

Задачи оптимизации при $(\max, \min)$ -линейных ограничениях в виде равенств и/или неравенств

М. ГАВАЛЕЦ

Университет Градец-Кралове, Чехия
e-mail: martin.gavalec@uhk.cz

М. ГАД

Карлов университет в Праге, Чехия

К. ЦИММЕРМАН

Карлов университет в Праге, Чехия
e-mail: karel.zimmermann@mff.cuni.cz

УДК 512.643

Ключевые слова: $(\max, \min)$ -алгебра, $(\max, \min)$ -уравнения, $(\max, \min)$ -неравенства, $(\max, \min)$ -линейные системы.

Аннотация

В статье приведён обзор современных результатов по задачам оптимизации, множество реализуемых значений которых задаётся конечной системой $(\max, \min)$ -линейных уравнений и/или неравенств. Целевая функция в этой задаче равняется максимальной среди конечного числа непрерывных унимодальных функций $f_j: R \rightarrow R$, каждая из которых зависит от одной переменной $x_j \in R = (-\infty, +\infty)$. Приводятся задачи по исследованию операций, мотивирующие данные рассмотрения, также даны наглядные числовые примеры и направления возможных дальнейших исследований.

Abstract

M. Gavalec, M. Gad, K. Zimmermann, Optimization problems under $(\max, \min)$ -linear equation and/or inequality constraints, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 6, pp. 3–21.

The paper is a survey of recent results concerning optimization problems whose set of feasible solutions is described by a finite system of so-called $(\max, \min)$ -linear equations and/or inequalities. The objective function is equal to the maximum of a finite number of continuous unimodal functions $f_j: R \rightarrow R$ each depending on one variable $x_j \in R = (-\infty, +\infty)$. Motivation problems from the area of operations research, illustrative numerical examples, and hints for further research are included.

1. Введение

Задачи исследования алгебраических структур, в которых пара операций $(\max, +)$ или $(\max, \min)$ заменяет сложение и умножение из классической линейной алгебры, изучаются в научной литературе с шестидесятых годов прошлого столетия (см., например, [6, 14]). Систематическая теория этих алгебраических структур, вероятно, была опубликована впервые в монографии [6].

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 6, с. 3–21.

© 2011/2012 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

В недавно опубликованной монографии [2] читатель может найти последние результаты по теории и алгоритмам для $(\max, +)$ -линейных систем уравнений. Так как операция $\max$, заменяющая сложение, является не групповой, а только полугрупповой операцией, возникает существенная разница между решением систем с переменными, собранными в одной части равенства, и решением систем, где переменные могут находиться по обе стороны от знаков равенства. Системы первого типа будут в дальнейшем называться «односторонними», а второго — «двусторонними». Двусторонние системы специального вида рассматривались ранее в [5, 6, 12, 14] в связи с так называемыми $(\max, +)$ - или $(\max, \min)$ -проблемами собственных значений. Двусторонние $(\max, +)$ -линейные системы общего вида изучались в [3, 4]. Двусторонние системы, имеющие более общую структуру, где в обеих частях уравнений возникают остаточные функции, изучались ранее в [7], где были предложены общие итерационные методы для решения таких систем. Эти методы могут быть также применимы к $(\max, +)$ -линейным или $(\max, \min)$ -линейным системам. В [8] найден полиномиальный метод для нахождения максимального решения $(\max, \min)$ -линейных систем.

Цель настоящей работы — дать унифицированный обзор некоторых недавних результатов о $(\max, \min)$ -системах линейных уравнений, неравенств и задач оптимизации с ограничениями, которые задаются такими системами уравнений и неравенств. Мы приводим также примеры из области исследования операций, мотивирующие эти исследования, и иллюстрирующие числовые примеры.

2. Односторонние $(\max, \min)$ -линейные системы уравнений и неравенств

Введём следующие обозначения: $J = \{1, \dots, n\}$, $I = \{1, \dots, m\}$, $R = (-\infty, \infty)$, $\bar{R} = [-\infty, \infty]$, $R^n = R \times \dots \times R$ (n раз), аналогично $\bar{R}^n = \bar{R} \times \dots \times \bar{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{R}^n$, $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\}$, $\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\}$ для любых $\alpha, \beta \in \bar{R}$ (положим по определению $-\infty \wedge \infty = -\infty$, $-\infty \vee \infty = \infty$).

Если $a_{ij} \in R$, $b_i \in R$ и $i \in I$, $j \in J$ — заданные конечные числа, то обозначим

$$a_i(x) \equiv \max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j) \quad \text{для всех } i \in I.$$

Будем далее рассматривать следующую систему неравенств:

$$a_i(x) \geq b_i, \quad i \in I^{(1)}, \quad (1)$$

$$a_i(x) \leq b_i, \quad i \in I^{(2)}, \quad (2)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad (3)$$

где $I^{(1)} \cup I^{(2)} = I$ и $\underline{x}, \bar{x} \in R^n$ — заданные векторы. Множество всех решений систем (1)–(3) будет обозначаться как M . Прежде чем изучать свойства множества решений M , рассмотрим одно из возможных приложений, которое приводит к такой системе.

Пример 2.1. Предположим, что m пунктов $i \in I \equiv \{1, 2, \dots, m\}$ связаны с n пунктами $j \in J \equiv \{1, 2, \dots, n\}$ посредством дорог с заданными пропускными способностями. Пропускная способность дороги, связывающей пункты i и j , равна $a_{ij} \in R$. Для произвольных $i \in I, j \in J$ мы продлеваем дорогу из пункта i в пункт j посредством дороги, связывающей пункт j с терминальным пунктом T , и устанавливаем соответствующую пропускную способность x_j для полученной дороги. Если пропускная способность x_j уже выбрана, то пропускная способность дороги из i в T через j равняется $a_{ij} \wedge x_j = \min(a_{ij}, x_j)$. Потребуем, чтобы пропускная способность дороги между пунктами i и T , по крайней мере для одного связующего пункта j , была больше или равна заданному числу $b_i \in R$ и выбранная пропускная способность x_j принадлежала некоторому конечному отрезку, т. е. $x_j \in [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$, где $\underline{x}_j, \bar{x}_j \in R$ — заданные конечные числа. Следовательно, реализуемые векторы пропускных способностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (т. е. векторы, компоненты которых являются пропускными способностями x_j , обладающими требуемыми свойствами) должны удовлетворять системе (1), (3).

Далее мы будем исследовать некоторые свойства множества M , определяемого системой (1)–(3).

Заметим, что для любого фиксированного $i \in I^{(2)}$ неравенство

$$a_i(x) = \max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j) \leq b_i$$

позволяет заключить, что $a_{ij} \wedge x_j \leq b_i$ для всех $j \in J$.

Лемма 2.1. Пусть для всех $i \in I^{(2)}$

$$V_{ij} = \{x_j; (a_{ij} \wedge x_j) \leq b_i \text{ и } \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j\}$$

Для любых фиксированных i, j верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} V_{ij} &= [\underline{x}_j, \bar{x}_j], & \text{если } a_{ij} \leq b_i; \\ V_{ij} &= [\underline{x}_j, \bar{x}_j \wedge b_i], & \text{если } a_{ij} > b_i \text{ и } b_i \geq \underline{x}_j; \\ V_{ij} &= \emptyset, & \text{если } a_{ij} > b_i \text{ и } b_i < \underline{x}_j. \end{aligned}$$

Доказательство. Если $a_{ij} \leq b_i$, то $a_{ij} \wedge x_j = a_{ij} \leq b_i$ для всех x_j . Если $a_{ij} > b_i$ и $b_i \geq \underline{x}_j$, то $a_{ij} \wedge x_j \leq b_i$ тогда и только тогда, когда $x_j \leq b_i$ и $x_j \leq \bar{x}_j$.

