Аддитивные отображения матриц, монотонные относительно порядков, заданных групповой обратной матрицей*

М. А. ЕФИМОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: efimov.mikhail@gmail.com

УДК 512.643

Ключевые слова: аддитивные отображения, групповая обратная матрица, частичные порядки.

Аннотация

Получена характеризация аддитивных отображений пространства матриц над произвольным полем из трёх или более элементов, монотонных относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Построены примеры неаддитивных отображений, монотонных относительно указанных частичных порядков.

Abstract

M. A. Efimov, Additive matrix maps that are monotone with respect to the orders induced by group inverse, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 6, pp. 23—40.

We characterize additive maps on the matrix algebra over an arbitrary field with three or more elements that are monotone with respect to the $\overset{\sharp}{\leqslant}$- and $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$-orders and build some examples of nonadditive monotone maps.

1. Введение

Пусть $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ обозначает пространство квадратных матриц порядка n с коэффициентами из произвольного поля $\mathbb{F}$, $\leqslant$ — отношение частичного порядка на $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

Определение 1.1. Отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *монотонно* относительно порядка $\leqslant$, если для любых матриц A и B из того, что $A \leqslant B$, следует, что $T(A) \leqslant T(B)$.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2502.2012.1.

Отметим, что характеризация отображений, монотонных относительно данного порядка $\leqslant$, часто оказывается полезной при изучении свойств этого частичного порядка. При этом случай линейных и аддитивных монотонных отображений наиболее интересен. Исследования в этой области начаты де Пиллисом в работе [20] и активно ведутся сейчас (см. [4, 9, 10, 19]). Многие вопросы, касающиеся данного отношения порядка, могут быть сведены к изучению аддитивных монотонных отображений на $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ (см. [5]). С другой стороны, для некоторых порядков при дополнительных предположениях может быть получена полная характеризация монотонных отображений, в том числе неаддитивных (см. [13, 14, 18, 23]).

В данной работе мы рассмотрим отношения частичного порядка, заданные при помощи групповой обратной матрицы.

Определение 1.2. *Групповая обратная матрица* $A^\sharp$ для матрицы A — это матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$AA^\sharp A = A, \quad A^\sharp AA^\sharp = A^\sharp, \quad AA^\sharp = A^\sharp A.$$

Определение 1.3. Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ имеет *индекс* k ($\operatorname{Ind} A = k$), если $\operatorname{rk} A^k = \operatorname{rk} A^{k+1}$ и k есть наименьшее натуральное число с таким свойством.

Известно (см. [7, 15]), что групповая обратная матрица для данной матрицы A существует тогда и только тогда, когда A имеет индекс 1, т. е. $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^2$. Кроме того, если матрица с такими свойствами существует, то она единственна (см. [16, 22]). Более подробно свойства групповой обратной матрицы описаны в [6, 8, 21].

Определение 1.4 [16]. Пусть матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ имеет индекс 1, а матрица $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ произвольная. Будем говорить, что $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, если $AA^\sharp = BA^\sharp = A^\sharp B$.

Следующее разложение произвольной матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ существует и единственно (см. [6, гл. 4.8]).

Определение 1.5. *Нильпотентным разложением* квадратной матрицы $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ называется представление $A = C_A + N_A$, где C_A имеет индекс 1, а N_A нильпотентна, причём $C_A N_A = N_A C_A = 0$.

Определение 1.6 [11, 17]. $A \overline{\leqslant} B$ для произвольных матриц $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk}(B - A) = \operatorname{rk} B - \operatorname{rk} A$.

Определение 1.7 [12]. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда $A \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} B$, если и только если $C_A \overset{\sharp}{\leqslant} C_B$ и $N_A \overline{\leqslant} N_B$.

Все три определённые отношения действительно являются отношениями частичного порядка, т. е. рефлексивны, антисимметричны и транзитивны (доказательства можно найти в [12]). Согласно общепринятым обозначениям $A \overset{\sharp}{<} B$ ($A \overline{<} B$, $A \overset{\mathrm{cn}}{<} B$), если $A \neq B$ и $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ ($A \overline{\leqslant} B$, $A \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} B$).

В [1] И. И. Богданов и А. Э. Гутерман охарактеризовали линейные биективные отображения над произвольным полем, монотонные относительно порядков

$\overset{\sharp}{<}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$. В [2] был предложен метод, позволивший снять ограничение биективности из [1].

В данной работе исследуются нелинейные отображения, монотонные относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. В частности, получена характеризация аддитивных монотонных отображений над полем из трёх или более элементов и построены примеры неаддитивных монотонных отображений. Кроме того, в работе доказано, что эндоморфизмы кольца матриц монотонны относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$, и, как следствие, получена характеризация всех эндоморфизмов кольца $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Подобная характеризация для алгебр известна как теорема Нётер—Сколема (см. [3]).

Лемма 1.8. *Следующие отображения пространства матриц аддитивны и монотонны относительно порядков $\overset{\sharp}{<}$, $\overline{<}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{<}$.*

1. $T_\alpha(X) = \alpha X$, *где* $\alpha \in \mathbb{F}$.
2. $T_P(X) = P^{-1}XP$, *где* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$.
3. $T_\varphi(X) = X^\varphi$, *где* $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — *эндоморфизм поля* $\mathbb{F}$.
4. $T_t(X) = X^{\mathrm{t}}$.

В разделе 2 настоящей работы мы изучим некоторые свойства монотонных аддитивных отображений. После этого, в разделе 3, мы получим характеризацию аддитивных отображений, монотонных относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Прямые следствия основной теоремы описаны в разделе 4. Кроме того, в этом разделе мы охарактеризуем эндоморфизмы кольца $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. В заключение, в разделе 5, даны некоторые примеры.

2. Свойства монотонных отображений

Нам потребуются следующие определения.

Определение 2.1. Будем говорить, что матрицы $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *ортогональны*, если $AB = BA = 0$.

Определение 2.2. Набор из n матриц $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ будем называть *B-набором*, если выполнены следующие условия:

1) все A_i имеют ранг и индекс 1;
2) A_i и A_j ортогональны при любых различных i и j.

В дальнейшем через E_{ij} будем обозначать матрицу с 1 в позиции (i, j) и 0 в остальных, через $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ обозначим полную линейную группу.

Лемма 2.3. *Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — произвольная квадратная матрица. Матрицы A и E_{ii} ортогональны, если и только если $a_{ij} = a_{ji} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Имеем
$$E_{ii}A = \sum_j a_{ij}E_{ij} = 0,$$
откуда получаем, что $a_{ij} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично получаем, что $a_{ji} = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. □

Лемма 2.4. *Пусть матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ образуют B-набор. Тогда существуют такие ненулевые $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ и такая матрица $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, что $P^{-1}X_iP = \alpha_iE_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Докажем утверждение по индукции. Если $n = 1$, то $X_1 = \alpha_1E_{11}$, причём $\alpha_1 \neq 0$, так как матрица X_1 имеет ранг 1. Пусть $n > 1$. По условию матрица X_1 имеет индекс и ранг 1, поэтому существует такая матрица $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, что $X_1 = \alpha_1P_1^{-1}E_{11}P_1$ для некоторого $\alpha_1 \neq 0$. Но тогда матрицы $P_1X_1P_1^{-1} = \alpha_1E_{11}$, $P_1X_2P_1^{-1}, \ldots, P_1X_nP_1^{-1}$ также образуют B-набор.

