

Об изотопиях, парастрофиях и ортогональности квазигрупп

К. К. ЩУКИН

УДК 512.548.7

Ключевые слова: квазигруппа, парастроф, лупа, ортогональность, изотопии квазигрупп.

Аннотация

В работах В. Д. Белоусова были исследованы некоторые свойства парастрофов и получены связи между парастрофами заданной квазигруппы, также были найдены некоторые инварианты парастрофии. Данная статья является продолжением нашей работы с В. В. Гушаном, в которой получены минимальные множества систем парастрофов для квазигрупп порядка 6, а также изучены вопросы ортогональности парастрофов заданной квазигруппы.

Abstract

K. K. Shchukin, On isotopies, parastrophies, and orthogonality of quasigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 5, pp. 237–244.

In V. D. Belousov's papers, some properties of parastrophes were studied and some relations between parastrophes of a given quasigroup were obtained. Also some invariants of a parastrophy were found. This article continues our paper with V. V. Gushan, in which minimal sets of parastrophe systems for quasigroups of order 6 were obtained and some questions about orthogonality of parastrophes of a given quasigroup were studied as well.

1.

Каждая квазигруппа $(Q, \cdot)$ определяет на множестве Q три типа перестановок. Это левая трансляция $L_x(y) = xy$, правая трансляция $R_x(y) = yx$, средняя трансляция J_a и обратная к ней J_a^{-1} , определяемые формулами $xJ_a(x) = a$, $J_a^{-1}(y)y = a$, $x, y \in Q$, $xy = a$. Квазигруппа $(Q, *)$ считается сопряжённой по отношению к квазигруппе $(Q, \cdot)$, если $x * y = yx$ для всех $x, y \in Q$. Легко убедиться, что для всех $x, y \in Q$ выполнено равенство $L_x^*(y) = R_x(y)$, откуда получаем, что $L_x^* = R_x$, $L_x^{**} = L_x = R_x^*$.

Теорема 1. Пусть $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ — квазигруппы и (φ, ψ, χ) — упорядоченная тройка перестановок множества Q . Справедливы следующие утверждения.

1. Тройка (φ, ψ, χ) является изотопией квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ тогда и только тогда, когда

$$\psi J_y \varphi^{-1}(\varphi(x)) = J_{\chi(y)}^{\circ}(\varphi(x))$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 5, с. 237–244.

© 2011/2012 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

для всех $x, y \in Q$. Подстановка χ является изоморфизмом этих квазигрупп тогда и только тогда, когда

$$\chi J_y \chi^{-1}(\chi(x)) = J_{\chi(y)}^\circ(\chi(x))$$

для всех $x, y \in Q$.

2. Формула $\chi(xy) = \psi(y) \circ \varphi(x)$ для $x, y \in Q$ определяет антиизотопию квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ тогда и только тогда, когда

$$\psi J_y \varphi^{-1}(\varphi(x)) = (J_{\chi(y)}^\circ)^{-1}(\varphi(x))$$

для всех $x, y \in Q$. Подстановка χ является антиизоморфизмом этих квазигрупп тогда и только тогда, когда

$$\chi J_y \chi^{-1}(\chi(x)) = (J_{\chi(y)}^\circ)^{-1}(\chi(x))$$

для всех $x, y \in Q$.

3. Для изотопии (φ, ψ, χ) квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ очевидны две эквивалентности:

$$\chi(xy) = \varphi(x) \circ \psi(y) \iff \chi L_x \psi^{-1}(y) = L_{\varphi(x)}^\circ(y) \iff \chi R_y \varphi^{-1}(x) = R_{\psi(y)}^\circ(x)$$

для всех $x, y \in Q$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 следуют из цепочек очевидных равносильных равенств, справедливых для всех $x, y \in Q$. Полагаем $xy = a$.