В итоге, если $a_{ij} > b_i$ и $b_i < \underline{x}_j$, мы получаем, что $a_{ij} \wedge x_j \leq b_i$ тогда и только тогда, когда $x_j \leq b_i < \underline{x}_j$. Значит, в этом случае $x_j \notin [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$, следовательно, $V_{ij} = \emptyset$. $\square$

По лемме 2.1 $x \in M$ влечёт

$$x_j \in \bigcap_{i \in I^{(2)}} V_{ij} \text{ для всех } j \in J.$$

Таким образом, если для любых $i \in I^{(2)}, j \in J$ множество V_{ij} является пустым, то $M = \emptyset$. Другими словами, если существуют индексы $i \in I^{(2)}, j \in J$, такие что $a_{ij} > b_i$ и $b_i < \underline{x}_j$, то $M = \emptyset$.

Пусть $\bar{x}_{ij}$ обозначает верхнюю границу для каждого непустого множества V_{ij} , т. е. $\bar{x}_{ij} = \bar{x}_j$, если $a_{ij} \leq b_i$, и $\bar{x}_{ij} = \bar{x}_j \wedge b_i$, если $a_{ij} > b_i$ и $b_i \geq \underline{x}_j$. Тогда $x_j \leq \min_{i \in I^{(2)}} \bar{x}_{ij}$ для всех $j \in J$. Получаем, что можно поменять систему (2) посредством введения новых верхних границ $x_j^{\max} \equiv \min_{i \in I^{(2)}} \bar{x}_{ij}$ для всех $j \in J$.

Элемент $x^{\max}$ тогда является максимальным, удовлетворяющим (1), (3), т. е. если x — любой элемент, удовлетворяющий (1), (3), то $x \leq x^{\max}$. Таким образом, мы переопределим верхнюю границу, полагая $\bar{x} = x^{\max}$, и рассмотрим только подсистему (1), (3) с новой верхней границей, учитывая, что если $x \not\leq x^{\max}$, то соотношения (2) не выполняются.

Лемма 2.2. Определим множества T_{ij} , $i \in I^{(1)}$, $j \in J$, следующим образом:

$$T_{ij} \equiv \{x_j; a_{ij} \wedge x_j \geq b_i\}.$$

Для любых фиксированных i, j справедливы следующие равенства:

$$T_{ij} = [b_i \vee \underline{x}_j, \bar{x}_j], \quad \text{если } a_{ij} \geq b_i \text{ и } b_i \leq \bar{x}_j;$$

$$T_{ij} = \emptyset \quad \text{иначе (т. е. если выполнено или } a_{ij} < b_i, \text{ или } b_i > \bar{x}_j).$$

Доказательство. Так как $a_{ij} \geq b_i$ и $b_i \leq \bar{x}_j$, то $[b_i \vee \underline{x}_j, \bar{x}_j] \neq \emptyset$ и для любого $x_j \in [b_i \vee \underline{x}_j, \bar{x}_j]$ получаем, что $a_{ij} \wedge x_j \geq (b_i \vee \underline{x}_j) \geq b_i$, т. е. $T_{ij} = [b_i \vee \underline{x}_j, \bar{x}_j]$.

Предположим, что либо $a_{ij} < b_i$, либо $b_i > \bar{x}_j$. Тогда либо $a_{ij} \wedge x_j < b_i$, либо $a_{ij} \wedge x_j \geq b_i > \bar{x}_j$, значит, множество T_{ij} должно быть пустым. $\square$

Лемма 2.3. Для произвольной пары индексов $i_1, i_2 \in I^{(1)}$, $i_1 \neq i_2$, и произвольного $j \in J$ либо $T_{i_1j} \subseteq T_{i_2j}$, либо $T_{i_2j} \subseteq T_{i_1j}$.

Доказательство. Если одно из множеств T_{i_1j} , T_{i_2j} является пустым, то утверждение верно. Предположим, что оба множества непусты. Тогда согласно лемме 2.2 $T_{i_rj} = [b_{i_r} \vee \underline{x}_j, \bar{x}_j]$ для $r = 1, 2$. Без ограничения общности можно предположить, что $(b_{i_1} \vee \underline{x}_j) \geq (b_{i_2} \vee \underline{x}_j)$. Тогда $T_{i_1j} \subseteq T_{i_2j}$. $\square$

Из леммы 2.3 получаем, что для произвольного фиксированного $j \in J$ существует такая перестановка индексов $\{i_1, \dots, i_m\}$ множества $I^{(1)}$, что справедливы включения $T_{i_1j} \subseteq T_{i_2j} \subseteq \dots \subseteq T_{i_mj}$. В дальнейшем это свойство множеств T_{ij} будет называться «цепное условие».

Лемма 2.4. $M \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I^{(1)}$ найдётся $j(i) \in J$, такое что $T_{ij} \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $M \neq \emptyset$ и x является произвольным элементом M . Предположим, что $i \in I$ выбрано произвольно. Тогда мы получаем, что

$$\max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j) = a_{ij(i)} \wedge x_{j(i)} \geq b_i,$$

откуда выводим, что $x_{j(i)} \in T_{ij(i)}$, следовательно, $T_{ij(i)} \neq \emptyset$.

Обратно, пусть для каждого $i \in I^{(1)}$ найдётся $j(i) \in J$, такое что $T_{ij} \neq \emptyset$. Рассмотрим элемент $\bar{x}$. Предположим, что $i \in I$ — произвольный элемент. Тогда

$\bar{x} \in T_{ij}$ для каждого непустого множества T_{ij} . Согласно определению $T_{ij(i)}$ получаем, что

$$\max_{j \in J} (a_{ij} \wedge \bar{x}_j) \geq a_{ij(i)} \wedge \bar{x}_{j(i)} \geq b_i.$$

Следовательно, $\bar{x} \in M$, тогда $M \neq \emptyset$. $\square$

По лемме 2.4 мы получаем, что $M = \emptyset$ тогда и только тогда, когда существует $i \in I^{(1)}$, такое что для любых $j \in J$ справедливо $T_{ij} = \emptyset$. С другой стороны, если $M \neq \emptyset$, то $\bar{x} = x^{\max}$ является максимальным элементом множества M .

3. Задачи оптимизации с ограничениями в виде односторонних (max, min)-линейных неравенств

В этом разделе мы решаем задачу оптимизации

$$f(x) \equiv \max_{j \in J} f_j(x_j) \longrightarrow \min \quad (4)$$

с ограничениями

$$\max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j) \geq b_i \quad \text{для всех } i \in I, \quad (5)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad (6)$$

где $\underline{x}, \bar{x} \in R^n$, $I \equiv \{1, \dots, m\}$, $J \equiv \{1, \dots, n\}$, $a_{ij}, b_i \in R$ заданы изначально для всех $i \in I$, $j \in J$.

Далее мы всюду предполагаем, что функции $f_j: R \rightarrow R$ являются непрерывными, M обозначает множество реализуемых решений задачи и $M \neq \emptyset$ (пустота множества M может быть установлена с использованием рассуждений из предыдущего раздела).

Отметим, что формулировка задачи оптимизации (4)–(6) включает также случай односторонних ограничений вида $\leq$ -неравенств, которые могут быть введены в рассмотрение посредством изменения верхних границ $\bar{x}_j$, $j \in J$, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Более того, так как любое равенство может быть представлено в виде двух неравенств $\leq$, $\geq$, формулировка (4)–(6) включает в себя также (max, min)-линейные ограничения в виде равенств.

Определим множества T_{ij} для всех $i \in I$, $j \in J$ следующим образом:

$$T_{ij} \equiv \{x; a_{ij} \wedge x_j \geq b_i \text{ и } x_j \in [\underline{x}_j, \bar{x}_j]\}.$$

Аналогично предыдущему разделу мы получаем, что $x \in M$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ существует по крайней мере одно $j(i) \in J$, такое что $x_{j(i)} \in T_{ij(i)}$. Другими словами, x — реализуемое решение задачи (4)–(6) тогда и только тогда, когда для любого фиксированного $i \in I$ либо $x_1 \in T_{i1}$, либо $x_2 \in T_{i2}, \dots$, либо $x_n \in T_{in}$.