Без ограничения общности можем считать, что $X_1 = \alpha_1E_{11}$. Будем обозначать через M_{ij} элемент матрицы M, стоящий на позиции (i, j). Применяя лемму 2.3, получим, что $(X_k)_{1j} = (X_k)_{j1} = 0$ при всех значениях индексов $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ с условием $k > 1$, т. е. X_k — блочно-диагональная матрица вида
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X'_k \end{pmatrix}.$$
Отметим, что ранг X'_k совпадает с рангом X_k и равен 1, $(X'_k)^2 \neq 0$, т. е. индекс X'_k также равен 1. Тогда из правил умножения матриц следует, что матрицы $X'_2, X'_3, \ldots, X'_n \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{F})$ образуют B-набор. По предположению индукции найдётся такая обратимая матрица $P' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{F})$, что $(P')^{-1}X'_{i+1}P' = \beta_iE_{ii}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\beta_i \neq 0$. Обозначим $\alpha_2 = \beta_1,\ \alpha_3 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_{n-1}$,
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}.$$
Тогда имеют место соотношения $P^{-1}X_1P = \alpha_1E_{11}$ и $P^{-1}X_iP = \alpha_iE_{ii}$ при всех $i > 1$. Утверждение доказано. □

Нам потребуются определение и лемма из работы [1].

Определение 2.5 [1, определение 3.2]. Будем называть последовательность матриц $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big)^n$ *выделенной*, если существуют такие ненулевые элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ и матрица $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, что $A_i = P(\alpha_1E_{11} + \alpha_2E_{22} + \ldots + \alpha_iE_{ii})P^{-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2.6 [1, лемма 3.4]. *Для последовательности*
$$(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \big(\mathrm{M}_n(\mathbb{F})\big)^n$$
равносильны следующие утверждения:

1) *последовательность* $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *является выделенной*;

2) $0 \overset{\sharp}{<} A_1 \overset{\sharp}{<} A_2 \overset{\sharp}{<} \ldots \overset{\sharp}{<} A_n$;
3) $0 \overset{\mathrm{cn}}{<} A_1 \overset{\mathrm{cn}}{<} A_2 \overset{\mathrm{cn}}{<} \ldots \overset{\mathrm{cn}}{<} A_n$.

Вообще говоря, непосредственная проверка условия монотонности для данного отображения — трудная техническая задача. Поэтому следующее свойство аддитивных монотонных отображений является важнейшим для их характеризации.

Теорема 2.7. *Пусть матрицы $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ образуют B-набор, аддитивное отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Кроме того, $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда матрицы $T(X_1), T(X_2), \ldots, T(X_n)$ образуют B-набор.*

Доказательство. Согласно лемме 2.4 найдётся такая матрица $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, что $P^{-1} X_i P = \alpha_i E_{ii}$ для некоторых ненулевых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Рассмотрим выделенную последовательность $(X_1, X_1{+}X_2, \ldots, X_1{+}X_2{+}\ldots{+}X_n)$ и применим лемму 2.6. Получим

$$0 \overset{\sharp}{\leqslant} X_1 \overset{\sharp}{\leqslant} X_1 + X_2 \overset{\sharp}{\leqslant} \ldots \overset{\sharp}{\leqslant} X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

или

$$0 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} X_1 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} X_1 + X_2 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} \ldots \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

По условию теоремы T — аддитивное отображение, монотонное относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Обозначая $Y_i = T(X_i)$, с учётом равенства $T(0) = 0$ получим

$$0 \overset{\sharp}{\leqslant} Y_1 \overset{\sharp}{\leqslant} Y_1 + Y_2 \overset{\sharp}{\leqslant} \ldots \overset{\sharp}{\leqslant} Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

или

$$0 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y_1 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y_1 + Y_2 \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} \ldots \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n.$$

Так как $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, получим, что $Y_i = T(X_i) \neq 0$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому все неравенства строгие. Повторно применяя лемму 2.6, можем утверждать, что последовательность матриц

$$(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n)$$

выделенная. Но тогда существует такая $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, что

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_i = Q(\beta_1 E_{11} + \beta_2 E_{22} + \ldots + \beta_i E_{ii}) Q^{-1}$$

для некоторых ненулевых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$, откуда следует, что $Y_i = \beta_i Q E_{ii} Q^{-1}$. Таким образом, матрица Y_i имеет ранг и индекс 1 для каждого i. Кроме того, $E_{ii} E_{jj} = E_{jj} E_{ii} = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, Y_i и Y_j ортогональны при $i \neq j$. Таким образом, матрицы $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ образуют B-набор. $\square$

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Определение 2.8. Матрицу $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ будем называть матрицей типа (i,j), где $i,j = 1,2,\ldots,n$, если существуют такие $a_{ii}, a_{ij}, a_{ji}, a_{jj} \in \mathbb{F}$, что

$$A = a_{ii}E_{ii} + a_{ij}E_{ij} + a_{ji}E_{ji} + a_{jj}E_{jj}.$$

Сумма и произведение матриц типа (i,j) есть матрица типа (i,j).

Замечание 2.9. В теореме 2.7 рассматриваются B-наборы, никакая матрица которых не лежит в ядре отображения T. В связи с этим возникает вопрос о существовании таких наборов. Ответ на него даёт следующая лемма: если B-наборов с этим свойством нет, то отображение T тождественно нулевое (достаточно положить $V = \operatorname{Ker} T$).

Лемма 2.10. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 1$ — целое число, V — некоторая аддитивная подгруппа $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, такая что в любом B-наборе найдётся матрица, лежащая в V. Тогда $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно верно. Пусть $n > 1$. Предположим, что найдётся матрица A_1 ранга и индекса 1, такая что $A_1 \notin V$. Рассмотрим некоторый B-набор $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Тогда $A_j \in V$ для некоторого $j > 1$. По определению матрицы A_1 и A_j ортогональны и $\operatorname{rk} A_j = \operatorname{Ind} A_j = 1$. Следовательно, существуют такие $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и $\lambda_1 \neq 0$, что $A_j = \lambda_1 P_1^{-1} E_{11} P_1$. Обозначим $V_1 = P_1 V P_1^{-1}$ и $B_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}$. Получим, что $\lambda_1 E_{11} \in V_1$, $B_1 \notin V_1$. Более того, матрицы $\lambda_1 E_{11}$ и B_1 ортогональны.

1. Предположим, что в каждом B-наборе матриц, содержащем $\lambda_1 E_{11}$, найдётся отличная от $\lambda_1 E_{11}$ матрица, принадлежащая V_1. Применим утверждение индукции к матрицам с нулевыми первой строкой и столбцом. Получим, что любая матрица такого вида лежит в V_1, в том числе и B_1 в силу леммы 2.3. Противоречие.

2. Найдётся B-набор матриц $\{X_1 = \lambda_1 E_{11}, X_2, X_3, \ldots, X_n\}$, такой что $X_i \notin V_1$ для всех $i = 2,3,\ldots,n$. Согласно лемме 2.4 найдутся матрица $P_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и ненулевые $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, такие что $X_i = \lambda_i P_2^{-1} E_{ii} P_2$ для всех $i = 1,2,3,\ldots,n$. Обозначим $V_2 = P_2^{-1} V_1 P_2$. Нетрудно убедиться, что $\lambda_i E_{ii} \in V_2$, если и только если $i = 1$.

1) Фиксируем некоторое ненулевое $\lambda \in \mathbb{F}$. Рассмотрим B-набор матриц $\lambda E_{11}, \lambda_2 E_{22}, \lambda_3 E_{33}, \ldots, \lambda_n E_{nn}$. По предположениям и с учётом условия теоремы $\lambda E_{11} \in V_2$. Поэтому можем утверждать, что $\lambda E_{11} \in V_2$ при любом $\lambda \in \mathbb{F}$, так как при $\lambda = 0$ это также верно.

