P_t^a \cap H \leqslant N_t^a \cap H = G \cap H = H.$$

Так как $H \cap P_i^a \lhd H$, $H \cap N_i^a \lhd H$ для всех $i = 0, 1, \ldots, t$, то построенный ряд является нормальным рядом для H. Факторы этого ряда

$$(N_i^a \cap H)/(P_i^a \cap H) \simeq (N_i^a \cap H)P_i^a/P_i^a$$

являются подгруппами фактор-групп N_i^a/P_i^a, а факторы

$$(P_i^a \cap H)/(N_{i-1}^a \cap H) \simeq (P_i^a \cap H)N_{i-1}^a/N_{i-1}^a \text{ —}$$

подгруппами фактор-групп P_i^a/N_{i-1}^a для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Поэтому построенный ряд является (π', π^a)-рядом группы H, в котором число абелевых π-факторов не превосходит t. Отсюда следует, что $l_\pi^a(H) \leqslant t = l_\pi^a(G)$.

2. Пусть $N \lhd G$. Построим ряд фактор-группы G/N

$$1 = P_0^a N/N \leqslant N_0^a N/N < P_1^a N/N < \ldots < P_t^a N/N \leqslant N_t^a N/N = G/N.$$

Факторы построенного ряда являются либо нормальными абелевыми π-подгруппами, так как $P_i^a N/N \lhd G/N$ и

$$|(P_i^a N/N)/(N_{i-1}^a N/N)| = |P_i^a N/N_{i-1}^a N| = \frac{|P_i^a : N_{i-1}^a|}{|(P_i^a \cap N) : (N_{i-1}^a \cap N)|} \text{ —}$$

π-число, либо нормальными π'-подгруппами, так как $N_i^a N/N \lhd G/N$ и

$$|(N_i^a N/N)/(P_i^a N/N)| = |N_i^a N/P_i^a N| = \frac{|N_i^a : P_i^a|}{|(N_i^a \cap N) : (P_i^a \cap N)|} \text{ —}$$

π'-число для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. При этом число абелевых π-факторов не превосходит числа t. Таким образом, $l_\pi^a(G/N) \leqslant t = l_\pi^a(G)$.

Пусть N — нормальная π'-подгруппа группы G, и пусть

$$1 = N/N = \overline{N} \leqslant \overline{N_0^a} < \overline{P_1^a} < \overline{N_1^a} < \ldots < \overline{P_k^a} \leqslant \overline{N_k^a} = \overline{G} = G/N \text{ —}$$

(π', π^a)-ряд фактор-группы G/N с факторами $\overline{N_i^a}/\overline{P_i^a}$, являющимися π'-группами, или факторами $\overline{P_i^a}/\overline{N_{i-1}^a}$ — абелевыми π-группами, $i = 1, 2, \ldots, k$, причём число абелевых π-факторов совпадает с $k = l_\pi^a(G/N)$. Тогда ряд

$$1 = P_0^a < N \leqslant N_0^a < P_1^a < N_1^a < \ldots < P_k^a \leqslant N_k^a = G$$

будет для группы G нормальным рядом, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами, причём число абелевых π-факторов совпадает с k. Из определения производной π-длины следует, что $l_\pi^a(G) \leqslant k = l_\pi^a(G/N)$. Так как уже доказано, что $l_\pi^a(G/N) \leqslant l_\pi^a(G)$, то имеет место равенство $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$.

3. Пусть N — неединичная нормальная абелева π-подгруппа группы G и

$$1 = N/N = \overline{N} \leqslant \overline{P_1^a} < \overline{N_1^a} < \ldots < \overline{P_k^a} \leqslant \overline{N_k^a} = \overline{G} = G/N \text{ —}$$

(π', π^a)-ряд группы G/N, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами, причём число абелевых π-факторов совпадает с $k = l_\pi^a(G/N)$. Тогда

$$1 < N \leqslant P_1^a < N_1^a < \ldots < P_k^a \leqslant N_k^a = G \text{ —}$$

такого же типа ряд группы G, в котором число абелевых π-факторов равно $1+k = 1+l^a_\pi(G/N)$. Из определения производной π-длины получаем, что $l^a_\pi(G) \leqslant 1 + l^a_\pi(G/N)$. По пункту 2 $l^a_\pi(G/N) \leqslant l^a_\pi(G)$, поэтому $l^a_\pi(G) = i + l^a_\pi(G/N)$, где $i \in \{0,1\}$.