Пусть $i \in I, j \in J$,

$$\tilde{T}_{ij} \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n); x_j \in T_{ij}\}.$$

Тогда задачу (4)–(6) можно заменить задачей оптимизации

$$f(x) \equiv \max_{j \in J} f_j(x_j) \longrightarrow \min \quad (7)$$

при ограничениях

$$x \in M = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} \tilde{T}_{ij}. \quad (8)$$

Обозначим

$$f_j(x_j^{(i)}) = \min_{x_j \in T_{ij}} (f_j(x_j))$$

и положим $f_j(x_j^{(i)}) = \infty$, если $T_{ij} = \emptyset$;

$$f_{p(i)}(x_{p(i)}^{(i)}) = \min_{j \in J} (f_j(x_j^{(i)}));$$

$$R_k \equiv \{i \in I; j(i) = k\} \text{ для всех } k \in J;$$

$$T_k \equiv \bigcap_{i \in R_k} T_{ik} \text{ для всех } k \in J.$$

Определим вектор $\hat{x}$ по формуле

$$f_k(\hat{x}_k) \equiv \min_{x_k \in T_k} (f_k(x_k))$$

для всех $k \in J$, для которых $R_k \neq \emptyset$, и

$$f_k(\hat{x}_k) \equiv \min_{x_k \in [\underline{x}_k, \bar{x}_k]} f_k(x_k)$$

для каждого $k \in J$ при $R_k = \emptyset$.

Лемма 3.1. Вектор $\hat{x}$ является реализуемым решением задачи (4)–(6).

Доказательство. Обратим внимание, что так как множества T_{ij} удовлетворяют цепному условию (см. лемму 2.3), то для любого непустого множества R_k , $k \in J$, существует индекс $i(k) \in R_k$, такой что $T_k = T_{i(k)k}$, и следовательно, $T_{i(k)k} \subseteq T_{ik}$ для всех $i \in R_k$. Так как мы предположили, что $M \neq \emptyset$, то по лемме 2.4 для каждого $i \in I$ существует по крайней мере один индекс $j(i) \in J$, такой что T_{ij} является непустым. Следовательно, для каждого $i \in I$ существует индекс $k(i) \in J$, такой что $i \in R_{k(i)}$, или, другими словами, $\hat{x}_{k(i)} \in T_{k(i)} \subseteq T_{i(k(i))}$. Имеем, что

$$a_i(\hat{x}) = \max_{j \in J} (a_{ij} \wedge \hat{x}_j) \geq a_{ik(i)} \wedge \hat{x}_{k(i)} \geq b_i.$$

Так как $i \in I$ было выбрано произвольно, получаем, что $\hat{x} \in M$, т. е. $\hat{x}$ является реализуемым решением задачи (4)–(6). $\square$

Теорема 3.1. Вектор $\hat{x}$ является оптимальным решением задачи (4)–(6).

Доказательство. Заметим, что вектор $\hat{x}$ удовлетворяет системе (5), (6) согласно лемме 3.1. Таким образом, $\hat{x}$ является реализуемым решением рассматриваемой задачи оптимизации. Остаётся доказать оптимальность этого решения. Для этого необходимо доказать, что $f(x) \geq f(\hat{x})$ для всех $x \in M$. Предположим противное, т. е. что существует реализуемое решение $\tilde{x}$, такое что $f(\tilde{x}) < f(\hat{x})$. Допустим, что $f(\hat{x}) = f_p(\hat{x}_p)$. Так как $f(\tilde{x}) < f(\hat{x})$, то $f_p(\tilde{x}_p) < f_p(\hat{x}_p)$. Тогда $\tilde{x}_p \notin T_p$. Пусть $i(p) \in I$ такое, что $T_p = T_{i(p)p}$. Тогда $\tilde{x}_p \notin T_{i(p)p}$. Значит, существует индекс $r \in J$, такой что $\tilde{x}_r \in T_{i(p)r}$ (иначе $\tilde{x}_j \notin T_{i(p)j}$ для всех $j \in J$, откуда следует, что $a_{i(p)}(\tilde{x}) = \max_{j \in J} (a_{ij} \wedge \tilde{x}_j) < b_{i(p)}$ и $\tilde{x}$ не является реализуемым). Однако если $\tilde{x}_r \in T_{i(p)r}$, то получаем, что

$$f(\tilde{x}) \geq f_r(\tilde{x}_r) \geq \min_{x_r \in T_{i(p)r}} (f_r(x_r)) \geq \min_{x_p \in T_{i(p)p}} (f_p(x_p)) = f_p(\hat{x}_p) = f(\hat{x}),$$

что противоречит предположению, что верно неравенство $f(\tilde{x}) < f(\hat{x})$. Это противоречие доказывает оптимальность $\hat{x}$. $\square$

Вычислительная сложность нахождения оптимального решения для (4)–(6) зависит от сложности нахождения минимума для $f_j(x_j)$ на отрезке. Например, такой минимум может быть легко найден, если функция f_j является возрастающей, убывающей, выпуклой, вогнутой или унимодальной.

4. Двусторонние (max, min)-линейные системы уравнений

Пусть $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $i \in I$, $j \in J$ — заданные числа и

$$a_i(x) \equiv \max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j) \quad \text{для всех } i \in I,$$

$$b_i(x) \equiv \max_{j \in J} (b_{ij} \wedge x_j) \quad \text{для всех } i \in I.$$

Рассмотрим следующую систему (max, min)-линейных уравнений:

$$a_i(x) = b_i(x) \quad \text{для всех } i \in I. \quad (9)$$

Множество всех решений системы (9) будем обозначать через M . Определим также множества $M(\bar{x})$, $M_i(\bar{x})$ для произвольного $\bar{x} \in \bar{R}^n$, $i \in I$:

$$M(\bar{x}) \equiv \{x \mid x \in M \text{ и } x \leq \bar{x}\}, \quad (10)$$

$$M_i(\bar{x}) \equiv \{x \mid a_i(x) = b_i(x) \text{ и } x \leq \bar{x}\}. \quad (11)$$

Множества $M(\bar{x})$, $M_i(\bar{x})$ всегда являются непустыми, так как, например, $x(\alpha) \equiv (\alpha, \dots, \alpha) \in M(\bar{x})$, если $\alpha \leq \min_{(i,j) \in I \times J} (a_{ij} \wedge b_{ij} \wedge \bar{x}_j)$. Более того, если $\bar{x} = (\infty, \dots, \infty)$, то несомненно $M(\bar{x}) = M$, а если $\underline{x} = (-\infty, \dots, -\infty)$, то $\underline{x} \leq x$ для любого $x \in M$.

Определение 4.1. Пусть $L \subseteq \bar{R}^n$, $\tilde{x} \in L$. Тогда $\tilde{x}$ называется *максимальным элементом* L , если неравенство $x \leq \tilde{x}$ справедливо для произвольного $x \in L$.

Замечание 4.1. Алгоритм, представленный в [8], для любого заданного $\bar{x}$ находит максимальный элемент $M(\bar{x})$, т. е. такой элемент $x^{\max} \in M(\bar{x})$, что $x \leq x^{\max}$ для всех $x \in M(\bar{x})$.

В дальнейшем мы дадим теоретическое обоснование для алгоритма нахождения максимального элемента $x^{\max}$ в $M(\bar{x})$. Если $\bar{x} \in M(\bar{x})$, то $x^{\max} = \bar{x}$. Таким образом, далее мы будем предполагать, что $\bar{x} \notin M(\bar{x})$. Более того, также без ограничения общности можно предполагать модификацию обозначений, гарантирующих неравенства $a_i(\bar{x}) \leq b_i(\bar{x})$ для всех $i \in I$. Так как мы предположили, что $\bar{x} \notin M(\bar{x})$, множество

$$I^<(\bar{x}) \equiv \{i \in I; a_i(\bar{x}) < b_i(\bar{x})\}$$

является непустым. Положим

$$I^=(\bar{x}) \equiv \{i \in I; a_i(\bar{x}) = b_i(\bar{x})\}.$$

Введём следующее обозначение для любой заданной верхней границы $\bar{x}$:

$$\alpha(\bar{x}) \equiv \min_{i \in I^<(\bar{x})} a_i(\bar{x}),$$

$$I^<(\alpha(\bar{x})) \equiv \{i \in I^<(\bar{x}); a_i(\bar{x}) = \alpha(\bar{x})\},$$

$$I^=(\alpha(\bar{x})) \equiv \{i \in I^=(\bar{x}); a_i(\bar{x}) \leq \alpha(\bar{x})\},$$

$$J(\alpha(\bar{x})) \equiv \{j \in J; \text{ найдётся } i \in I^<(\alpha(\bar{x})), \text{ такой что } b_{ij} \wedge \bar{x}_j > \alpha(\bar{x})\}.$$

Для упрощения обозначений мы заменим $\alpha(\bar{x})$ на α там, где это не будет вызывать разночтений.