Далее будем рассматривать B-наборы вида $A, B, \lambda_3 E_{33}, \ldots, \lambda_n E_{nn}$, где матрицы A и B имеют ранг и индекс 1, ортогональны и являются матрицами типа $(1,2)$. Из условия леммы следует, что либо $A \in V_2$, либо $B \in V_2$.

2) Покажем, что найдётся такое ненулевое $y \in \mathbb{F}$, что $yE_{12} \in V_2$. Пусть $A = E_{11} + xE_{12}$, $B = -xE_{12} + E_{22}$, где $x \in \mathbb{F}$ и $x \neq 0$. Если при некотором значении $x = x_0$ матрица $A = E_{11} + x_0 E_{12}$ лежит в V_2, то, используя аддитивность V_2

и условие $E_{11} \in V_2$, получим, что $x_0 E_{12} \in V_2$. Тогда положим $y = x_0 \neq 0$ и имеем требуемое.

Если же такого значения x_0 нет, то в силу условия $|\mathbb{F}| \geqslant 3$ найдутся такие ненулевые $x_1 \neq x_2$, что $-x_1 E_{12} + E_{22} \in V_2$ и $-x_2 E_{12} + E_{22} \in V_2$. Используя аддитивность V_2, получим, что $(x_2 - x_1)E_{12} \in V_2$, и положим $y = x_2 - x_1 \neq 0$.

Можем утверждать, что $-yE_{12} + \lambda_2 E_{22} \notin V_2$, так как иначе $\lambda_2 E_{22} \in V_2$, что неверно. Рассматривая $A = \mu(\lambda_2 E_{11} + yE_{12})$, $B = -yE_{12} + \lambda_2 E_{22}$ при любом ненулевом $\mu \in \mathbb{F}$, получим, что $\mu\lambda_2 E_{11} + \mu y E_{12} \in V_2$ при любом ненулевом $\mu \in \mathbb{F}$. Кроме того, при $\mu = 0$ условие $\mu\lambda_2 E_{11} + \mu y E_{12} \in V_2$ также выполнено. Но, как отмечалось выше, $\nu E_{11} \in V_2$ при любом $\nu \in \mathbb{F}$, откуда следует, что $\mu y E_{12} \in V_2$. Таким образом, $\alpha E_{12} \in V_2$ при любом $\alpha \in \mathbb{F}$ ($\mu = \alpha/y$).

3) Полагая $A = E_{11} + xE_{21}$, $B = -xE_{21} + E_{22}$, аналогично пункту 2) получаем, что $\beta E_{21} \in V_2$ при любом $\beta \in \mathbb{F}$.

4) Покажем, что найдутся такие $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{F}$, что $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ и $\alpha_0\beta_0 \neq -1$. Действительно, если бы для всех $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ было выполнено $\alpha\beta = -1$, то при ненулевых $\alpha_1 \neq \alpha_2$ получим, что $\alpha_1\beta = -1 = \alpha_2\beta$, откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$.

Положим

$$A = \alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22}, \quad B = \alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}E_{11} - \beta_0^{-1}E_{12} - \alpha_0^{-1}E_{21} + E_{22}.$$

Проверим, что эти матрицы ортогональны:

$$\begin{aligned}
&AB = \\
&\quad = (\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22})(\alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}E_{11} - \beta_0^{-1}E_{12} - \alpha_0^{-1}E_{21} + E_{22}) = \\
&\quad = (E_{11} - \alpha_0 E_{12}) + (-E_{11} + \alpha_0 E_{12}) + (\alpha_0^{-1}E_{21} - E_{22}) + (-\alpha_0^{-1}E_{21} + E_{22}) = 0, \\
&BA = \\
&\quad = (\alpha_0^{-1}\beta_0^{-1}E_{11} - \beta_0^{-1}E_{12} - \alpha_0^{-1}E_{21} + E_{22})(\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22}) = \\
&\quad = (E_{11} + \beta_0^{-1}E_{12}) + (-E_{11} - \beta_0^{-1}E_{12}) + (-\beta_0 E_{21} - E_{22}) + (\beta_0 E_{21} + E_{22}) = 0.
\end{aligned}$$

По условиям $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\alpha_0\beta_0 \neq -1$, имеем, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B = 1$. Покажем, что $\operatorname{Ind} A = 1$. Рассмотрим матрицу $E_{11}A^2E_{11}$:

$$\begin{aligned}
E_{11}A^2E_{11} &= E_{11}(\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22}) \times \\
&\times (\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12} + \beta_0 E_{21} + E_{22})E_{11} = \\
&= (\alpha_0\beta_0 E_{11} + \alpha_0 E_{12})(\alpha_0\beta_0 E_{11} + \beta_0 E_{21}) = \alpha_0\beta_0(\alpha_0\beta_0 + 1)E_{11} \neq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом $A^2 \neq 0$, откуда получаем, что $0 < \operatorname{rk} A^2 \leqslant \operatorname{rk} A = 1$. Следовательно, $\operatorname{rk} A^2 = 1 = \operatorname{rk} A$, $\operatorname{Ind} A = 1$. Аналогично $\operatorname{Ind} B = 1$. Можем утверждать, что либо $\lambda_2 A \in V_2$, либо $\lambda_2 B \in V_2$. С учётом пунктов 1), 2) и 3) имеем, что $\lambda_2 E_{22} \in V_2$. Противоречие.

Таким образом, все матрицы ранга и индекса 1 лежат в V. Покажем, что произвольная матрица лежит в V. Для этого представим её в виде суммы матриц ранга 1. Если среди слагаемых встретится матрица S индекса, отличного от 1, то

$S = Q^{-1}E_{12}Q$ для некоторой матрицы $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$. Но $E_{12} = (E_{11}+E_{12}) - E_{11}$, причём E_{11} и $E_{11}+E_{12}$ имеют ранг и индекс 1. Поэтому

$$S = Q^{-1}(E_{11}+E_{12})Q - Q^{-1}E_{11}Q = A_1 - A_2 \in V,$$

так как сопряжение переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1. Тем самым показано, что все матрицы ранга 1, а значит и их сумма, лежат в V. Это наблюдение завершает доказательство. □

Лемма 2.11. *Пусть аддитивное отображение* $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно порядка* $\overset{\sharp}{\leqslant}$ $(\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant})$, $n \geqslant 2$ — *целое число. Известно, что существуют ненулевые* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ *с условием* $T(\alpha_k E_{kk}) = \beta_k E_{kk}$ *для любого* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Кроме того, матрицы* X *и* Y *имеют ранг и индекс 1, ортогональны и являются матрицами типа* (i,j). *Тогда* $T(X)$ *и* $T(Y)$ *также ортогональны. Если они обе ненулевые, то имеют тип* (i,j), $\operatorname{rk} T(X) = \operatorname{rk} T(Y) = 1$, $\operatorname{rk}\bigl(T(X)+T(Y)\bigr) = 2$.

Доказательство. Если среди матриц $T(X)$ и $T(Y)$ есть нулевая, то

$$T(X)T(Y) = 0, \quad T(Y)T(X) = 0.$$

Пусть $T(X) \neq 0$, $T(Y) \neq 0$. Обозначим $\Gamma_0 = \{\alpha_1 E_{11}, \ldots, \alpha_n E_{nn}\}$. Заменим $\alpha_i E_{ii}$ на X и $\alpha_j E_{jj}$ на Y в наборе Γ_0, получим набор Γ. Нетрудно убедиться, что Γ является B-набором. Так как T монотонно относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$, то $T(\Gamma)$ также является B-набором. В частности, матрицы $T(X)$ и $T(Y)$ ортогональны.