1. $\chi(xy) = \varphi(x) \circ \psi(y) \iff \chi(a) = \varphi(x) J_{\chi(a)}^\circ \varphi(x) \iff J_{\chi(a)}^\circ \varphi(x) = \psi(y) = \psi J_a \varphi^{-1}(\varphi(x)) \iff J_{\chi(a)}^\circ \varphi(x) = \psi J_a \varphi^{-1}(x)$ для всех $x, y \in Q$. При $\chi = \varphi = \psi$ получаются условия изоморфизма квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$.

2. $\chi(xy) = \psi(y) \circ \varphi(x) \iff \chi(a) = \psi(y) J_{\chi(a)}^\circ(\psi(y)) \iff J_{\chi(a)}^\circ \psi(y) = \varphi(x) = \varphi J_a^{-1} \psi^{-1}(y) \iff (J_{\chi(a)}^\circ)^{-1} \varphi(x) = \psi J_a \varphi^{-1}(\varphi(x))$ для всех $x, y \in Q$.

Случай $\chi = \varphi = \psi$ приводит к условиям антиизоморфизма $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$. $\square$

Напомним, что полной ассоциированной группой квазигруппы называется группа, порождённая всеми левыми, правыми и средними трансляциями данной квазигруппы.

Следствие 1. Изоморфные или антиизоморфные квазигруппы имеют соответственно изоморфные или антиизоморфные полные ассоциированные группы.

Пусть $(Q, \circ)$ будет изотопом или антиизотопом квазигруппы $(Q, \cdot)$, определяющимся упорядоченной тройкой перестановок конечного множества Q , $\text{Card } Q = n$. Сигнатурой конечной квазигруппы $(Q, \cdot)$ порядка n называют упорядоченную тройку знаков (sign)

$$\text{signature}(Q, \cdot) = (\text{sign } Q_L, \text{sign } Q_R, \text{sign } Q_J),$$

где $Q_L = L_1 \dots L_n$, $Q_R = R_1 \dots R_n$, $Q_J = J_1 \dots J_n$ являются произведениями трансляций $(Q, \cdot)$.

Следствие 2. Справедливы следующие формулы для сигнатуры:

1) для изотопии $\chi(x, y) = \varphi(x) \circ \psi(y)$

$$\text{signature}(Q, \circ) = (\text{sign}(\chi\psi)^n \text{sign } Q_L, \text{sign}(\chi\varphi)^n \text{sign } Q_R, \text{sign}(\varphi\psi)^n \text{sign } Q_J);$$

2) для антиизотопии $\chi(xy) = \psi(y) \circ \varphi(x)$ формула сигнатуры отличается от формулы изотопии 1) переменными местами её первой и второй компонент.

В обоих случаях 1) и 2) при чётном $n = 2m$ или $\chi = \varphi = \psi$ имеет место равенство

$$\text{signature}(Q, \circ) = \text{signature}(Q, \cdot).$$

2.

Для квазигрупповой операции $\alpha = (\odot)$ обозначим её обратные операции (парастрофы) следующим образом:

$$\beta = (*) = \alpha^*, \quad \gamma = \alpha^{-1}, \quad \delta = {}^{-1}\alpha, \quad \varepsilon = {}^{-1}(\alpha^{-1}) = \gamma^*, \quad \eta = ({}^{-1}\alpha)^{-1} = \delta^*.$$

Множество $\Pi_\alpha = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta\}$ называют (см. [4]) системой парастрофов операции α . Так как по определению $(\theta^*)^* = \theta$ для любого $\theta \in \Pi_\alpha$, то $\Pi_\theta = \Pi_\alpha$. Если $\theta'' \circ \theta'$ — композиция «взятия обратной операции» у θ' посредством θ'' , то $\theta'' \circ \theta' = \theta \in \Pi$ для всех $\theta', \theta'' \in \Pi$ (см. [3, с. 14]). В общем случае легко проверяются соотношения

$$\begin{aligned} \alpha \circ \theta &= 0 = \theta \alpha \quad \text{для всех } \theta \in \Pi, \\ \alpha &= \alpha \circ \alpha = \beta \circ \beta = \delta \circ \delta, \quad \varepsilon \circ \varepsilon = \eta, \quad \eta \circ \eta = \varepsilon, \\ \varepsilon \circ (\varepsilon \circ \varepsilon) &= (\varepsilon \circ \varepsilon) \circ \varepsilon, \quad \varepsilon^{-1} = \eta, \quad \delta \circ \varepsilon = \beta = \gamma \circ \eta \end{aligned}$$

