Топологическая классификация преобразований Мёбиуса

Т. В. РЫБАЛКИНА
Институт математики НАН Украины, Украина
e-mail: rybalkina_t@ukr.net

В. В. СЕРГЕЙЧУК
Институт математики НАН Украины, Украина
e-mail: sergeich@imath.kiev.ua

УДК 512.643+515.12

Ключевые слова: дробно-линейные преобразования, преобразования Мёбиуса, топологическая сопряжённость.

Аннотация

Дробно-линейные преобразования на расширенной комплексной плоскости классифицируются с точностью до топологической сопряжённости. Напомним, что два преобразования f и g называются топологически сопряжёнными, если существует такой гомеоморфизм h, что $g = h^{-1} \circ f \circ h$, где $\circ$ — суперпозиция отображений.

Abstract

T. V. Rybalkina, V. V. Sergeichuk, Topological classification of Möbius transformations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 6, pp. 175—183.

Linear fractional transformations on the extended complex plane are classified up to topological conjugacy. Recall that two transformations f and g are called topologically conjugate if there exists a homeomorphism h such that $g = h^{-1} \circ f \circ h$, in which $\circ$ is the composition of mappings.

1. Введение

Преобразованиями Мёбиуса называются дробно-линейные преобразования вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

на расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \infty$. Основы теории преобразований Мёбиуса представлены в [4, гл. 3, 4] и [3, гл. 2, 3].

Поскольку числа a, b, c, d можно одновременно умножить на любое ненулевое число, не меняя f, то преобразование (1.1) можно задавать матрицей

$$M_f := \frac{1}{\sqrt{ad-bc}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 6, с. 175—183.

с определителем 1. Эта матрица определяется по f однозначно с точностью до умножения на -1. Суперпозиции преобразований соответствует произведение их матриц:

$$M_{fg} = M_f M_g. \tag{1.3}$$

Через $\operatorname{tr} A$ обозначаем след матрицы A.

Преобразования Мёбиуса f и g называются

— *сопряжёнными*, если существует такое преобразование Мёбиуса h, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathbb{C}} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & \hat{\mathbb{C}} \arrow[d, "h"] \\ \hat{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"] & \hat{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $g = h^{-1}fh$;

— *топологически сопряжёнными*, если существует такой гомеоморфизм $h\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, что $g = h^{-1}fh$ (отображение h называется гомеоморфизмом, если h и h^{-1} — непрерывные биекции).

Если два преобразования Мёбиуса являются сопряжёнными, то они являются и топологически сопряжёнными, поскольку каждое преобразование Мёбиуса является гомеоморфизмом.

Из [4, теорема 4.3.1] следует, что нетождественные преобразования Мёбиуса f и g являются сопряжёнными тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} M_f = \pm \operatorname{tr} M_g$.

Если $g = h^{-1}fh$, то $M_g = \pm M_h^{-1} M_f M_h$ в силу (1.3), поэтому сопряжённые преобразования Мёбиуса задаются подобными матрицами, определёнными с точностью до умножения на -1. Подберём M_h так, чтобы M_g стала жордановой матрицей. Так как $\det M_f = \det M_g = 1$, то

$$M_g = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix} \ \ (\lambda \neq \pm 1, 0) \ \text{ или } \ M_g = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \ \ (\lambda = \pm 1). \tag{1.4}$$

Матрица M_g определяется по f однозначно с точностью до умножения на -1 и с точностью до перестановки чисел λ и $1/\lambda$ в первой матрице (1.4). Поэтому f сопряжено с $z \mapsto \lambda^2 z$, или $z \mapsto (1/\lambda^2)z$, или $z \mapsto z + 1$, и мы получаем канонический вид преобразования Мёбиуса относительно сопряжённости (см. также [4, § 4.3]):

каждое преобразование Мёбиуса сопряжено в точности с одним преобразованием вида $m_\mu(z) = \mu z$ ($\mu \neq 0, 1$) или $m_1(z) = z + 1$ ($\mu := 1$), в котором μ определено с точностью до замены на $1/\mu$. (1.5)

Числа $\mu_1 := \mu$ и $\mu_2 := 1/\mu$ называются *мультипликаторами* преобразования f. Они определяются для голоморфного отображения на римановой поверхности в [13, с. 45] и для нетождественного преобразования Мёбиуса f могут быть посчитаны по формуле

$$\mu_i = \begin{cases} f'(z_i) & \text{при } z_i \neq \infty, \\ \lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{f'(z)} & \text{при } z_i = \infty, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

где z_1 и z_2 — неподвижные точки f (их две или одна; в последнем случае берём $z_1 = z_2$).