Применяя лемму 2.3 к матрицам $T(X)$ и $T(\alpha_k E_{kk}) = \beta_k E_{kk}$ при всех $k \neq i$, $k \neq j$, получаем, что $T(X)$ имеет тип (i,j). Аналогично $T(Y)$ имеет тип (i,j).

Кроме того, найдутся такая обратимая матрица $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и такие ненулевые $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}$, что $T(X) = \lambda_1 P^{-1}E_{11}P$, $T(Y) = \lambda_2 P^{-1}E_{22}P$. Следовательно, $\operatorname{rk} T(X) = \operatorname{rk} T(Y) = 1$ и $\operatorname{rk}\bigl(T(X)+T(Y)\bigr) = 2$. □

Замечание 2.12. Если выполнены условия предыдущей леммы и известно, что ранг матрицы $T(X)$ больше 1, то матрица $T(Y)$ нулевая.

Лемма 2.13. *Пусть* $\mathbb{F}$ — *произвольное поле с числом элементов* $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — *целое число, аддитивное отображение* $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ *монотонно относительно порядка* $\overset{\sharp}{\leqslant}$ $(\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant})$. *Пусть, кроме того, существуют такие ненулевые скаляры* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, *что* $T(\alpha_k E_{kk}) = \beta_k E_{kk}$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда существуют такие аддитивные инъективные функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, *что выполнено соотношение* $T(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$ *для всех* $t \in \mathbb{F}$ *и всех* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Покажем, что для любого $t \in \mathbb{F}$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ найдётся такое $s \in \mathbb{F}$, что $T(tE_{ii}) = sE_{ii}$. В силу равенства $T(0) = 0$ при $t = 0$ соответствующее s равно 0. Пусть $t \neq 0$. Рассмотрим B-набор $\Gamma = \{\alpha_1 E_{11}, \ldots, \alpha_n E_{nn}\}$. Заменяя $\alpha_i E_{ii}$ на tE_{ii} в Γ, получим B-набор Γ_t. По теореме 2.7 $T(\Gamma_t)$ также является B-набором. Так как $T(\alpha_j E_{jj}) = \beta_j E_{jj}$ при всех $j = 1, 2, \ldots, n$, то $T(tE_{ii}) = sE_{ii}$ для некоторого $s \in \mathbb{F}$.

С учётом выражения для $T(tE_{ii})$ при $t \in \mathbb{F}$ определим n функций $f_i \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ равенствами $T(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$. В силу аддитивности отображения T для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ выполнено $T\bigl((t_1 + t_2)E_{ii}\bigr) = T(t_1 E_{ii}) + T(t_2 E_{ii})$, откуда следует, что $f_i(t_1 + t_2) = f_i(t_1) + f_i(t_2)$. Поэтому f_i — аддитивные функции при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Покажем, что $f_i(t) \neq 0$ при $t \neq 0$ и $i = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что найдётся такое ненулевое $\lambda \in \mathbb{F}$, что $f_i(\lambda) = 0$. Фиксируем некоторые $t \in \mathbb{F}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Рассмотрим матрицы $\lambda E_{ii} + tE_{ij}$ и $-tE_{ij} + \lambda E_{jj}$. Как показано выше, эти матрицы имеют ранг и индекс 1, они ортогональны и являются матрицами типа (i, j). Итак, можем применить лемму 2.11.

Отметим, что

$$T(\lambda E_{ii} + \lambda E_{jj}) = f_i(\lambda)E_{ii} + f_j(\lambda)E_{jj} = f_j(\lambda)E_{jj},$$

откуда следует, что $\operatorname{rk} T(\lambda E_{ii} + \lambda E_{jj}) = \operatorname{rk}(f_j(\lambda)E_{jj}) \leqslant 1$. С другой стороны, если $T(\lambda E_{ii} + tE_{ij}) \neq 0$ и $T(-tE_{ij} + \lambda E_{jj}) \neq 0$, то из леммы 2.11 следует, что

$$\operatorname{rk} T(\lambda E_{ii} + \lambda E_{jj}) = \operatorname{rk}\bigl(T(\lambda E_{ii} + tE_{ij}) + T(-tE_{ij} + \lambda E_{jj})\bigr) = 2.$$

Тем самым $T(\lambda E_{ii} + tE_{ij}) = 0$ или $T(-tE_{ij} + \lambda E_{jj}) = 0$. Поэтому либо $T(tE_{ij}) = -f_i(\lambda)E_{ii} = 0$, либо $T(tE_{ij}) = f_j(\lambda)E_{jj}$. Таким образом, определена функция $g_{ij} \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, такая что выполнено $T(tE_{ij}) = g_{ij}(t)E_{jj}$. Аналогично существует функция $g_{ji} \colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, удовлетворяющая соотношению $T(tE_{ji}) = g_{ji}(t)E_{jj}$. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть матрицы $\lambda E_{ii} + tE_{ji}$ и $-tE_{ji} + \lambda E_{jj}$.

Так как $|F| \geqslant 3$, то найдутся такие ненулевые $\mu, \nu \in \mathbb{F}$, что $\mu\nu \neq -1$.

Нетрудно заметить, что матрицы $\alpha_i(E_{ii} + \nu^{-1}E_{ij} + \mu^{-1}E_{ji} + \mu^{-1}\nu^{-1}E_{jj})$ и $\alpha_i(E_{ii} - \mu E_{ij} - \nu E_{ji} + \mu\nu E_{jj})$ ортогональны, имеют ранг и индекс 1 и тип (i, j). В самом деле, мы проверили аналогичное утверждение при доказательстве леммы 2.10. По лемме 2.11 образы этих матриц при отображении T также ортогональны. Следовательно,

$$\begin{gathered} T\bigl(\alpha_i(E_{ii} + \nu^{-1}E_{ij} + \mu^{-1}E_{ji} + \mu^{-1}\nu^{-1}E_{jj})\bigr) \times \\ \times T\bigl(\alpha_i(E_{ii} - \mu E_{ij} - \nu E_{ji} + \mu\nu E_{jj})\bigr) = 0, \\ \bigl(f_i(\alpha_i)E_{ii} + \bigl(g_{ij}(\alpha_i\nu^{-1}) + g_{ji}(\alpha_i\mu^{-1}) + f_j(\alpha_i\mu^{-1}\nu^{-1})\bigr)E_{jj}\bigr) \times \\ \times \bigl(f_i(\alpha_i)E_{ii} + \bigl(g_{ij}(-\alpha_i\mu) + g_{ji}(-\alpha_i\nu) + f_j(\alpha_i\mu\nu)\bigr)E_{jj}\bigr) = 0. \end{gathered}$$

Отметим, что коэффициент при E_{ii} равен $f_i^2(\alpha_i) = \beta_i^2 \neq 0$. Полученное противоречие доказывает, что $f_i(t) \neq 0$ при $t \neq 0$. По аддитивности f_i имеем инъективность f_i при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Лемма 2.14. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, аддитивное отображение $T \colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ $(\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant})$. Пусть, кроме того, существуют инъективные* *аддитивные функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, *удовлетворяющие условию* $T(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$ *для всех* $t \in \mathbb{F}$ *и* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда для любых значений индексов* $i, j = 1, 2, \ldots, n$ *и любых* $p, q \in \mathbb{F}$ *существуют такие* $r, s \in \mathbb{F}$, *что* $T(pE_{ij}+qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$, *причём число нулевых элементов в паре* (p, q) *совпадает с числом нулевых элементов в паре* (r, s).

Доказательство. Фиксируем $p \in \mathbb{F}$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Если $i = j$, то можем положить $r = f_i(p)$ и $s = f_i(q)$.