и т. д., если использовать алгоритм из [3, с. 14, 15]. Для системы $(\Pi, \circ)$ мы можем построить её таблицу «умножения». Если все операции из Π различны, то $(\Pi, \circ)$ изоморфна симметрической группе S_3 и таблица 1 будет её таблицей Кэли. В частном случае некоторые операции из Π могут совпадать, и тогда $(\Pi, \circ)$

Таблица 1

$\cdot$	α	β	γ	δ	ε	η
α	α	β	γ	δ	ε	η
β	β	α	ε	η	γ	δ
γ	γ	η	α	ε	δ	β
δ	δ	ε	η	α	β	γ
ε	ε	δ	β	γ	η	α
η	η	γ	δ	β	α	ε

будет подгруппой группы S_3 . Каждая операция $\theta \in \Pi$ определяет парастроф $(Q, \theta) = Q(\theta)$ квазигруппы $(Q, \odot) = Q(\alpha)$ и парастрофию $Q(\alpha) \rightarrow^\theta Q(\theta)$ как отображение. Упорядоченная шестёрка

$$\Pi(Q(\alpha)) = (Q(\alpha), Q(\beta), Q(\gamma), Q(\delta), Q(\varepsilon), Q(\eta))$$

называется системой парастрофов квазигруппы $(Q, \odot) = Q(\alpha)$. Вообще говоря, $Q(\Pi_\alpha) \neq Q(\Pi_\theta)$ для $\alpha \neq \theta$, $\theta \in \Pi_\alpha$, хотя все шесть таких систем составлены из одних и тех же элементов. Диаграмма действия парастрофий на $\Pi(Q(\alpha))$

$$\begin{array}{ccc} (Q, \odot) = Q(\alpha) & & \\ \downarrow \theta' & \searrow \theta & \\ Q'(\theta') & \xrightarrow{\theta''} & Q(\theta'' \circ \theta') \end{array}$$

является, как было отмечено выше, коммутативной, и $Q(\theta'' \circ \theta') = Q(\theta)$. Таким образом, все парастрофы квазигруппы $(Q, \odot) = Q(\alpha)$ образуют группу $(\Pi, \cdot)$ относительно их действия на системе $\Pi(Q(\alpha))$. Эта группа $(\Pi, \cdot)$, очевидно, изоморфна группе $(\Pi, \circ)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Группа парастрофий $(\Pi, \cdot)$, действующих на $\Pi(Q(\alpha))$, изоморфна группе $(\Pi, \circ)$ относительно композиции «взятия обратной операции» у обратных же операций. В некоммутативном случае обе эти группы изоморфны одной и той же подгруппе симметрической группы S_3 .*

Замечание 1. Во второй строке таблицы 1 все парастрофии по своим столбцам с соответствующими парастрофиями первой строки (попарно) сопряжены. Так что $\theta^* = \beta\theta$, $\theta \in \Pi$, и удобнее писать $\beta\theta$ вместо θ^* .

Замечание 2. В обозначениях теоремы 2 коммутативность квазигруппы $(Q, \odot) = Q(\alpha)$ эквивалентна равенству $\beta = \alpha$. В этом случае таблица 1 содержит два соотношения $\gamma \cdot \eta = \beta = \alpha$ и $\delta \cdot \varepsilon = \beta = \alpha$, из которых следует, что множество Π может содержать не более трёх элементов. Соответственно, для группы парастрофий $(\Pi, \cdot)$ квазигруппы $(Q, \odot) = Q(\alpha)$ имеется три случая изоморфизма:

- 1) $(\Pi, \cdot) \cong Z_1$, если $\alpha = \gamma = \delta$;
- 2) $(\Pi, \cdot) \cong Z_2$, если $\alpha \neq \gamma$, $\gamma = \delta$, $\gamma \cdot \gamma = \alpha$;
- 3) $(\Pi, \cdot) \cong Z_3$, если $\alpha \neq \gamma$, $\alpha \neq \delta$, $\gamma \neq \delta$, $\gamma^2 = \delta$, $\gamma^3 = \alpha$.