Теорема 4.1. Пусть $\bar{x} \notin M(\bar{x})$. Предположим, что вектор $\tilde{x}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{x}_j = \alpha \text{ для } j \in J(\alpha), \quad \tilde{x}_j = \bar{x}_j \text{ для } j \in J \setminus J(\alpha). \quad (12)$$

Тогда $\tilde{x}$ является максимальным элементом множества всех решений системы

$$a_i(x) = b_i(x) \text{ для всех } i \in I^<(\alpha) \cup I^=(\alpha), \quad (13)$$

$$x \leq \bar{x} \text{ для всех } j \in J. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $k \in I^<(\alpha)$ выбрано произвольно. Тогда $a_k(\bar{x}) = \alpha < b_k(\bar{x})$. Положим

$$J_k(\alpha) \equiv \{j \in J; b_{kj} \wedge \bar{x}_j > \alpha\}.$$

Тогда $J_k(\alpha) \neq \emptyset$, $J_k(\alpha) \subseteq J(\alpha)$. Заметим, что для любого $j \in J_k(\alpha)$ справедливы неравенства $b_{kj} > \alpha$ и $\bar{x}_j > \alpha$. Из определения $\tilde{x}$ получаем (см. также (12)), что $b_{kj} \wedge \tilde{x}_j \leq \alpha$ для всех $j \in J$ и $b_{kj} \wedge \tilde{x}_j = \alpha$ для всех $j \in J_k(\alpha)$, так что $b_k(\tilde{x}) = \alpha$. Отметим, что $a_k(\tilde{x}) = \alpha$. Пусть p является произвольным индексом J , таким что $a_k(\tilde{x}) = a_{kp} \wedge \tilde{x}_p$, т. е. $a_{kp} \wedge \tilde{x}_p = \alpha$. Согласно (12) имеем, что $a_{kp} \wedge \tilde{x}_p = a_{kp} \wedge \bar{x}_p = a_k(\bar{x}) = \alpha$, если $p \notin J(\alpha)$, и $a_{kp} \wedge \tilde{x}_p = a_{kp} \wedge \alpha = \alpha$, если $j \in J(\alpha)$. Так как $a_{kj} \wedge \tilde{x}_j \leq a_{kj} \wedge \bar{x}_j$ для всех $j \in J$, мы получаем, что $a_k(\tilde{x}) = \alpha = b_k(\tilde{x})$.

Предположим теперь, что k — произвольный индекс $I^=(\alpha)$, такой что $a_k(\bar{x}) \leq \alpha$ и $a_k(\bar{x}) = b_k(\bar{x}) = \beta_k \leq \alpha$. Пусть $s \in J$ является индексом, для

которого $a_k(\bar{x}) = a_{ks} \wedge \bar{x}_s$. Если $s \notin J(\alpha)$, то $\tilde{x}_s = \bar{x}_s$ (см. также (12)), следовательно, $a_{ks} \wedge \tilde{x}_s = a_{ks} \wedge \bar{x}_s = \beta_k$.

Предположим теперь, что $s \in J(\alpha)$. Тогда существует индекс $i \in I$, такой что $b_{is} \wedge \bar{x}_s > \alpha$, следовательно, $\bar{x}_s > \alpha$. По предположению $a_k(\bar{x}) = a_{ks} \wedge \bar{x}_s = \beta_k \leq \alpha$. Тогда получаем, что $\bar{x}_s > \alpha$, значит, $a_{ks} = \beta_k$. Так как $s \in J(\alpha)$, имеем $\tilde{x}_s = \alpha \geq \beta_k$. Таким образом, $a_{ks} \wedge \tilde{x}_s = \beta_k$. Иначе для всех $j \in J$ справедливо неравенство $a_{kj} \wedge \tilde{x}_j \leq a_{kj} \wedge \bar{x}_j \leq \beta_k$, откуда следует, что $a_k(\tilde{x}) = \beta_k$.

Найдём теперь значение $b_k(\tilde{x})$. Мы предположили, что $b_k(\bar{x}) = \beta_k \leq \alpha$. Пусть также $b_k(\bar{x}) = b_{ks} \wedge \bar{x}_s$. Как и ранее, $b_{ks} \wedge \tilde{x}_s = b_{ks} \wedge \bar{x}_s$, если $s \notin J(\alpha)$. Если $s \in J(\alpha)$, то, как и ранее, $\bar{x}_s > \alpha \geq \beta_k$, $\tilde{x}_s = \alpha \geq \beta_k$. Следовательно, $b_{ks} = \beta_k$, значит, $b_{ks} \wedge \tilde{x}_s = b_{ks} \wedge \alpha = \beta_k$. Иначе $b_{kj} \wedge \tilde{x}_j \leq b_{kj} \wedge \bar{x}_j$ для всех $j \in J$. Получаем, что $b_k(\tilde{x}) = \beta_k = a_k(\tilde{x})$, т. е. равенство с индексом $k \in I^=(\alpha)$, справедливое в точке $\bar{x}$, остаётся справедливым в точке $\tilde{x}$.

Остаётся доказать, что $\tilde{x}$ является максимальным элементом, удовлетворяющим системе (13), (14). Предположим для этого, что x — произвольная точка, для которой $\tilde{x} \leq x \leq \bar{x}$, $x \neq \tilde{x}$. Таким образом, существует индекс $r \in J$, удовлетворяющий условию $\tilde{x}_r < x_r \leq \bar{x}_r$. Таким образом, $r \in J(\alpha)$ и существует индекс $i \in I^<(\alpha)$, такой что $a_i(\tilde{x}) = \alpha < b_{ir} \wedge x_r \leq b_i(x)$ и согласно предыдущим рассуждениям $a_{ir} = \alpha = a_{ir} \wedge \tilde{x}_r = a_{ir} \wedge x_r$. Так как это равенство справедливо для произвольного индекса r , удовлетворяющего неравенству $\tilde{x}_r < x_r \leq \bar{x}_r$, а для других индексов $j \in J$ справедливо $x_j = \tilde{x}_j = \bar{x}_j$, мы получаем, что $a_i(x) = a_i(\tilde{x}) = \alpha < b_{ir} \wedge x_r \leq b_i(x)$, следовательно, x не удовлетворяет системе (13), (14), что завершает доказательство. $\square$

Обобщая приведённые выше рассуждения, мы предлагаем следующую процедуру для нахождения максимального элемента $x^{\max}$ множества $M(\bar{x})$. Согласно (12) найдём $\tilde{x}$, который по теореме 4.1 является максимальным элементом множества всех решений системы (13), (14). Следовательно, если $\tilde{x} \in M(\bar{x})$, то $\tilde{x} = x^{\max}$, и можно остановиться. Иначе используем $\tilde{x}$ в качестве новой верхней границы и повторяем процедуру.