Пусть $i \neq j$, $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Как отмечалось выше, матрицы $tE_{ii} + pE_{ij}$ и $-pE_{ij} + tE_{jj}$ имеют ранг и индекс 1, ортогональны и являются матрицами типа (i, j). Следовательно, к ним применима лемма 2.11.

Предположим, что $T(t_1E_{ii}+pE_{ij}) = 0$ при некотором $t_1 \neq 0$. Тогда $T(pE_{ij}) = - f_i(t_1)E_{ii}$. Так как f_i и f_j инъективны, то

$$\operatorname{rk} T(-pE_{ij} + tE_{jj}) = \operatorname{rk}(f_i(t_1)E_{ii} + f_j(t)E_{jj}) = 2$$

при всех ненулевых $t \in \mathbb{F}$. По замечанию 2.12 $T(tE_{ii} + pE_{ij}) = 0$ при $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Отметим также, что $|\mathbb{F}| \geqslant 3$ и найдётся ненулевое $t_2 \in \mathbb{F}$, $t_2 \neq t_1$. Но тогда

$$0 = T(t_1E_{ii} + pE_{ij}) - T(t_2E_{ii} + pE_{ij}) = T\big((t_1 - t_2)E_{ii}\big) = f_i(t_1 - t_2)E_{ii} \neq 0.$$

Противоречие.

Итак, $T(tE_{ii} + pE_{ij}) \neq 0$ при $t \neq 0$. Аналогично $T(-pE_{ij} + tE_{jj}) \neq 0$ при $t \neq 0$. По лемме 2.11 эти матрицы имеют ранг 1 и тип (i, j). Более того, матрица $T(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$ имеет тип (i, j), откуда следует, что $T(pE_{ij})$ также имеет тип (i, j). Обозначим $S = T(pE_{ij})$.

Пусть $S = aE_{ii}+bE_{ij}+cE_{ji}+dE_{jj}$. По доказанному выше матрицы $f_i(t)E_{ii}+S$ и $f_j(t)E_{jj} - S$ имеют ранг 1. Тем самым (2×2)-минор, образованный пересечением строк i и j со столбцами i и j, нулевой. Следовательно,

$$(f_i(t) + a)d - bc = 0, \quad (-a)(f_j(t) - d) - (-b)(-c) = 0$$

при всех $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Пусть $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ — различные ненулевые скаляры. Имеем

$$0 = \big((f_i(t_1) + a)d - bc\big) - \big((f_i(t_2) + a)d - bc\big) = f_i(t_1 - t_2)d.$$

Но $f_i(t_1 - t_2) \neq 0$, откуда следует, что $d = 0$. Кроме того, из второго равенства получим, что $a = 0$. Следовательно, $bc = 0$. Другими словами, мы показали, что при всех $p \in \mathbb{F}$ найдутся такие $b, c \in \mathbb{F}$, что $bc = 0$ и $T(pE_{ij}) = bE_{ij} + cE_{ji}$. Аналогично при всех $q \in \mathbb{F}$ существуют такие $b', c' \in \mathbb{F}$, что $b'c' = 0$ и $T(qE_{ji}) = b'E_{ij} + c'E_{ji}$. Итак, доказано, что для любых $p, q \in \mathbb{F}$ существуют $r, s \in \mathbb{F}$, удовлетворяющие соотношению $T(pE_{ij} + qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$. Отметим также, что $rs = 0$ при $pq = 0$.

Пусть $pq \neq 0$, $pq \neq -1$. Аналогично доказательству леммы 2.10 проверяем, что матрицы

$$A_0 = E_{ii} + pE_{ij} + qE_{ji} + pqE_{jj}, \quad A_1 = -pqE_{ii} + pE_{ij} + qE_{ji} - E_{jj}$$

ортогональны, имеют ранг и индекс 1 и тип (i,j). Более того,

$$T(A_0) = f_i(1)E_{ii} + rE_{ij} + sE_{ji} + f_j(pq)E_{jj}$$

для некоторых $r, s \in \mathbb{F}$. Так как f_i и f_j инъективны, то $T(A_0) \neq 0$. Аналогично $T(A_1) \neq 0$. По лемме 2.11 $\operatorname{rk}\bigl(T(A_0)\bigr) = 1$, откуда получаем, что $f_i(1)f_j(pq) - rs = 0$, следовательно, $rs = f_i(1)f_j(pq) \neq 0$.

Если $p = q = 0$, то $r = s = 0$. Покажем, что если $p \neq 0$ и $q = 0$, то в паре (r,s) ровно один нулевой элемент. Пусть это не так, $r = s = 0$ и $T(pE_{ij}) = 0$. Фиксируем некоторое $q_0 \in \mathbb{F}$, $q_0 \neq 0$, $pq_0 \neq -1$. Тогда $T(pE_{ij}) = 0$ и

$$T(q_0E_{ji}) = T(pE_{ij} + q_0E_{ji}) = r_0E_{ij} + s_0E_{ji},$$

т. е. соотношения $r_0s_0 = 0$ и $r_0s_0 \neq 0$ выполнены одновременно. Противоречие. Аналогично доказываем, что при $p = 0$ и $q \neq 0$ в паре (r,s) ровно один нулевой элемент.

Как показано выше, если $pq \neq 0$ и $pq \neq -1$, то $rs \neq 0$. Пусть $pq = -1$. Докажем, что в этом случае $rs \neq 0$. Предположим противное: $pq = -1$, $rs = 0$, $T(pE_{ij} + qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$. Так как $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, то существует ненулевое $p_1 \in \mathbb{F}$, $p \neq p_1$.

Обозначим ненулевые коэффициенты матрицы $T(p_1E_{ij}+qE_{ji}) = r_1E_{ij}+s_1E_{ji}$ через $r_1, s_1 \in \mathbb{F}$. Кроме того, обозначим $p_2 = p - p_1$, $r_2 = r - r_1$, $s_2 = s - s_1$, $T(p_2E_{ij}) = r_2E_{ij} + s_2E_{ji}$. Как показано выше, $r_1s_1 \neq 0$, $r_2s_2 = 0$.

Без ограничения общности будем считать, что $s = 0$. Тогда $s_2 = -s_1 \neq 0$, $r_2 = 0$, $r = r_1 \neq 0$. Таким образом, либо $T(qE_{ji}) = s_1E_{ji}$, либо $T(qE_{ji}) = r_1E_{ij}$. Если $T(qE_{ji}) = s_1E_{ji}$, то $T(p_2E_{ij} + qE_{ji}) = (s_2 + s_1)E_{ji} = 0$, хотя $p_2q \neq -1$. Итак, $T(qE_{ji}) = r_1E_{ij} = T(pE_{ij} + qE_{ji})$ и $T(pE_{ij}) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что число нулевых элементов в паре (p,q) совпадает с числом нулевых элементов в паре (r,s). □

Лемма 2.15. *Пусть инъективное отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ аддитивно и монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ ($\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$). Пусть A — некоторая матрица ранга и индекса 1. Тогда $T(A)$ также имеет ранг и индекс 1.*

Доказательство. Так как $\operatorname{rk} A = \operatorname{Ind} A = 1$, то существуют такая обратимая матрица $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и ненулевое $\lambda \in \mathbb{F}$, что $A = \lambda P^{-1}E_{11}P$. Рассмотрим матрицы $X_1 = A$, $X_2 = P^{-1}E_{22}P, \ldots,$ $X_n = P^{-1}E_{nn}P$. Легко показать, что $\Gamma = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ является B-набором. Более того, T инъективно и $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ По теореме 2.7 $T(\Gamma)$ также является B-набором. Поэтому матрица $T(A) = T(X_1)$ имеет ранг и индекс 1. Но это именно то, что требовалось доказать. □

3. Характеризация монотонных отображений

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, аддитивное отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ мо-*

нотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ ($\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$). *Тогда* T *имеет одну из следующих форм*:

1) $T(X) = \alpha P^{-1} X^{\varphi} P$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$;

2) $T(X) = \alpha P^{-1} (X^{\varphi})^{\mathrm{t}} P$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$

(*здесь* $\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ — *инъективный эндоморфизм поля* $\mathbb{F}$).