4. Так как G и V — подгруппы группы $G \times V$, то из пункта 1 следует, что $\max\{l^a_\pi(G), l^a_\pi(V)\} \leqslant l^a_\pi(G\times V)$. Покажем, используя индукцию по $|G|+|V|$, что $l^a_\pi(G\times V) \leqslant \max\{l^a_\pi(G), l^a_\pi(V)\}$. Пусть

$$1 = P^a_0(G) \leqslant N^a_0(G) < P^a_1(G) < N^a_1(G) < \ldots < P^a_t(G) \leqslant N^a_t(G) = G,$$
$$1 = P^a_0(V) \leqslant N^a_0(V) < P^a_1(V) < N^a_1(V) < \ldots < P^a_m(V) \leqslant N^a_m(V) = V\,—$$

(π', π^a)-ряды π-разрешимых групп G и V, в которых каждый фактор является либо нормальной π'-группой, либо нормальной абелевой π-группой, причём число абелевых π-факторов равно $t = l^a_\pi(G)$ и $m = l^a_\pi(V)$ соответственно. Предположим, что одна из подгрупп $N^a_0(G)$ или $N^a_0(V)$ отлична от единицы. Пусть, например, $N^a_0(G) \neq 1$. Тогда по индукции

$$l^a_\pi\Big(\big(G/N^a_0(G)\big)\times V\Big) \leqslant \max\big\{l^a_\pi\big(G/N^a_0(G)\big), l^a_\pi(V)\big\}.$$

По пункту 2 $l^a_\pi(G) = l^a_\pi\big(G/N^a_0(G)\big)$. Но

$$\big(G/N^a_0(G)\big)\times V = (G\times V)/(N^a_0(G)\times E),$$

поэтому опять по пункту 2

$$l^a_\pi\Big(\big(G/N^a_0(G)\big)\times V\Big) = l^a_\pi\big((G\times V)/(N^a_0(G)\times E)\big) = l^a_\pi(G\times V).$$

Значит, $l^a_\pi(G\times V) \leqslant \max\{l^a_\pi(G), l^a_\pi(V)\}$.

Пусть теперь $N^a_0(G) = N^a_0(V) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}1 &= P^a_1(G)/P^a_1(G) < N^a_1(G)/P^a_1(G) < \ldots < P^a_i(G)/P^a_1(G) <\\ &< N^a_i(G)/P^a_1(G) < \ldots < P^a_t(G)/P^a_1(G) \leqslant N^a_t(G)/P^a_1(G) = G/P^a_1(G),\\ 1 &= P^a_1(V)/P^a_1(V) < N^a_1(V)/P^a_1(V) < \ldots < P^a_i(V)/P^a_1(V) <\\ &< N^a_i(V)/P^a_1(V) < \ldots < P^a_m(V)/P^a_1(V) \leqslant N^a_m(V)/P^a_1(V) = G/P^a_1(V)\,—\end{aligned}$$

(π', π^a)-ряды π-разрешимых групп $G/P^a_1(G)$ и $V/P^a_1(V)$, в которых каждый фактор является либо нормальной π'-группой, либо нормальной абелевой π-группой, причём число абелевых π-факторов равно $t-1 = l^a_\pi(G)-1$ и $m-1 = l^a_\pi(V)-1$ соответственно. Следовательно, $l^a_\pi\big(G/P^a_1(G)\big) \leqslant l^a_\pi(G)-1$, $l^a_\pi\big(V/P^a_1(V)\big) \leqslant l^a_\pi(V)-1$. Используя индукцию, получаем, что

$$\begin{aligned}l^a_\pi\Big(\big(G/P^a_\pi(G)\big)\times\big(V/P^a_1(V)\big) &= l^a_\pi\big((G\times V)/(P^a_1(G)\times P^a_1(V)\big) \leqslant\\ &\leqslant \max\big\{l^a_\pi\big(G/P^a_1(G)\big), l^a_\pi\big(V/P^a_1(V)\big)\big\} \leqslant \max\{l^a_\pi(G)-1, l^a_\pi(V)-1\} =\\ &= \max\{l^a_\pi(G), l^a_\pi(V)\}-1.\end{aligned}$$