Здесь Z_k — циклическая группа порядка $k = 1, 2, 3$. В некоммутативном случае группа $(\Pi, \cdot)$ может оказаться изоморфной одной из групп Z_k , $k = 2, 3$, при дополнительных тождествах на квазигруппе $(Q, \odot)$.

В продолжение темы напомним, что в [4] установлено правило: действие изотопии на квазигруппу $(Q, \cdot) = Q(\alpha)$ индуцирует однозначно изотопию $\theta(\phi, \psi, \lambda)$ парастрофа $Q(\theta)$ для $\theta \in \Pi$. Это правило удобно записать в виде таблицы (табл. 2).

Таблица 2

$Q(\alpha)$	$Q(\beta)$	$Q(\gamma)$	$Q(\delta)$	$Q(\varepsilon)$	$Q(\eta)$
(φ, ψ, χ)	(ψ, φ, χ)	(φ, χ, ψ)	(χ, ψ, φ)	(χ, φ, ψ)	(ψ, χ, φ)

По этой таблице, пользуясь очевидной коммутативной диаграммой для $\theta \in \Pi$

$$\begin{array}{ccc}
 Q(\alpha) & \xrightarrow{\theta} & Q(\theta) \\
 (\varphi, \psi, \chi) \downarrow & & \downarrow (\lambda, \mu, \nu) \\
 Q(\alpha(\circ)) & \xrightarrow{\theta} & Q(\theta(\circ)),
 \end{array}$$

где λ, μ, η зависят от θ , дополним условия перестановочности (ср. [1]) парастрофий с изотопиями.

Таблица 3

$\alpha(\varphi, \psi, \chi) = (\varphi, \psi, \chi)\alpha$	$\delta(\varphi, \psi, \chi) = (\chi, \psi, \varphi)\delta$
$\beta(\varphi, \psi, \chi) = (\psi, \varphi, \chi)\beta$	$\varepsilon(\varphi, \psi, \chi) = (\chi, \varphi, \psi)\varepsilon$
$\gamma(\varphi, \psi, \chi) = (\varphi, \chi, \psi)\gamma$	$\eta(\varphi, \psi, \chi) = (\psi, \chi, \varphi)\eta$

Полная таблица умножения парастрофий и изотопий квазигруппы выглядит следующим образом.

Таблица 4

$\cdot$	(φ, ψ, χ)	(ψ, φ, χ)	(φ, χ, ψ)	(χ, ψ, φ)	(χ, φ, ψ)	(ψ, χ, φ)
α	$(\varphi, \psi, \chi)\alpha$	$(\psi, \varphi, \chi)\alpha$	$(\varphi, \chi, \psi)\alpha$	$(\chi, \psi, \varphi)\alpha$	$(\chi, \varphi, \psi)\alpha$	$(\psi, \chi, \varphi)\alpha$
β	$(\psi, \varphi, \chi)\beta$	$(\varphi, \psi, \chi)\alpha$	$(\chi, \varphi, \psi)\eta$	$(\psi, \chi, \varphi)\eta$	$(\varphi, \chi, \psi)\gamma$	$(\chi, \psi, \varphi)\delta$
γ	$(\varphi, \chi, \psi)\gamma$	$(\psi, \chi, \varphi)\eta$	$(\varphi, \psi, \chi)\alpha$	$(\chi, \varphi, \psi)\varepsilon$	$(\chi, \psi, \varphi)\delta$	$(\psi, \varphi, \chi)\beta$
δ	$(\chi, \psi, \varphi)\delta$	$(\chi, \varphi, \psi)\varepsilon$	$(\psi, \chi, \varphi)\eta$	$(\varphi, \psi, \chi)\alpha$	$(\psi, \varphi, \chi)\beta$	$(\varphi, \chi, \psi)\gamma$
ε	$(\chi, \varphi, \psi)\varepsilon$	$(\chi, \psi, \varphi)\delta$	$(\psi, \varphi, \chi)\beta$	$(\varphi, \chi, \psi)\gamma$	$(\psi, \chi, \varphi)\eta$	$(\varphi, \psi, \chi)\alpha$
η	$(\psi, \chi, \varphi)\eta$	$(\varphi, \chi, \psi)\gamma$	$(\chi, \psi, \varphi)\delta$	$(\psi, \varphi, \chi)\beta$	$(\varphi, \psi, \chi)\alpha$	$(\chi, \varphi, \psi)\varepsilon$