Доказательство. Очевидно, $T \equiv 0$, если $\alpha = 0$. Пусть $T \not\equiv 0$.

Для доказательства теоремы будем модифицировать отображение T. Фактически, мы будем комбинировать T с различными сопряжениями, умножениями на скаляры и транспонированиями. Нетрудно понять, что результатом этих операций будет аддитивное отображение T', монотонное относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Доказательство теоремы будет завершено, если $T'(X) = X^{\varphi}$ для всех матриц $X \in M_n(\mathbb{F})$, где φ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$.

Как следует из замечания 2.9, существует B-набор $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, такой что $X_i \notin \operatorname{Ker} T$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим $Y_i = T(X_i)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. По теореме 2.7 набор из n матриц $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ также является B-набором. Из леммы 2.4 следует, что существуют такие ненулевые скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$ и обратимые матрицы $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, что $X_i = \alpha_i P^{-1} E_{ii} P$, $Y_i = \beta_i Q^{-1} E_{ii} Q$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Положим $T_1(X) = QT(P^{-1}XP)Q^{-1}$ при всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. По лемме 1.8 отображение T_1 аддитивно и монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Кроме того, $T_1(\alpha_i E_{ii}) = \beta_i E_{ii}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Применяя лемму 2.13, получаем, что существуют аддитивные инъективные отображения $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, такие что $T_1(tE_{ii}) = f_i(t)E_{ii}$ при всех $t \in \mathbb{F}$ и $i = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда в силу леммы 2.14 для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ с условием $i \neq j$ и любых $p, q \in \mathbb{F}$ существуют такие $r, s \in \mathbb{F}$, что $T(pE_{ij} + qE_{ji}) = rE_{ij} + sE_{ji}$, причём число нулевых элементов в паре (p, q) совпадает с числом нулевых элементов в паре (r, s).

Докажем, что отображение T_1 инъективно. Пусть матрица X такова, что $T_1(X) = 0$, $X = \{x_{ij}\}$. Обозначим $X_{ij} = x_{ij}E_{ij}$ и $Y_{ij} = T_1(X_{ij})$ при всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда $X = \sum\limits_{i,j} X_{ij}$ и $\sum\limits_{i,j} Y_{ij} = 0$.

По доказанному выше $Y_{ii} = T_1(x_{ii}E_{ii}) = f_i(x_{ii})E_{ii} = y_i E_{ii}$ при некоторых $y_i \in \mathbb{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Кроме того, $Y_{ij} + Y_{ji} = y_{ij}E_{ij} + y_{ji}E_{ji}$ при некоторых $y_{ij} \in \mathbb{F}$ и $y_{ji} \in \mathbb{F}$, $i < j$. Таким образом,

$$\sum_i y_i E_{ii} + \sum_{i<j} (y_{ij}E_{ij} + y_{ji}E_{ji}) = 0.$$

Легко убедиться, что коэффициенты y_i и y_{ij} нулевые. Так как функции f_i инъективны и $f_i(x_{ii}) = y_i = 0$, то $x_{ii} = 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Более того, $y_{ij} = y_{ji} = 0$ и $x_{ij} = x_{ji} = 0$ по лемме 2.14 при всех $i < j$. В результате $X = 0$ и отображение T_1 инъективно.

Применяя лемму 2.15, получаем, что T_1 переводит матрицы ранга и индекса 1 в матрицы ранга и индекса 1.

Если $T_1(E_{12}) = c_{12}E_{12}$ для некоторого ненулевого $c_{12} \in \mathbb{F}$, пусть $T_2(X) = T_1(X)$ для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Иначе положим $T_2(X) = \big(T_1(X)\big)^{\mathrm{t}}$ для всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. В обоих случаях имеем, что $T_2(E_{12}) = c_{12}E_{12}$ для некоторого ненулевого $c_{12} \in \mathbb{F}$.

Ясно, что при всех значениях $q \neq 0$ существует такое $s \in \mathbb{F}$, что $T_2(qE_{21}) = sE_{21}$. Тогда $T_2(pE_{12}) = rE_{12}$ для некоторого $r \in \mathbb{F}$ при $p \in \mathbb{F}$.

Покажем, что для каждого $j > 2$ имеем $T_2(pE_{1j}) = rE_{1j}$ для подходящего $r \in \mathbb{F}$ при $p \in \mathbb{F}$. Рассмотрим матрицу $E_{11} + E_{12} + pE_{1j}$. Нетрудно проверить, что эта матрица имеет ранг и индекс 1. Предположим, что $T_2(pE_{1j}) = s_pE_{j1}$ для $s_p \in \mathbb{F}$. Тогда $T_2(E_{11} + E_{12} + pE_{1j}) = E_{11} + c_{12}E_{12} + s_pE_{j1} = S$.

Ввиду неравенства $s_p \neq 0$ имеем, что $\operatorname{rk} S = 2$. С другой стороны, $\operatorname{rk} S = 1$ по лемме 2.15. Это противоречие доказывает, что $T_2(pE_{1j}) = rE_{1j}$ для некоторого $r \in \mathbb{F}$ при любом $p \in \mathbb{F}$ и $j > 1$. Аналогично при всех $q \in \mathbb{F}$ и $i > 1$ существует $s \in \mathbb{F}$, такое что $T_2(qE_{i1}) = sE_{i1}$. Обозначим $T_2(E_{i1}) = c_{i1}E_{i1}$.

Докажем равенство $T_2(pE_{ij}) = rE_{ij}$ для подходящего $r \in \mathbb{F}$ при $p \in \mathbb{F}$ и $i > 1$, $j > 1$, $i \neq j$ В силу условий на i и j матричные единицы E_{ii}, E_{i1} и E_{ij} различны, а потому матрица $E_{ii}+E_{i1}+pE_{ij}$ имеет ранг и индекс 1. Если $T_2(pE_{ij}) = s_pE_{ji}$, то матрица $T_2(E_{ii} + E_{i1} + pE_{ij}) = E_{ii} + c_{i1}E_{i1} + s_pE_{ji}$ имеет ранг 2, что противоречит лемме 2.15. Тем самым доказано, что $T_2(pE_{ij}) = rE_{ij}$ для подходящего $r \in \mathbb{F}$ при всех $p \in \mathbb{F}$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Таким образом, определены n^2 аддитивных инъективных функций $f_{ij}\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ с условием $T_2(tE_{ij}) = f_{ij}(t)E_{ij}$ при всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $t \in \mathbb{F}$.

Фиксируем произвольные различные $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Как отмечалось выше, матрицы $tE_{ii} + E_{ij}$ и $E_{ij} - tE_{jj}$ ортогональны. Кроме того, они имеют ранг и индекс 1 и тип (i, j). По лемме 2.11 матрицы $T_2(tE_{ii} + E_{ij})$ и $T_2(E_{ij} - tE_{jj})$ также ортогональны:

$$0 = T_2(tE_{ii} + E_{ij})T_2(E_{ij} - tE_{jj}) = (f_{ii}(t)E_{ii} + f_{ij}(1)E_{ij}) \times \\ \times (f_{ij}(1)E_{ij} - f_{jj}(t)E_{jj}) = \big(f_{ii}(t)f_{ij}(1) - f_{ij}(1)f_{jj}(t)\big)E_{ij}.$$

Следовательно, $f_{ij}(1)\big(f_{ii}(t)-f_{jj}(t)\big) = 0$. Так как $f_{ij}(1) \neq 0$, то $f_{ii}(t) = f_{jj}(t)$ при всех $t \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ и $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, $f_{ii}(0) = 0 = f_{jj}(0)$. Обозначим $\alpha = f_{11}(1) \neq 0$, $f'_{ij}(t) = \alpha^{-1}f_{ij}(t)$ при всех $t \in \mathbb{F}$, $T_3(X) = \alpha^{-1}T_2(X)$ для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Из леммы 1.8 следует, что отображение T_3 аддитивно и монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Очевидно, $T_3(tE_{ij}) = f'_{ij}(t)E_{ij}$ и $f'_{ii}(1) = 1$.