Основной результат статьи — следующая теорема с тремя критериями топологической сопряжённости; критерий 4) был опубликован в [2] первым автором.

Теорема 1.1. *Следующие четыре утверждения эквивалентны для произвольных нетождественных преобразований Мёбиуса* $f, g\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$:

1) f *и* g *являются топологически сопряжёнными*;
2) $\operatorname{tr} M_f, \operatorname{tr} M_g \notin [-2; 2]$ *или* $\operatorname{tr} M_f = \pm \operatorname{tr} M_g$ (*где* $[-2; 2]$ — *множество всех* $a \in \mathbb{R}$, *таких что* $-2 \leqslant a \leqslant 2$);
3) *если* λ — *собственное число матрицы* M_f *и* λ' — *собственное число матрицы* M_g, *то* $|\lambda|, |\lambda'| \neq 1$, *или* $\lambda = \pm\lambda'$, *или* $\lambda = \pm\bar{\lambda}'$;
4) *если* μ — *мультипликатор* f *и* ν — *мультипликатор* g, *то* $|\mu|, |\nu| \neq 1$, *или* $\mu = \nu$, *или* $\mu = \bar{\nu}$.

Следующее определение использует каноническую форму (1.5). Нетождественное преобразование Мёбиуса называется

— *гиперболическим*, если оно сопряжено с $z \mapsto \mu z$, $1 \neq \mu \in \mathbb{R}$;
— *локсодромическим*, если оно сопряжено с $z \mapsto \mu z$, $\mu \notin \mathbb{R}$ и $|\mu| \neq 1$;
— *эллиптическим*, если оно сопряжено с $z \mapsto \mu z$, $|\mu| = 1$ и $\mu \neq 1$;
— *параболическим*, если оно сопряжено с $z \mapsto z + 1$.

Каноническая форма преобразования Мёбиуса относительно топологической сопряжённости легко получается из эквивалентности условий 1) и 4) в теореме 1.1.

Следствие 1.1.

1. *Каждое гиперболическое или локсодромическое преобразование Мёбиуса топологически сопряжено с* $z \mapsto 2z$.
2. *Каждое эллиптическое преобразование Мёбиуса топологически сопряжено с преобразованием* $z \mapsto \mu z$ ($|\mu| = 1$), *определённым однозначно с точностью до замены* μ *на* $\bar{\mu}$.
3. *Каждое параболическое преобразование Мёбиуса топологически сопряжено с* $z \mapsto z + 1$.

Два линейных оператора $\mathcal{A}, \mathcal{B}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ называются *топологически сопряжёнными*, если $\mathcal{B} = h^{-1}\mathcal{A}h$ для некоторого гомеоморфизма $h\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Поставив в соответствие преобразованию Мёбиуса f линейный оператор $x \mapsto M_f x$ ($x \in \mathbb{C}^2$), определённый с точностью до умножения на -1, получим взаимно-однозначное соответствие между преобразованиями Мёбиуса на $\hat{\mathbb{C}}$ и линейными операторами на $\mathbb{C}^2$ с определителем 1, определёнными с точностью до умножения на -1. Это соответствие сохраняет топологическую сопряжённость в силу следующего утверждения, которое будет доказано в разделе 4.

Следствие 1.2. *Следующие два условия для преобразований Мёбиуса f и g эквивалентны*:

1) *f и g являются топологически сопряжёнными*;
2) *линейный оператор $x \mapsto M_f x$ на $\mathbb{C}^2$ топологически сопряжён с $x \mapsto M_g x$ или $x \mapsto -M_g x$.*

2. Топологическая классификация линейных операторов

В этом разделе мы напомним результаты работ [6, 12, 14] о топологической классификации линейных операторов (они обобщаются на аффинные операторы в [1, 6, 7]), которые будут использоваться в следующих разделах.