В [1, с. 28] каждое из произведений парастрофии на изотопию и изотопии на парастрофию названо изострофией.

Следствие 3. В общем случае, как это следует из таблицы 4, существует не более 36 попарно различных изострофий квазигруппы $(Q, \odot)$, а в каждом конкретном случае их число зависит от порядка группы $(\Pi, \cdot)$.

3.

Будем считать две квазигруппы $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ взаимно ортогональными в том и только том случае, если система уравнений $xy = a$, $x \circ y = b$ однозначно разрешима относительно x, y при любых $a, b \in Q$ (обозначение: $(Q, \cdot) \perp (Q, \circ)$ или, что равносильно, $(Q, \circ) \perp (Q, \cdot)$). В. Д. Белоусов исследовал в [1] вопрос об ортогональности квазигруппы своим парастрофам.

Предложение 1. $(Q, \cdot) \perp (Q, \circ)$ тогда и только тогда, когда для любых a, b однозначно разрешимо относительно x или соответственно y хотя бы одно из двух уравнений

$$L_x^\circ L_x^{-1}(a) = b, \quad (L)$$

$$R_y^\circ R_y^{-1}(a) = b \quad (R)$$

для всех $a, b \in Q$.

Теорема 3. Пусть $\Pi(Q(\alpha)) = (Q(\alpha), Q(\beta), Q(\gamma), Q(\delta), Q(\varepsilon), Q(\eta))$ — система парастрофов квазигруппы $(Q, \cdot) = Q(\alpha)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Справедливы эквивалентности $(Q, \alpha) \perp (Q, \gamma) \iff (Q, \beta) \perp (Q, \varepsilon) \iff$ уравнение $L_x^2(b) = a$ однозначно разрешимо для всех $a, b \in Q$.
2. Справедливы эквивалентности $(Q, \alpha) \perp (Q, \delta) \iff (Q, \beta) \perp (Q, \eta) \iff$ уравнение $R_y^2(b) = a$ однозначно разрешимо для всех $a, b \in Q$.
3. Справедлива эквивалентность $(Q, \alpha) \perp (Q, \beta) \iff$ уравнение $L_x R_x^{-1}(b) = a$ однозначно разрешимо для всех $a, b \in Q$.

Доказательство. Используя представление парастрофов из [2] и обозначение сопряжённости $\beta\theta = \theta*$, указанное в замечании 1, последовательно применяем предложение 1.

1. В уравнении (L) полагаем $L_x^\circ = L_x^\gamma = L_x^{-1}$ и получаем требуемое уравнение. Так как имеют место сопряжения $Q(\beta\alpha) = Q(\beta)$ и $Q(\beta\gamma) = Q(\varepsilon)$, то $(Q, \alpha) \perp (Q, \gamma) \iff (Q, \beta) \perp (Q, \varepsilon)$.

2. При $R_y^\circ = R_y^\delta = R_y^{-1}$ уравнение (R) превращается в требуемое, а так как $Q(\beta\alpha) = Q(\beta)$ и $Q(\beta\delta) = Q(\eta)$, то, очевидно, $(Q, \alpha) \perp (Q, \delta) \iff (Q, \beta) \perp (Q, \eta)$.