Так как $P_1^a(G)\times P_1^a(V)$ — абелева нормальная π-подгруппа группы $G\times V$, то из пункта 3 при $i\in\{0,1\}$ получаем, что

$$l_\pi^a(G\times V) = i + l_\pi^a\Big((G\times V)/\big(P_1^a(G)\times P_1^a(V)\big)\Big) \leqslant \\ \leqslant i+\max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}-1 \leqslant \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}.$$

5. Пусть N_1 и N_2 — нормальные подгруппы в G. По лемме Ремака [1, лемма 2.33] группа $G/(N_1\cap N_2)$ — подгруппа группы $(G/N_1)\times(G/N_2)$, поэтому из пунктов 1 и 4 следует, что

$$l_\pi^a\big(G/(N_1\cap N_2)\big) \leqslant \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\}.$$

Лемма полностью доказана. □

Напомним, что наименьшее натуральное число n, для которого выполняется равенство $G^{(n)}=1$, называют производной длиной группы G и обозначают через $d(G)$. Здесь G' — коммутант группы G и $G^{(i)}=(G^{(i-1)})'$.

Нильпотентная длина группы G обозначается $n(G)$ и определяется как наименьшее натуральное число k, такое что в нормальном ряде группы G

$$1=F_0\leqslant F_1\leqslant F_2\leqslant\ldots\leqslant F_i\leqslant\ldots,$$

где $F_{i+1}=F\big(G/F_i(G)\big)$, выполняется равенство $F_k=G$. Здесь $F(X)$ — подгруппа Фиттинга группы X.

Теорема 1. *Если N — нормальная π-подгруппа π-разрешимой группы G, то*

$$l_\pi^n(G)\leqslant l_\pi^n(G/N)+n(N),\quad l_\pi^a(G)\leqslant l_\pi^a(G/N)+d(N).$$

Доказательство. Пусть N — нормальная π-подгруппа π-разрешимой группы G, $t=n(N)$ и

$$1=N/N\leqslant P_1^n/N<N_1^a/N<P_2^a/N<\ldots<P_s^n/N\leqslant N_s^n/N=G/N\text{ —}$$

(π',π^n)-ряд группы G/N, в котором число нильпотентных π-факторов совпадает с $l_\pi^n(G/N)$.

Построим следующий ряд для группы G:

$$1=F_0(N)\leqslant F_1(N)\leqslant\ldots\leqslant F_t(N)=N\leqslant P_1^n<N_1^n<\ldots<P_s^n\leqslant N_s^n=G.$$

Так как $F_i(N)$ — характеристическая подгруппа группы N, а $N\lhd G$, то $F_i(N)\lhd G$ для любого натурального $i=1,2,\ldots,t$. Поэтому построенный ряд будет нормальным рядом группы G, в котором число нильпотентных π-факторов равно $t+l_\pi^n(G/N)$. Из определения нильпотентной π-длины и леммы 3 получаем, что $l_\pi^n(G)\leqslant t+l_\pi^n(G/N)$.

Проведём теперь доказательство для производной π-длины. Пусть $t=d(N)$ и

$$1=N/N\leqslant P_1^a/N<N_1^a/N<P_2^a/N<\ldots<P_k^a/N\leqslant N_k^a/N=G/N\text{ —}$$

(π', π^a)-ряд группы G/N, в котором число абелевых π-факторов совпадает с $l_\pi^a(G/N)$. Так как $N^{(i)}$ — характеристическая подгруппа группы N для любого натурального i, то ряд

$$1 = N^{(t)} < N^{(t-1)} < \ldots < N'' < N' < N \leqslant P_1^a < N_1^a < \ldots < P_k^a \leqslant N_k^a = G$$

будет нормальным рядом группы G, в котором число абелевых π-факторов равно $t + l_\pi^a(G/N)$. Из определения производной π-длины и леммы 3 получаем, что $l_\pi^a(G) \leqslant t + l_\pi^a(G/N)$. Теорема полностью доказана. □

Следствие 1.1. *Пусть G — π-разрешимая группа с метабелевой π-холловой подгруппой. Тогда*

1) $l_p(G) \leqslant 2$ *для всех* $p \in \pi$ [14, теорема A];
2) $l_\pi^n(G) \leqslant 2$ *при* $2 \notin \pi$ *и* $l_\pi^n(G) \leqslant 3$ *при* $2 \in \pi$;
3) $l_\pi^a(G) \leqslant 3$.