Предположим, возможно изменяя обозначения, что $a_i(\tilde{x}) \leq b_i(\tilde{x})$ для всех $i \in I$. Пусть также $\tilde{x} \notin M(\bar{x})$. Вернёмся к обозначению $\alpha(\bar{x})$ для любой верхней границы $\bar{x}$, и пусть $\alpha(\tilde{x}) \equiv \min_{i \in I^<(\tilde{x})} a_i(\tilde{x})$. Так как после возможной замены переменных, приводящей к $a_i(\tilde{x}) \leq b_i(\tilde{x})$ для всех $i \in I$, $\alpha(\tilde{x}) \equiv \min_{i \in I^<(\tilde{x})} a_i(\tilde{x}) \geq \alpha(\bar{x})$,

получаем, что $I^=(\alpha(\bar{x})) \subseteq I^=(\alpha(\tilde{x}))$. Так как $b_{ij} \wedge \bar{x}_j \leq \alpha(\bar{x})$ для всех $j \in J(\alpha(\bar{x}))$, имеем, что $J(\alpha(\tilde{x})) \cap J(\alpha(\bar{x})) = \emptyset$. Следовательно, если использовать $\tilde{x}$ как новую верхнюю границу на следующей итерации, то в (12) исчезнет по крайней мере одна переменная. В итоге будет не более чем n таких итераций.

Кроме того, так как $\alpha(\tilde{x}) \geq \alpha(\bar{x})$, все уравнения с индексами $i \in I^<(\alpha(\bar{x})) \cup I^=(\alpha(\bar{x}))$, которые справедливы, останутся справедливыми по теореме 4.1. Таким образом, на следующей итерации с новой верхней границей $\tilde{x}$ после применения формулы (12) верные уравнения остаются верными и по крайней мере одно новое уравнение с индексом $i \in I^<(\alpha(\tilde{x}))$ становится верным. Получаем,

что число необходимых итераций не превышает $\min(n, m)$. Дадим теперь явное пошаговое описание этого алгоритма.

Алгоритм.

- 1 Ввод: $m, n, \bar{x}$.
- 2 Если $\bar{x} \in M(\bar{x})$, то $x^{\max} := \bar{x}$, СТОП.
- 3 Изменить обозначения, чтобы $a_i(\bar{x}) \leq b_i(\bar{x})$ для всех $i \in I$.
- 4 Найти $\alpha(\bar{x})$, $I^<(\alpha(\bar{x}))$, $I^=(\alpha(\bar{x}))$.
- 5 Положить $\tilde{x}_j := \alpha(\bar{x})$, если $j \in J(\alpha(\bar{x}))$, $\tilde{x}_j := \bar{x}_j$ иначе.
- 6 Если $\tilde{x} \in M(\bar{x})$, то $x^{\max} := \tilde{x}$, СТОП.
- 7 Положить $\bar{x} := \tilde{x}$, перейти на шаг 3.

5. Двусторонние (max, min)-линейные системы неравенств

В данном разделе мы изучаем системы двусторонних (max, min)-линейных неравенств. Любое неравенство может быть преобразовано в равенство посредством рассмотрения дополнительной переменной, имеющей достаточно большую верхнюю границу (например, если она больше всех коэффициентов системы), с подходящей стороны. Следовательно, алгоритм, описанный в предыдущем разделе, может быть использован также и для решения систем (max, min)-линейных неравенств.

Пример 5.1. Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{aligned} \max\{5 \wedge x_1, 7 \wedge x_2, 10 \wedge x_3\} &\leq \max\{3 \wedge x_1, 5 \wedge x_2, 6 \wedge x_3\}, \\ \max\{9 \wedge x_1, 8 \wedge x_2, 1 \wedge x_3\} &\geq \max\{5 \wedge x_1, 1 \wedge x_2, 2 \wedge x_3\}, \\ x_j &\leq 15 \text{ для } j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Эту систему можно заменить на следующую систему уравнений посредством рассмотрения дополнительных переменных x_4, x_5 :

$$\begin{aligned} \max\{5 \wedge x_1, 7 \wedge x_2, 10 \wedge x_3, 15 \wedge x_4\} &= \max\{3 \wedge x_1, 5 \wedge x_2, 6 \wedge x_3\}, \\ \max\{9 \wedge x_1, 8 \wedge x_2, 1 \wedge x_3\} &= \max\{5 \wedge x_1, 1 \wedge x_2, 2 \wedge x_3, 15 \wedge x_5\}, \\ x_j &\leq 15 \text{ для } j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Максимальным элементом первой системы является $x^{\max} = (15, 6, 6)$. Для второй системы максимальный элемент равен $x^{\max} = (15, 6, 6, 15, 9)$.

Заметим, что если верхняя граница для x_5 недостаточно велика (например, меньше 9), то нет возможности преобразовать второе неравенство в равенство посредством подходящего выбора значений для x_5 и нам потребуется выбрать $x_1 < 15$. Тогда эти две системы не будут эквивалентными.

Преобразования систем (max, min)-линейных неравенств к эквивалентным системам (max, min)-линейных уравнений показывает, что системы неравенств и системы уравнений имеют похожие свойства. Заметим также, что другой способ нахождения максимального элемента для системы неравенств состоит в модификации алгоритма для системы уравнений, описанного в предыдущем разделе.

В дальнейшем мы будем предполагать, что в левой и правой частях системы неравенств находятся одинаковые переменные. Для упрощения обозначений положим $\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$ для произвольных $\alpha, \beta \in R$.

Рассмотрим следующую систему неравенств:

$$a_i(x) \geq b_i(x), \quad i \in I, \quad (15)$$

здесь, как и в предыдущем разделе,

$$a_i(x) = \max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j), \quad b_i(x) = \max_{j \in J} (b_{ij} \wedge x_j).$$

Пусть $M^{\geq}$ обозначает множество всех решений системы (15). Пусть $x^{\max}$ обозначает максимальный элемент для $M^{\geq}$. Положим

$$M^{\geq}(\underline{x}, \bar{x}) = \{x; x \in M^{\geq} \text{ и } \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$$

для любого конечного $\underline{x} \leq \bar{x}$. Получаем, что

$$M^{\geq}(\underline{x}, \bar{x}) = M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max}) \subseteq M^{\geq},$$

где $x^{\max}$ обозначает максимальный элемент для $M^{\geq}(\underline{x}, \bar{x})$.

Множества T_{ij} , $i \in I$, $j \in J$, определяются следующим образом:

$$T_{ij} = \{x_j; x_j \leq x_j^{\max} \text{ и } a_{ij} \wedge x_j \geq b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j\}.$$

Если i_1, i_2 обозначают два различных индекса из I , $j \in J$ и $b_{i_2}(\underline{x}) \vee \underline{x}_j \leq b_{i_1}(\underline{x}) \vee \underline{x}_j$, то $T_{i_1j} \subseteq T_{i_2j}$. Получаем, что для любого подмножества в I , состоящего из r индексов, существует перестановка $i_1, \dots, i_r$ этих индексов, при которой справедливы включения $T_{i_1j} \subseteq T_{i_2j} \subseteq \dots \subseteq T_{i_rj}$. Следовательно $\bigcap_{h=1}^r T_{i_hj} = T_{i_1j}$. Непосредственно проверяется, что множества T_{ij} обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} T_{ij} &\neq \emptyset \text{ тогда и только тогда, когда } a_{ij} \geq b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j, \\ T_{ij} &\neq \emptyset \text{ влечёт } T_{ij} = [b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j, x_j^{\max}]. \end{aligned}$$

Так как мы предполагаем, что $\underline{x} \leq x^{\max}$, то множество $M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$ непусто. Заметим, что для произвольных $x \in M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$ и $i \in I$ справедливы неравенства $b_i(x) \geq b_i(\underline{x})$ и $x_j \geq \underline{x}_j$ для всех $j \in J$, кроме того, существуют $i \in I$ и индекс $j(i) \in J$, такие что $T_{ij(i)} \neq \emptyset$ (иначе множество $M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$ было бы пусто, так как в этом случае $a_{ij} < b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j$ для всех $j \in J$, и следовательно, $a_i(x) < b_i(x)$ для всех $x \in R^n$, что противоречит предположению $\underline{x} \leq x^{\max}$).

Заметим, что если для некоторого фиксированного $j \in J$ справедливы неравенства $a_{ij} < b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j$ для всех $i \in I$, то $a_{ij} \wedge x_j < b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j$ для всех $x_j \in R$. Значит, $T_{ij} = \emptyset$ для любого $i \in I$. Мы исключим такие переменные из рассмотрений и предположим, что для каждого $j \in J$ существует по крайней мере один «строчный» индекс $i \in I$, такой что $a_{ij} \geq (b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j)$.