Через c'_{ij} обозначим $f'_{ij}(1)$ при всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. По доказанному $c'_{ii} = 1$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Рассмотрим матрицу

$$B = \sum_{i=1}^{n} c'_{1i}E_{ii} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}).$$

Обозначим

$$T_4(X) = BT_3(X)B^{-1}, \quad T_4(tE_{ij}) = \tilde{f}_{ij}(t)E_{ij}, \quad \tilde{c}_{ij} = \tilde{f}_{ij}(1).$$

Так как $T_4(E_{ii}) = E_{ii}$ и $T_4(E_{1i}) = E_{1i}$ при любом $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\tilde{c}_{ii} = \tilde{c}_{1i} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Положим $\varphi(t) = \tilde{f}_{11}(t)$. Итак, отображение φ аддитивно и инъективно, $\varphi(1) = 1$. Кроме того, $\tilde{f}_{ii}(t) = \varphi(t)$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $t \in \mathbb{F}$.

Вновь фиксируем произвольные индексы i и j, $i \neq j$. Пусть для начала $x, y \in \mathbb{F}$ таковы, что $xy \neq 0$, $xy \neq -1$. Рассмотрим матрицу $E_{ii} + xE_{ij} + yE_{ji} + xyE_{jj}$. Так как эта матрица имеет ранг и индекс 1, то $\operatorname{rk} T_4(E_{ii} + xE_{ij} + yE_{ji} + xyE_{jj}) = 1$. Тогда $\tilde{f}_{ii}(1)\tilde{f}_{jj}(xy) - \tilde{f}_{ij}(x)\tilde{f}_{ji}(y) = 0$. Более того, $\tilde{f}_{ii}(1) = 1$, $\tilde{f}_{jj}(xy) = \varphi(xy)$. Таким образом,

$$\varphi(xy) = \tilde{f}_{ij}(x)\tilde{f}_{ji}(y). \tag{$*$}$$

Если $x = 0$ или $y = 0$, то соотношение $(*)$ также выполнено. Пусть $xy = -1$. Так как $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, то найдётся ненулевое $x_1 \in \mathbb{F}$, $x_1 \neq x$. Следовательно, $x_1 y \neq -1$ и $\varphi(x_1 y) = \tilde{f}_{ij}(x_1)\tilde{f}_{ji}(y)$. Кроме того, $x_2 = x - x_1 \neq x$, $x_2 y \neq -1$ и $\varphi(x_2 y) = \tilde{f}_{ij}(x_2)\tilde{f}_{ji}(y)$,

$$\begin{aligned}\varphi(xy) = \varphi(x_1 y + x_2 y) = \varphi(x_1 y) + \varphi(x_2 y) = \\ = \tilde{f}_{ij}(x_1)\tilde{f}_{ji}(y) + \tilde{f}_{ij}(x_2)\tilde{f}_{ji}(y) = \tilde{f}_{ij}(x_1 + x_2)\tilde{f}_{ji}(y) = \tilde{f}_{ij}(x)\tilde{f}_{ji}(y).\end{aligned}$$

Тем самым доказано, что соотношение $(*)$ имеет место при всех $x, y \in \mathbb{F}$ и всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ с условием $i \neq j$.

Если $x = y = 1$ и $j = 1$, то $\tilde{c}_{i1}\tilde{c}_{1i} = 1$, откуда следует, что $\tilde{c}_{i1} = 1$ при всех $i > 1$.

Докажем, что $\tilde{c}_{ij} = 1$ при всех $i > 1$, $j > 1$, $i \neq j$. Рассмотрим матрицу $C = (E_{11} + E_{1j}) + (E_{i1} + E_{ij})$. Очевидно, $C^2 \neq 0$, $\operatorname{rk} C = 1$. Итак, $\operatorname{Ind} C = 1$. Но тогда и

$$\operatorname{rk} T_4(C) = (E_{11} + E_{1j}) + (E_{i1} + \tilde{c}_{ij}E_{ij}) = 1.$$

Следовательно, $\tilde{c}_{ij} = 1$ для всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

В заключение докажем, что $\tilde{f}_{ij}(t) = \varphi(t)$ при всех i и j, $i \neq j$. Для этого положим $x = t$, $y = 1$ в $(*)$ и воспользуемся равенством $\tilde{f}_{ji}(1) = 1$. Получим, что $T_4(X) = X^{\varphi}$ для любой матрицы X. Кроме того, так как $\tilde{f}_{ij}(x) = \varphi(x)$ и $\tilde{f}_{ji}(y) = \varphi(y)$, то имеем равенство $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ при всех $x, y \in \mathbb{F}$. Следовательно, φ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$. $\square$

4. Следствия

Укажем некоторые непосредственные следствия теоремы 3.1.

Следствие 4.1. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, а аддитивное отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$ или $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Тогда отображение T либо тождественно нулевое, либо инъективное.*

Следствие 4.2. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — аддитивное отображение. Тогда T монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$, если и только если T монотонно относительно порядка $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$.*

Следующая теорема представляет собой кольцевую версию известной теоремы Нётер—Сколема для алгебр. Мы получим доказательство этой теоремы в качестве следствия теоремы 3.1.

Теорема 4.3. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле с числом элементов $|\mathbb{F}| \geqslant 3$, $n \geqslant 2$ — целое число, $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — эндоморфизм кольца матриц $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. Тогда существуют такая матрица $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и эндоморфизм $\varphi\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ поля $\mathbb{F}$, что $T(X) = P^{-1}X^{\varphi}P$ для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Покажем, что T монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$.

1. Заметим, что $T(X^\sharp) = \bigl(T(X)\bigr)^\sharp$ для произвольной матрицы X индекса 1. В самом деле, нетрудно проверить, что $T(X^\sharp)$ удовлетворяет всем трём тождествам для $\bigl(T(X)\bigr)^\sharp$, и равенство следует из единственности групповой обратной матрицы.

2. Пусть $X \overset{\sharp}{\leqslant} Y$. Тогда $XX^\sharp = YX^\sharp = X^\sharp Y$, откуда получаем, что
$$T(X)\bigl(T(X)\bigr)^\sharp = T(Y)\bigl(T(X)\bigr)^\sharp = \bigl(T(X)\bigr)^\sharp T(Y),$$
и $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$.

Аддитивность эндоморфизма T очевидна. Следовательно, имеем возможность применить теорему 3.1. Таким образом, существуют такие $\alpha \in \mathbb{F}$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ и ψ — инъективный эндоморфизм поля $\mathbb{F}$, что отображение T имеет вид $T(X) = \alpha P^{-1}X_\psi P$ для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ или $T(X) = \alpha P^{-1}X_\psi^{\mathrm{t}}P$ для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$.

Ясно, что $T(E) = \alpha E$, где $E = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{nn} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — единичная матрица. Кроме того, $T(E) = T(EE) = \bigl(T(E)\bigr)^2$, откуда получаем, что $\alpha E = \alpha^2 E$. Следовательно, $\alpha(\alpha - 1) = 0$, и либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = 1$.