Доказательство. Пусть G — π-разрешимая группа с метабелевой π-холловой подгруппой G_π.

Так как коммутант π-холловой подгруппы $(G_\pi)'$ — абелева группа, то по теореме 2 из [2] $l_\pi^n(G) \leqslant 1 + \max l_p(G) \leqslant 3$, а в случае $2 \notin \pi$ по теореме 1 из [2] $l_\pi^n(G) \leqslant d(G_\pi) \leqslant 2$.

Из абелевости коммутанта π-холловой подгруппы G_π следует, что $(G_\pi)' \leqslant F(G)$. По теореме 1 имеем, что $l_\pi^a(G) \leqslant l_\pi^a(G/F) + d(F) \leqslant 1 + 2 = 3$. Следствие доказано. □

Теорема 2. *Пусть G — π-разрешимая группа и $l_\pi(G) = k$. Тогда*

$$l_p(G_\pi) \leqslant l_p(G) \leqslant k \cdot l_p(G_\pi) \quad \text{для всех} \quad p \in \pi,$$
$$n(G_\pi) \leqslant l_\pi^n(G) \leqslant k \cdot n(G_\pi), \quad d(G_\pi) \leqslant l_\pi^a(G) \leqslant k \cdot d(G_\pi).$$

Доказательство. Пусть G — π-разрешимая группа, π-длина которой равна $l_\pi(G) = k$. Пусть

$$1 = P_0 \leqslant N_0 < P_1 < N_1 < \ldots < P_k \leqslant N_k = G \,—$$

нормальный (π', π)-ряд группы G, в котором число π-факторов совпадает с $l_\pi(G) = k$.

Пусть G_π — π-холлова подгруппа группы G. Тогда $l_p(G_\pi) \leqslant l_p(G)$ для всех $p \in \pi$ [14, теорема VI.6.4 (2)]. Докажем теперь неравенство $l_p(G) \leqslant k \cdot l_p(G_\pi)$. Ясно, что достроить (π', π)-ряд до (p', p)-ряда группы G можно за счёт π-факторов P_i/N_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, k$. Число p-факторов в каждом из таких π-факторов будет не больше числа p-факторов любого нормального (p', p)-ряда π-холловой подгруппы G_π, т. е. $l_p(G) \leqslant k \cdot l_p(G_\pi)$ для каждого $p \in \pi$.

Утверждение теоремы для нильпотентной π-длины следует из [12, лемма 3] и [9, лемма 10].

Докажем неравенство для производной π-длины. Выберем произвольный π-фактор P_i/N_{i-1}. Тогда

$$P_i/N_{i-1} \subseteq G_\pi P_i/N_{i-1},$$

поэтому

$$d(P_i/N_{i-1}) \leqslant d(G_\pi).$$

Для каждого натурального числа t подгруппа $(P_i)^{(t)}$ является характеристической в P_i, поэтому

$$(P_i)^{(t)} \lhd G, \quad (P_i)^{(t)}N_{i-1} \lhd G.$$

Так как

$$(P_i/N_{i-1})^{(t)} = (P_i)^{(t)}N_{i-1}/N_{i-1},$$

то ряд

$$1 = P_0 \leqslant N_0 < P_1 < N_1 < \ldots < N_{i-1} = (P_i)^{d(P_i/N_{i-1})}N_{i-1} < \ldots < \\ < (P_i)''N_{i-1} < (P_i)'N_{i-1} < P_i < N_i < \ldots < P_k \leqslant N_k = G -$$

нормальный ряд группы G и на участке от N_{i-1} до P_i число абелевых π-факторов не превышает числа $d(G_\pi)$. Поступая так с каждым π-фактором исходного ряда, приходим к нормальному ряду группы G, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами, причём число абелевых π-факторов не превышает числа $l_\pi(G)d(G_\pi)$. Следовательно, $l^a_\pi(G) \leqslant l_\pi(G)d(G_\pi)$.