Определим множества V_j , $j \in J$, следующим образом:

$$V_j = \{i \in I; a_{ij} \geq b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_j\}.$$

Обозначим

$$\max_{k \in V_j} (b_k(\underline{x})) = b_{k(j)}(\underline{x}).$$

Вектор $\tilde{x}$ определяется следующим образом:

$$\tilde{x}_j = \max_{k \in V_j} (b_k(\underline{x})) \vee \underline{x}_j = b_{k(j)}(\underline{x}) \vee \underline{x}_j \quad \text{для всех } j \in J. \quad (16)$$

Следовательно, $\tilde{x}_j \geq \underline{x}_j$ для всех $j \in J$.

Лемма 5.1. Пусть $\tilde{x}$ определяется как в (16). Предположим, что $i \in I$ и

$$F(\tilde{x}) \equiv \{p \in J; b_i(\tilde{x}) = b_{ip} \wedge \tilde{x}_p\}.$$

Тогда существует индекс $p \in F(\tilde{x})$, такой что $i \in V_p$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, т. е. $i \notin V_p$ для всех $p \in F(\tilde{x})$. Тогда $a_{ip} < b_i(\underline{x}) \vee \underline{x}_p$ и, следовательно, $a_{ip} < \underline{x}_p$. Получаем, что

$$a_{ij} \leq a_{ip} = a_{ip} \wedge \underline{x}_p = a_{ip} \wedge \tilde{x}_p = a_{ip} \wedge x_p^{\max} \quad \text{для всех } j \in J, \quad p \in F(\tilde{x}).$$

Так как мы предположили, что $\underline{x} \leq x^{\max} \leq \tilde{x}$, получаем, что

$$a_i(x^{\max}) = a_{ip} \wedge x_p^{\max} = a_{ip} \wedge \tilde{x}_p = a_{ip} < \underline{x}_p \leq \tilde{x}_p.$$

Следовательно,

$$a_i(\tilde{x}) = a_{ip} \wedge \tilde{x}_p = a_{ip} < b_{ip} \wedge \tilde{x}_p.$$

По построению $x^{\max}$ имеем, что $x_p^{\max} = a_{ip} < \underline{x}_p$, что даёт противоречие, так как мы предположили, что $\underline{x} \leq x^{\max}$ (ср. с шагом [5] алгоритма для нахождения $x^{\max}$ из предыдущего раздела). Это противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 5.1. Пусть $\tilde{x}$ определяется формулой (16). Тогда $\tilde{x} \in M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$.

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{x} \geq \underline{x}$. Остаётся доказать, что $a_i(\tilde{x}) \geq b_i(\tilde{x})$ для всех $i \in I$. Пусть $i \in I$ выбрано произвольно. Имеем

$$\begin{aligned} b_i(\tilde{x}) &= \max_{j \in J} (b_{ij} \wedge \tilde{x}_j) = \\ &= \max_{j \in J} \left(b_{ij} \wedge \left(\max_{k \in V_j} (b_k(\underline{x}) \vee \underline{x}_j) \right) \right) = \max_{j \in J} \left(b_{ij} \wedge (b_{k(j)}(\underline{x}) \vee \underline{x}_j) \right). \end{aligned}$$

Предположим, что

$$b_i(\tilde{x}) = \max_{j \in J} (b_{ij} \wedge \tilde{x}_j) = b_{ij(i)} \wedge \tilde{x}_{j(i)}.$$

По лемме 5.1 можно считать, что $i \in V_{j(i)}$, тогда получаем, что $a_{ij(i)} \geq \tilde{x}_{j(i)}$, значит,

$$a_i(\tilde{x}) \geq a_{ij(i)} \wedge \tilde{x}_{j(i)} = \tilde{x}_{j(i)} \geq b_{ij(i)} \wedge \tilde{x}_{j(i)} = b_i(\tilde{x}).$$

Так как $i \in I$ произвольно, то теорема доказана. $\square$

Элемент $\tilde{x}$, определяемый посредством (16), показывает, что заданная нижняя граница $\underline{x}$ не обязательно должна быть элементом $M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$. Элемент $\tilde{x}$ является максимальным элементом множества $M^{\geq}(\underline{x}, \tilde{x})$, и $M^{\geq}(\underline{x}, \tilde{x}) \subseteq M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$.

Более того, мы получили явную зависимость $\tilde{x}$ от заданной нижней границы $\underline{x}$ (ср. с (16)), которую можно использовать для анализа чувствительности множества $M^{\geq}(\underline{x}, \tilde{x})$ или для постоптимального анализа для задач оптимизации, у которых множество реализуемых решений равно $M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$.

Заметим, что не существует компоненты $\tilde{x}$, которая могла бы быть уменьшена без того, чтобы множество $M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$ было изменено, или, другими словами, если $y \not\geq \tilde{x}$, то $M^{\geq}(\underline{x}, y) \not\subseteq M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$. Этот результат следует из определения $\tilde{x}_j$, $j \in J$, так как значения $\tilde{x}_j$ определяются элементами заданной матрицы B или нижними границами для $\underline{x}_j$. Заметим, что ни одно из этих значений не может быть увеличено без изменения множества $M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max})$ или изменения заданной матрицы B . Свойства $\tilde{x}$ позволяют нам решить некоторые оптимизационные задачи вида

$$f(x) \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$x \in M^{\geq}(\underline{x}, x^{\max}),$$

где функции f_j , $j \in J$, являются непрерывными.

Изложение прямых точных методов решения, а также анализ чувствительности и параметризации указанных задач оптимизации не являются целью данной статьи и будут обсуждаться в отдельной работе. В следующем разделе мы будем обсуждать эффективные алгоритмы аппроксимации в этих задачах для специального класса целевых функций вида

$$f(x) = \max_{j \in J} f_j(x_j),$$

где f_j , $j \in J$, — возрастающая или унимодальная функция.

Мы уже упоминали, что система неравенств может быть преобразована в систему уравнений посредством добавления дополнительных переменных. Заметим также, что, наоборот, системы уравнений, рассматривавшиеся в предыдущем разделе, могут также решаться при помощи методов данного раздела, если мы заменим систему уравнений на систему неравенств вида

$$\begin{aligned} a_i(x) &\geq b_i(x), & i \in I, \\ b_i(x) &\geq a_i(x), & i \in I, \\ x_j &\geq \underline{x}_j, & j \in J. \end{aligned}$$

Свойства систем $(\max, \min)$ -линейных уравнений и неравенств, изучавшихся в данном разделе, можно резюмировать следующим образом.

1. Любая система $(\max, \min)$ -линейных уравнений и неравенств разрешима и имеет единственный максимальный элемент $x^{\max}(A, B)$, зависящий от матриц A, B с конечными элементами a_{ij}, b_{ij} (наличие бесконечных элементов может привести к неразрешимости этой системы).
2. Если добавить дополнительное условие $x \leq \bar{x}$, то система также разрешима и имеет максимальный элемент $x^{\max}(A, B, \bar{x}) \leq x^{\max}(A, B)$.
3. Система с конечной нижней границей для переменных (т. е. с дополнительным условием $x \geq \underline{x}$) является разрешимой тогда и только тогда, когда $\underline{x} \leq x^{\max}(A, B)$, или, в случае дополнительной верхней границы $\bar{x}$, тогда и только тогда, когда $\underline{x} \leq x^{\max}(A, B, \bar{x})$.

6. Задачи оптимизации с ограничениями в виде двусторонних $(\max, \min)$ -линейных уравнений — итерационный метод

В данном разделе мы рассматриваем задачу оптимизации, которая является комбинацией задач, решённых в разделах 3 и 4. Другими словами, мы решаем следующую задачу оптимизации:

$$f(x) \equiv \max_{j \in J} f_j(x_j) \longrightarrow \min \quad (17)$$

при ограничениях

$$\max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j) = \max_{j \in J} (b_{ij} \wedge x_j) \quad \text{для всех } i \in I, \quad (18)$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \quad (19)$$

где $\underline{x}, \bar{x} \in R^n$, $I \equiv \{1, \dots, m\}$, $J \equiv \{1, \dots, n\}$, $a_{ij}, b_{ij} \in R$ заданы изначально для всех $i \in I, j \in J$.