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. Положим $\varphi(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{F}$. Тогда для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ имеем $T(X) = P^{-1}X^{\varphi}P$, и теорема доказана.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. Положим $\varphi(t) = \psi(t)$ для всех $t \in \mathbb{F}$. Предположим, что $T(X) = P^{-1}(X^{\varphi})^{\mathrm{t}}P$ для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, и рассмотрим матрицу $T(E_{11})$:
$$P^{-1}E_{11}P = T(E_{11}) = T(E_{12}E_{21}) = T(E_{12})T(E_{21}) = \\ = (P^{-1}E_{21}P)(P^{-1}E_{12}P) = P^{-1}E_{22}P.$$

Следовательно, $E_{11} = E_{22}$ в этом случае, что неверно. Тем самым доказано, что $T(X) = P^{-1}X^{\varphi}P$ для всех матриц $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$. $\square$

5. Примеры

Если $|\mathbb{F}| = 2$ и $n = 2$, то существуют линейные отображения, монотонные относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$, но не представимые в том виде, который мы получили в теореме 3.1.

Пример 5.1. Пусть $|\mathbb{F}| = 2$, $n = 2$, T линейно, $T(E_{ii}) = E_{ii}$, $T(E_{ij}) = 0$ при $i \neq j$. Тогда T монотонно относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$.

Доказательство. Имеем три пары ортогональных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеется всего три B-набора, переходящих при действии отображения T в B-набор $\{E_{11}, E_{22}\}$.

Покажем, что отображение T монотонно относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$. Пусть матрицы X и Y таковы, что $X \overset{\sharp}{\leqslant} Y$ ($X \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} Y$). Если $X = Y$ или $X = 0$, то $T(X) \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$ ($T(X) \overset{\mathrm{cn}}{\leqslant} T(Y)$), и всё доказано. Пусть $X \neq Y$, $X \neq 0$. Тогда $0 \overset{\sharp}{<} X \overset{\sharp}{<} Y$ ($0 \overset{\mathrm{cn}}{<} X \overset{\mathrm{cn}}{<} Y$) и $\mathrm{rk}\, Y = 2$, т. е. матрица Y невырожденная. Следовательно, матрицы X и $Y - X$ образуют B-набор. По доказанному выше матрицы $T(X)$ и $T(Y - X)$ также образуют B-набор. Поэтому $0 \overset{\sharp}{<} T(X) \overset{\sharp}{<} T(X) + T(Y - X) = T(Y)$ и $0 \overset{\mathrm{cn}}{<} T(X) \overset{\mathrm{cn}}{<} T(Y)$. $\square$

Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \geqslant 2$ — целое число. Следующий пример показывает, что существует неаддитивное отображение T, монотонное относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$.

Пример 5.2. Пусть

$$T(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } X = E_{11}, \\ X & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда T монотонно относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\mathrm{cn}}{\leqslant}$.

Доказательство. Пусть $X \overset{\sharp}{\leqslant} Y$. Ясно, что при $X = E_{11}$ или $X = 0$ имеем $T(X) = 0 \overset{\sharp}{\leqslant} T(Y)$. Более того, если $Y = E_{11}$, то либо $X = E_{11}$, либо $X = 0$.

Пусть $X \neq E_{11}$ и $Y \neq E_{11}$. Тогда $T(X) = X \overset{\sharp}{\leqslant} Y = T(Y)$. Таким образом, T монотонно относительно порядка $\overset{\sharp}{\leqslant}$. Аналогично T монотонно относительно порядка $\overset{\text{cn}}{\leqslant}$. □

Отметим, что отображение T в примере 5.2 не является монотонным относительно порядков $\overset{\sharp}{<}$ и $\overset{\text{cn}}{<}$. С другой стороны, существует неаддитивное монотонное отображение, монотонное относительно порядков $\overset{\sharp}{<}$ и $\overset{\text{cn}}{<}$.

Пример 5.3. Пусть $T(X) = E_{11} + E_{22} + \ldots + E_{kk}$ для всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, где $k = \operatorname{rk} X$. Тогда T монотонно относительно порядков $\overset{\sharp}{<}$ и $\overset{\text{cn}}{<}$.

Доказательство. Пусть $X \overset{\sharp}{<} Y$ или $X \overset{\text{cn}}{<} Y$. Тогда $\operatorname{rk} X < \operatorname{rk} Y$. Нетрудно убедиться, что $T(X) \overset{\sharp}{<} T(Y)$ и $T(X) \overset{\text{cn}}{<} T(Y)$. Таким образом, T монотонно относительно порядков $\overset{\sharp}{<}$ и $\overset{\text{cn}}{<}$. □

Автор благодарен своему научному руководителю А. Э. Гутерману за постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Богданов И. И., Гутерман А. Э. Монотонные отображения матриц, заданные групповой обратной, и одновременная диагонализуемость // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 1. — С. 3—20.

[2] Ефимов М. А. Линейные отображения матриц, монотонные относительно порядков $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{\text{cn}}{\leqslant}$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 53—66.

[3] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М: Мир, 1986.

[4] Alieva A., Guterman A. Monotone linear transformations on matrices are invertible // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 3335—3352.

[5] Baksalary J. K., Pukelsheim F., Styan G. P. H. Some properties of matrix partial orderings // Linear Algebra Appl. — 1989. — Vol. 119. — P. 57—85.

[6] Ben-Israel A., Greville T. Generalized Inverses: Theory and Applications. — New York: John Wiley and Sons, 1974.

[7] Englefield M. J. The commuting inverses of a square matrix // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1966. — Vol. 62. — P. 667—671.

[8] Erdelyi I. On the matrix equation $Ax = \lambda Bx$ // J. Math. Anal. Appl. — 1967. — Vol. 17. — P. 117—132.

[9] Guterman A. Linear preservers for Drazin star partial order // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 3905—3917.

[10] Guterman A. Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 331, no. 1-3. — P. 75—87.

[11] Hartwig R. E. How to partially order regular elements // Math. Japon. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — P. 1—13.

[12] Hartwig R. E., Mitra S. K. Partial orders based on outer inverses // Linear Algebra Appl. — 1982. — Vol. 176. — P. 3—20.

[13] Legiša P. Automorphisms of M_n, partially ordered by rank subtractivity ordering // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 389. — P. 147—158.

[14] Legiša P. Automorphisms of M_n, partially ordered by the star order // Linear and Multilinear Algebra. — 2006. — Vol. 54, no. 3. — P. 157—188.

[15] Mitra S. K. A new class of g-inverse of square matrices // Sankhyā. Ser. A. — 1963. — Vol. 30. — P. 323—330.

[16] Mitra S. K. On group inverses and the sharp order // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 92. — P. 17—37.

[17] Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1980. — Vol. 23. — P. 249—260.

[18] Ovchinnikov P. G. Automorphisms of the poset of skew projections // J. Funct. Anal. — 1993. — Vol. 115. — P. 184—189.

[19] Pierce S. et al. A survey of linear preserver problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 1—119.

[20] De Pillis J. Linear transformations which preserve Hermitian and positive semidefinite operators // Pacific J. Math. — 1967. — Vol. 23. — P. 129—137.

[21] Rao C. R., Mitra S. K. Generalized Inverse of Matrices and its Applications. — New York: Wiley, 1971.

[22] Robert P. On the group-inverse of a linear transformation // J. Math. Anal. Appl. — 1968. — Vol. 22. — P. 658—669.

[23] Šemrl P. Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2003. — Vol. 69. — P. 481—490.