Для доказательства неравенства $d(G_\pi) \leqslant l^a_\pi(G)$ применим индукцию по порядку группы G. Так как $d\big(G_\pi O_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)\big) = d(G_\pi)$ и $l^a_\pi\big(G/O_{\pi'}(G)\big) = l^a_\pi(G)$, то можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$. Пусть

$$1 < P^a_1 < N^a_1 < \ldots < P^a_m \leqslant N^a_m = G -$$

нормальный (π', π^a)-ряд группы G, факторы которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами, причём число абелевых π-факторов совпадает с $l^a_\pi(G)$. Подгруппа P^a_1 — нормальная абелева π-подгруппа группы G. Поскольку $d(G_\pi) = i + d(G_\pi/P^a_1)$, $i \in \{0, 1\}$, то по индукции

$$d(G_\pi) = i + d(G_\pi/P^a_1) \leqslant i + l^a_\pi(G/P^a_1) \leqslant i + l^a_\pi(G) - 1,$$

значит, $d(G_\pi) \leqslant l^a_\pi(G)$. Теорема полностью доказана. □

Следствие 2.1 [5, лемма 1]. *Пусть G — π-разрешимая группа. Если π-холлова подгруппа нильпотентна, то*

$$l^n_\pi(G) = l_\pi(G) = \max_{p\in\pi} l_p(G).$$

Следствие 2.2. *Пусть G — π-разрешимая группа и $l_\pi(G) \leqslant 1$. Тогда*

$$l_p(G) = l_p(G_\pi) \ \text{ для всех } \ p \in \pi, \quad l^n_\pi(G) = n(G_\pi), \quad l^a_\pi(G) = d(G_\pi).$$

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 2. □

Следствие 2.3 [9, лемма 13]. *Если G — метанильпотентная группа, то*

$$l_p(G) = l_p(G_\pi) \ \text{ для всех } \ p \in \pi, \quad l^n_\pi(G) \leqslant 2, \quad l^a_\pi(G) = d(G_\pi).$$

Следствие 2.4 [2, лемма 10]. *Если G — сверхразрешимая группа, то*

$$l_p(G) = l_p(G_\pi) \ \text{ для всех } \ p \in \pi, \quad l^n_\pi(G) \leqslant 2, \quad l^a_\pi(G) = d(G_\pi).$$

Следствие 2.5. *Пусть G — π-разрешимая группа. Тогда*

1) $d(G_\pi) \leqslant l_\pi^a(G) \leqslant d^2(G_\pi)$, *если* $2 \notin \pi$;
2) $d(G_\pi) \leqslant l_\pi^a(G) \leqslant 2d^2(G_\pi)$, *если* $2 \in \pi$.

Доказательство. Следствие вытекает из теоремы 2, теоремы 1 из [15] и теоремы 1 из [5]. □

Следствие 2.6. *Пусть G — π-разрешимая группа с циклическим коммутантом π-холловой подгруппы, и пусть $2 \notin \pi$. Тогда*

$$l_\pi^n(G) = n(G_\pi) \leqslant 2, \quad l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \leqslant 2.$$

Доказательство. Пусть G — π-разрешимая группа с циклическим коммутантом π-холловой подгруппы, и пусть $2 \notin \pi$. В силу лемм 1 и 2 из [2] и леммы 7 из [12] можно считать, что $O_{\pi'}(G) = \Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, причём $F = C_G(F)$ и F дополняема в группе G, т. е. $G = [F]M$. Ясно, что F является p-группой для $p \in \pi$ и $F = O_p(G)$.

Так как $G_\pi = [F]M_\pi$, где M_π — π-холлова подгруппа группы M и $G'_\pi = F'M'_\pi[F, M_\pi] = M'_\pi[F, M_\pi]$ — циклическая группа, то

$$[F, M_\pi] = \langle [f, m] \mid f \in F,\ m \in M_\pi \rangle = \langle f^{-1}f^m \mid f \in F,\ m \in M_\pi \rangle \leqslant F \leqslant Z(G_\pi).$$

Отсюда следует, что $F = G_\pi$, поэтому $l_\pi(G) \leqslant 1$ и $l_\pi^n(G) = n(G_\pi)$, а по теореме 1 из [2] получаем, что $l_\pi^n(G) = n(G_\pi) \leqslant d(G_\pi) \leqslant 2$.