Будем использовать обозначения, введённые в разделе 4. В частности, M будет обозначать множество всех решений (18). Мы также будем использовать обозначение

$$M(\underline{x}, \bar{x}) \equiv \{x \mid x \in M \text{ и } \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}.$$

Будем предполагать, что $f_j(x_j)$, $j \in J$, являются непрерывными унимодальными функциями на $[\underline{x}_j, \bar{x}_j]$, и введём обозначение $x_j^* \equiv \operatorname{argmin}(f_j(x_j))$, $x_j \in R$; здесь f_j строго убывает на $[-\infty, x_j^*]$ и строго возрастает на $[x_j^*, \infty]$. Для упрощения наших рассуждений мы будем предполагать, что $x_j^* \in [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$ для всех $j \in J$, и положим $\underline{f}_j \equiv f(x_j^*)$, $\bar{f}_j \equiv \max\{f_j(\underline{x}_j), f_j(\bar{x}_j)\}$.

Позже мы приведём итерационный алгоритм для решения задачи минимизации (17)–(19).

Лемма 6.1. Пусть $\underline{y} \leq \bar{y}$ и $y^{\max}$ является максимальным элементом $M(\bar{y})$. Тогда $M(\underline{y}, \bar{y}) \neq \emptyset$ в том и только том случае, когда $\underline{y} \leq y^{\max}$.

Доказательство. Если $\underline{y} \leq y^{\max}$, то $y^{\max} \in M(\underline{y}, \bar{y})$, и следовательно, $M(\underline{y}, \bar{y}) \neq \emptyset$. Если $\underline{y} \not\leq y^{\max}$, то $M(\underline{y}, \bar{y}) = \emptyset$, так как любой элемент $M(\underline{y}, \bar{y})$ должен удовлетворять неравенствам $\underline{y} \leq y \leq y^{\max}$. Последнее невозможно при предположении, что $\underline{y} \not\leq y^{\max}$. $\square$

Определение 6.1. Пусть x^{opt} является оптимальным решением задачи (17)–(19). Элемент $x(\varepsilon)$ называется ε -аппроксимацией для x^{opt} , если $f(x(\varepsilon)) - f(x^{\text{opt}}) < \varepsilon$ и $x(\varepsilon) \in M(\underline{x}, \bar{x})$.

Лемма 6.2. Пусть $j \in J$ и $\alpha \in R$. Положим

$$V_j(\alpha) \equiv \{x_j \in [\underline{x}_j, \bar{x}_j]; f_j(x_j) \leq \alpha\}.$$

Тогда $V_j(\alpha) = \emptyset$ или $V_j(\alpha) = [\underline{x}_j(\alpha), \bar{x}_j(\alpha)]$, где $\underline{x}_j(\alpha) \geq \underline{x}_j$, $\bar{x}_j(\alpha) \leq \bar{x}_j$.

Доказательство. Так как мы предположили, что функции f_j , $j \in J$, являются непрерывными и унимодальными, а точка поворота x_j^* содержится в интервале $[\underline{x}_j, \bar{x}_j]$, получаем, что $\operatorname{argmin}(f_j(x_j)) = x_j^*$. Следовательно, если $f_j(x_j^*) > \alpha$, то $V_j(\alpha) = \emptyset$, иначе $V_j(\alpha) = [\underline{x}_j(\alpha), \bar{x}_j(\alpha)]$ является подмножеством отрезка $[\underline{x}_j, \bar{x}_j]$ со свойством $f_j(\underline{x}_j(\alpha)) = f_j(\bar{x}_j(\alpha)) = \alpha$. $\square$

Алгоритм.

- 1 Рассмотреть $\underline{x}$, $\bar{x}$, $\varepsilon > 0$, $x_j^* := \operatorname{argmin}\{f_j(x_j); \underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j\}$ для всех $j \in J$, $\underline{f} := f(x^*)$, $\bar{f} := \max(f(\underline{x}), f(\bar{x}))$.
- 2 Найти максимальный элемент $\tilde{x}$ множества $M(\bar{x})$, используя метод из [8].
- 3 Если $\underline{x} \not\leq \tilde{x}$, то $M(\underline{x}, \bar{x}) = \emptyset$, СТОП.
- 4 $\bar{f} := \max(f(\underline{x}), f(\tilde{x}))$, найти $\underline{x}(\alpha)$, $\bar{x}(\alpha)$.
- 5 Если $f(\tilde{x}) - \underline{f} \leq \varepsilon$, то $\tilde{x}$ является ε -аппроксимацией оптимального решения, СТОП.
- 6 $\alpha := \underline{f} + (\bar{f} - \underline{f})/2$, найти $\underline{x}(\alpha)$, $\bar{x}(\alpha)$, $\underline{f} := \min\{f(x); \underline{x}(\alpha) \leq x \leq \bar{x}(\alpha)\}$.
- 7 Найти максимальный элемент $\tilde{x}^{(1)}$ множества $M(\bar{x}(\alpha))$, используя метод из [8].
- 8 Если $\underline{x}(\alpha) \not\leq \tilde{x}^{(1)}$, то положить $\underline{f} := f(\bar{x}(\alpha))$ и перейти к шагу 6.
- 9 Положить $\tilde{x} := \tilde{x}^{(1)}$ и перейти к шагу 4.

7. Приложения, числовые примеры

Пример 7.1. Рассмотрим ситуацию, когда некоторые средства перевозки разного размера везут товары из пунктов $i \in I$ в терминал T . Товары выгружаются в терминале T , а средства транспортировки (возможно, с некоторыми другими товарами, загруженными в терминале T) должны вернуться в пункт i . Мы

предполагаем, что транспортировка между пунктом i и терминалом T возможна только через один из пунктов (например, через города) $j \in J$ и пропускная способность дорог между пунктами i и j равна a_{ij} . Мы должны соединить пункты j с терминалом T посредством дороги с пропускной способностью x_j таким образом, чтобы итоговая пропускная способность дорог между пунктом i и терминалом T равнялась $a_{ij} \wedge x_j$. В обратном направлении транспорт из T в i проходит через различные пункты $k \in K$ с пропускными способностями дорог между k и i , равными b_{ik} . Нам надо соединить пункты k и T посредством дороги с пропускной способностью y_k так, чтобы общая пропускная способность дорог между T и i равнялась $b_{ik} \wedge y_k$.

Предположим, что транспортные средства могут проехать только через дороги, пропускная способность которых соответствует размеру транспортного средства, и наша задача состоит в выборе подходящих пропускных способностей x_j, y_k . Для того чтобы каждое транспортное средство могло вернуться в пункт i , естественно потребовать, чтобы для каждого i максимальная возможная пропускная способность дороги, ведущей из пункта i в терминал T через пункт j , равнялась максимальной возможной пропускной способности дороги из терминала T в пункт i , проходящей через пункт k . Другими словами, мы должны выбрать x_j и y_k таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\max_{j \in J} (a_{ij} \wedge x_j) = \max_{k \in K} (b_{ik} \wedge y_k) \quad \text{для всех } i \in I. \quad (20)$$

Эта задача легко преобразуется к системе, имеющей одинаковые переменные с обеих сторон. В самом деле, мы можем рассмотреть вектор $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ и положить равными нулю коэффициенты при y в левой части равенств и при x в правой части равенств.

Построенная выше модель легко может быть модифицирована для описания различных реальных ситуаций. Например, если дороги между пунктами i и j не существует, то мы можем просто положить $a_{ij} = 0$; если дорога является двусторонней с одинаковыми пропускными способностями в обе стороны, то мы полагаем $b_{ik} = a_{ij}$; если мы не хотим связывать пункт j с терминалом T , то мы полагаем верхнюю и нижнюю границу для x_j равными 0.