3. Подставляя в (L), как и в пункте 1, $L_x^\circ = L_x^\beta = R_x$, получим заявленные в этом утверждении уравнения и то, что $(Q, \alpha) \perp (Q, \beta)$. $\square$

Следствие 4. Для конечной квазигруппы $(Q, \cdot)$ содержание хотя бы в одной из перестановок $L_x, R_y, L_x R_x^{-1}$ транспозиции (a, b) , $a, b \in Q$, приводит к нарушению соответствующего ей одного из трёх условий теоремы 3.

Пример 1. Лупа $(Q, \cdot)$ порядка 5 с левыми трансляциями

$$L_1 = (1), \quad L_2 = (12)(345), \quad L_3 = (13524), \quad L_4 = (143)(25), \quad L_5 = (154)(23)$$

не может быть ортогональной ни к одному из своих парастрофов $Q(\gamma), Q(\delta), Q(\beta)$, так как $L_2 = R_2 = (12)(345)$. Это показывает и очевидная непосредственная проверка.

Существуют дополнительные условия, при выполнении которых на квазигруппе, она уже будет ортогональна к некоторым своим парастрофам. Такие тождества исследовались в [1], приведены семь минимальных. Некоторые из этих тождеств мы использовали, чтобы проиллюстрировать теорему 3 (см. табл. 5).

Таблица 5

Условия теоремы	Дополнительные тождества	Преобразованные условия теоремы
$L_x^2(b) = a$	$x(x \cdot xy) = y$	$L_x^{-1}(b) = a$
	$(x \cdot xy)x = y$	$R_x^{-1}(b) = a$
$R_y^2(b) = a$	$(xy \cdot y)y = x$	$R_y^{-1}(b) = a$
	$y(xy \cdot y) = x$	$R_y^{-1}(b) = a$
$L_x R_x^{-1}(b) = a$	$x \cdot xy = yx$	$L_x^{-1}(b) = a$

В заключение отметим, что существуют квазигруппы, взаимно ортогональные не только со своими парастрофами, что подтверждает следующий пример.

Пример 2. Конечная циклическая группа $(Q, \cdot) = Q(\alpha)$ имеет, очевидно, только два парастрофа $Q(\gamma)$ и $Q\delta$. Согласно утверждениям 1 и 2 теоремы 3 всегда справедливы ортогональности $Q(\alpha) \perp Q(\gamma)$ и $Q(\alpha) \perp Q(\delta)$, если только $\text{Card } Q = p > 2$ — простое число.

Кроме того, возможно существование квазигруппы $(Q, \circ)$ непарастрофов, ортогональной группе $Q(\alpha)$. Эту ситуацию демонстрируют четыре латинских квадрата порядка 3.

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\delta] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\circ] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [\alpha, \circ] = \begin{bmatrix} 12 & 23 & 31 \\ 21 & 32 & 13 \\ 33 & 11 & 22 \end{bmatrix}.$$

В заключение я хочу выразить благодарность профессору Ю. В. Рогожину, а также профессору М. М. Глухову за замечания, полезные советы и поддержку.

Редакционная коллегия благодарит А. В. Михалёва, М. М. Глухова, А. В. Грибова и П. А. Золотых за помощь при подготовке рукописи к публикации.

Литература

- [1] Белоусов В. Д. Парастрофо-ортогональные квазигруппы. — Кишинёв: Ин-т мат. АН Молдавской ССР, 1963.
- [2] Белоусов В. Д. О группе, ассоциированной квазигруппе // Мат. исследования. — 1969. — Т. 4, № 3. — С. 27—39.
- [3] Белоусов В. Д. Элементы теории квазигрупп. — Кишинёв, 1981.
- [4] Щукин К. К., Гушан В. В. Представление парастрофов луп и квазигрупп // Дискрет. мат. — 2004. — Т. 16, вып. 4. — С. 149—157.
- [5] Shchukin K. K. On isotopy, parastrophy and orthogonality of quasigroups // Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat. — 2010. — No. 3. — P. 29—34.