Остаётся заметить, что, так как $l_\pi(G) \leqslant 1$, то по теореме 2 $l_\pi^a(G) = d(G_\pi) \leqslant 2$. Следствие доказано. □

Следствие 2.7. *Пусть G — π-разрешимая группа и $l_p(G) \leqslant 1$ для всех $p \in \pi$. Тогда*

$$l_\pi^a(G) = l_\pi^n(G) = n(G_\pi) = d(G_\pi) \leqslant |\pi(G_\pi)|.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 2 и следствия 2 из леммы 5 в [12]. □

Следствие 2.8. *Пусть G — π-разрешимая группа с абелевыми силовскими p-подгруппами для всех $p \in \pi$. Тогда*

$$l_\pi^a(G) = l_\pi^n(G) = n(G_\pi) = d(G_\pi) \leqslant |\pi(G_\pi)|.$$

Доказательство. Утверждение получаем из следствия 2.7. □

Напомним, что группа G называется вполне факторизуемой группой, если в ней существует дополнение к каждой подгруппе.

Следствие 2.9. *Пусть G — π-разрешимая группа с вполне факторизуемой π-холловой подгруппой. Тогда*

$$l_p(G) \leqslant 1 \ \text{ для всех } \ p \in \pi, \quad l_\pi^n(G) \leqslant 2, \quad l_\pi^a(G) \leqslant 2.$$

Доказательство. Так как вполне факторизуемая группа сверхразрешима и все её силовские p-подгруппы абелевы [7, теорема 7.1], то $l_p(G) \leqslant 1$ для всех $p \in \pi$ и $n(G_\pi) \leqslant 2$. Остаётся применить следствие 2.7. □

Литература

[1] Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. — Минск: Вышэйшая школа, 2006.

[2] Монахов В. С., Шпырко О. А. О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп // Дискрет. мат. — 2001. — Т. 13, № 3. — С. 145—152.

[3] Монахов В. С., Шпырко О. А. О максимальных подгруппах в конечных π-разрешимых группах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2009. — № 6. — С. 3—8.

[4] Черников Н. С., Петравчук А. П. Характеризация периодических локально разрешимых групп с разрешимыми и с конечноэкспонентными силовскими π-подгруппами // Укр. мат. журн. — 1987. — Т. 39, № 6. — С. 761—767.

[5] Черников Н. С., Петравчук А. П. О π-длине конечных π-разрешимых групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры: Тр. Института математики АН Украины. — Киев, 1993. — С. 393—405.

[6] Черников Н. С., Петравчук А. П. Обобщённо разрешимые и обобщённо π-разрешимые факторизуемые группы // Вопр. алгебры. Гомельский гос. ун-т. — 1996. — Вып. 10. — С. 91—123.

[7] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1984.

[8] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука. 1978.

[9] Шпырко О. А. О пересечениях холловых подгрупп и π-длине π-разрешимой группы // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. — 2000. — № 4 (18). — С. 82—89.

[10] Шпырко О. А. Холловы подгруппы и нильпотентная π-длина π-разрешимой группы // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2001. — № 2. — С. 48—50.

[11] Шпырко О. А. Нильпотентная π-длина конечной π-разрешимой группы и коммутант её π-холловой подгруппы // Таврический вестн. информатики и математики. — 2004. — № 1. — С. 106—112.

[12] Шпырко О. А. О нильпотентной π-длине конечной π-разрешимой группы с ограничениями на подгруппы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — № 1. — С. 11—16.

[13] Hall P., Higman G. On the p-length of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. — 1956. — Vol. 3. — P. 1—42.

[14] Huppert B. Endliche Gruppen. I. — Berlin: Springer, 1967.

[15] Kazarin L. S. Soluble product of groups // Infinite Groups 94. — Berlin: Walter de Gruyter, 1995. — P. 111—123.