Будем предполагать, что выбор x_j, y_k связан со штрафными функциями $f_j(x_j), g_k(y_k)$ соответственно. Штрафные функции могут объясняться, например, некоторыми экономическими или экологическими требованиями (стоимость, загрязнение воздуха). Таким образом, будет достаточно естественно предполагать, что f_j, g_k при $j \in J, k \in K$ являются непрерывными строго возрастающими функциями. Задача минимизации максимальной штрафной функции при ограничениях, заданных в виде (20) и посредством некоторых нижних и верхних границ на x, y , может быть легко преобразована в задачу оптимизации вида (17)–(19).

Пример 7.2. Рассмотрим следующую задачу оптимизации: требуется минимизировать функцию

$$f(x) \equiv \max(f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3))$$

при ограничениях

$$\max(4 \wedge x_1, 5 \wedge x_2, 0 \wedge x_3) = \max(0 \wedge x_1, 4 \wedge x_2, 5 \wedge x_3),$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x},$$

где $\underline{x} = (5, 3, 4)$, $\bar{x} = (6, 6, 6)$ и функции $f_j(x_j)$, $j \in J \equiv \{1, 2, 3\}$, определяются по формулам

$$f_1(x_1) = \max\left(-x_1 + \frac{21}{4}, x_1 - \frac{21}{4}\right),$$

$$f_2(x_2) = \max(-x_2 + 4, x_2 - 4),$$

$$f_3(x_3) = (x_3 - 5)^2.$$

Следовательно, $x^* = (21/4, 4, 5)$.

Действуем согласно алгоритму, описанному в разделе 6.

- 1 $\underline{x} = (5, 3, 4)$, $\bar{x} = (6, 6, 6)$, $x^* = (21/4, 4, 5)$, $\underline{f} := 0$, $\bar{f} := 2$, $\varepsilon = 1/2$.
- 2 $\tilde{x} = \bar{x} = (6, 6, 6)$.
- 3 $\underline{x} \leq \tilde{x}$.
- 4 $\bar{f} := f(\tilde{x}) = 2$, $\alpha := 0 + (2 - 0)/2 = 1$, $\underline{x} := \underline{x}(\alpha) = (17/4, 3, 4)$, $\bar{x}(\alpha) = (6, 5, 6)$.
- 5 $\tilde{x}^{(1)} = (6, 5, 5)$.
- 6 $\underline{x} \leq \tilde{x}^{(1)}$, $\tilde{x} := \tilde{x}^{(1)}$.
- 8 $f(\tilde{x}) - \underline{f} = 1 > \varepsilon = 1/2$.
- 4 $\bar{f} := f(\tilde{x}) = 1$, $\alpha = 0 + (1 - 0)/2 = 1/2$, $\underline{x}(\alpha) = (19/4, 7/2, 9/2)$,
 $\underline{x} := \bar{x}(\alpha) = (23/4, 9/2, 11/2)$.
- 5 $\tilde{x}^{(1)} = (23/4, 9/2, 9/2)$.
- 6 $\underline{x} \leq \tilde{x}^{(1)}$, $\tilde{x} := \tilde{x}^{(1)}$.
- 8 $f(\tilde{x}) - \underline{f} = 1/2 - 0 = 1/2 = \varepsilon$.
- 9 $\tilde{x} = (23/4, 9/2, 9/2)$ — ε -оптимальное решение, СТОП.

Пример 7.3. В этом примере мы рассматриваем модификацию указанной выше задачи: теперь штрафные функции возрастают. Эта задача звучит следующим образом: нужно минимизировать функцию

$$f(x) \equiv \max(2x_1, 3x_2, x_3)$$

при ограничениях

$$\max(4 \wedge x_1, 5 \wedge x_2, 0 \wedge x_3) = \max(0 \wedge x_1, 4 \wedge x_2, 5 \wedge x_3),$$

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x},$$

где $\underline{x} = (5, 3, 5)$, $\bar{x} = (6, 6, 6)$. Для модифицированной целевой функции f вычисление даёт другой результат, найденный ниже.

- 1 $\underline{x} = (5, 3, 5), \bar{x} = (6, 6, 6), \underline{f} := 10, \bar{f} := 18, \varepsilon = 1.$
- 2 $\tilde{x} = \bar{x} = (6, 6, 6).$
- 3 $\underline{x} \leq \tilde{x}.$
- 4 $\bar{f} := f(\tilde{x}) = 18, f^{(1)} := 10 + (18 - 10)/2 = 14, \bar{x}^{(1)} := (6, 14/3, 6).$
- 5 $\tilde{x} = (6, 14/3, 14/3).$
- 6 $\underline{x} \not\leq \tilde{x}.$
- 7 $\underline{f} := f(\bar{x}^{(1)}) = 14, \tilde{x} := \bar{y},$ go to 4.
- 4 $\bar{f} := f(\tilde{x}) = 18, f^{(1)} := 14 + (18 - 14)/2 = 16, \bar{x}^{(1)} := (6, 16/3, 6).$
- 5 $\tilde{x} = (6, 16/3, 5).$
- 6 $\underline{x} \leq \tilde{x}^{(1)}, \tilde{x} := \tilde{x}^{(1)} = (6, 16/3, 5).$
- 8 $f(\tilde{x}) - \underline{f} = 16 - 14 = 2 > \varepsilon.$
- 4 $\bar{f} := f(\tilde{x}) = 16, f^{(1)} := 14 + (16 - 14)/2 = 15, \bar{x}^{(1)} := (6, 5, 5).$
- 5 $\tilde{x} = (6, 5, 5).$
- 6 $\underline{x} \leq \tilde{x}.$
- 8 $f(\tilde{x}) - \underline{f} = 15 - 14 = 1 = \varepsilon.$
- 9 $\tilde{x}$ является ε -оптимальным решением, СТОП.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Чешского научного фонда, проект № 402/09/0405.

Литература

- [1] Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J. P. Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems. — Chichester: Wiley, 1992.
- [2] Butkovič P. Max-Linear Systems: Theory and Algorithms. — London: Springer, 2010. — (Springer Monographs Math.).
- [3] Butkovič P., Hegedüs G. An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra // Ekonomicko-matematický obzor. — 1984. — Vol. 20. — P. 203—215.
- [4] Butkovič P., Zimmermann K. A strongly polynomial algorithm for solving two-sided linear systems in max-algebra // Discrete Appl. Math. — 2006. — Vol. 154. — P. 437—446.
- [5] Cechlárová K. Efficient computation of the greatest eigenvector in fuzzy algebra // Tatra Mt. Math. Publ. — 1997. — Vol. 12. — P. 73—79.
- [6] Cuninghame-Green R. A. Minimax Algebra. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Economics Math. Systems; Vol. 166).
- [7] Cuninghame-Green R. A., Zimmermann K. Equation with residual functions // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2001. — Vol. 42. — P. 729—740.

- [8] Gavalec M., Zimmermann K. Solving systems of two-sided $(\max, \min)$ -linear equations // *Kybernetika*. — 2010. — Vol. 46. — P. 405–414.
- [9] Gavalec M., Zimmermann K. Optimization problems with two-sided systems of linear equations over distributive lattices // *Proc. Conf. Math. Methods in Economics*. — 2010. — P. 172–176.
- [10] Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics. Vol. 1 / Litvinov G. L., Maslov V. P., Sergeev S. N., eds. — Moscow: Nezavis. Univ., 2007.
- [11] Maslov V. P., Samborskij S. N. Idempotent Analysis. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Adv. Sov. Math.; Vol. 13).
- [12] Sanchez E. Resolution of eigen fuzzy sets equations // *Fuzzy Sets Systems*. — 1978. — Vol. 1, no. 1. — P. 69–74.
- [13] Sanchez E. Inverses of fuzzy relations. Applications to possibility distributions and medical diagnosis // *Fuzzy Sets Systems*. — 1979. — Vol. 2. — P. 77–86.
- [14] Vorobjov N. N. Extremal algebra of positive matrices // *Datenverarbeitung und Kybernetik*. — 1967. — Bd. 3. — S. 39–71.
- [15] Zimmermann K. Disjunctive optimization problems, max-separable problems and extremal algebras // *Theor. Comput. Sci.* — 2003. — Vol. 293. — P. 45–54.