Для каждой квадратной комплексной матрицы $A = [a_{ij}]$ мы определим матрицу $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ с элементами, комплексно сопряжёнными элементам A, и построим разложение в прямую сумму квадратных матриц

$$S^{-1}AS = A_0 \oplus A_{01} \oplus A_1 \oplus A_{1\infty} \quad (S\text{ — невырожденная матрица}), \tag{2.1}$$

в котором все собственные числа λ матрицы A_0 (A_{01}, A_1 и $A_{1\infty}$) удовлетворяют условию $\lambda = 0$ (соответственно $0 < |\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$ и $|\lambda| > 1$).

Утверждение 1 следующей теоремы доказано в [12] (см. также [14]), утверждение 2 доказано первым автором в [6, теорема 2.2].

Теорема 2.1. *Пусть $f(x) = Ax$ и $g(x) = Bx$ — такие линейные операторы над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, что ни одно из их собственных чисел не является корнем из единицы. Определим матрицы A_0, A_{01}, A_1, $A_{1\infty}$ и B_0, B_{01}, B_1, $B_{1\infty}$ по A и B как в* (2.1).

1. *Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то f и g являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &A_0 \text{ подобна } B_0, && \text{размер } A_{01} \text{ равен размеру } B_{01}, && \det(A_{01}B_{01}) > 0,\\ &A_1 \text{ подобна } B_1, && \text{размер } A_{1\infty} \text{ равен размеру } B_{1\infty}, && \det(A_{1\infty}B_{1\infty}) > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2. *Если $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, то f и g являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &A_0 \text{ подобна } B_0, && \text{размер } A_{01} \text{ равен размеру } B_{01},\\ &A_1 \oplus \bar{A}_1 \text{ подобна } B_1 \oplus \bar{B}_1, && \text{размер } A_{1\infty} \text{ равен размеру } B_{1\infty}. \end{aligned}$$

Линейные операторы $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называются *сопряжёнными*, если существует линейная биекция $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такая что $g = h^{-1}fh$.

Оператор f называется *периодическим*, если существует натуральное число k, такое что f^k — тождественный оператор. В [12] доказано, что если верна гипотеза

$$\text{два периодических линейных оператора являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда они являются сопряжёнными,} \tag{2.3}$$

то (2.2) — необходимые и достаточные условия топологической сопряжённости для любых линейных операторов. В [8—11] эта гипотеза доказана для линейных операторов на $\mathbb{R}^n$ при $n < 6$.

Эти результаты доказывают утверждение 1 следующей теоремы. Её утверждение 2 доказывается как теорема 2.2 в [6].

Теорема 2.2. *Пусть $f(x) = Ax$ и $g(x) = Bx$ — линейные операторы на $V = \mathbb{R}^m$ или $V = \mathbb{C}^m$. Определим матрицы A_0, A_{01}, A_1, $A_{1\infty}$ и B_0, B_{01}, B_1, $B_{1\infty}$ по A и B как в* (2.1).

1. *Если $V = \mathbb{R}^m$ и $m \leqslant 5$, то f и g являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &A_0 \text{ подобна } B_0, \quad \text{размер } A_{01} \text{ равен размеру } B_{01}, \quad \det(A_{01}B_{01}) > 0,\\ &A_1 \text{ подобна } B_1, \quad \text{размер } A_{1\infty} \text{ равен размеру } B_{1\infty}, \quad \det(A_{1\infty}B_{1\infty}) > 0. \end{aligned}$$

2. *Если $V = \mathbb{C}^m$ и $m \leqslant 2$, то f и g являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &A_0 \text{ подобна } B_0, && \text{размер } A_{01} \text{ равен размеру } B_{01},\\ &A_1 \oplus \bar{A}_1 \text{ подобна } B_1 \oplus \bar{B}_1, && \text{размер } A_{1\infty} \text{ равен размеру } B_{1\infty}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Следующее утверждение используется в разделе 4 при доказательстве следствия 1.2.

Следствие 2.1. *Пусть $f(x) = Ax$ и $g(x) = Bx$ — нетождественные линейные операторы на $\mathbb{C}^2$. Пусть их матрицы A и B имеют определители, равные* 1, *и являются диагонализируемыми (и поэтому их жордановы нормальные формы — диагональные матрицы). Пусть λ и λ' — собственные числа матриц A и B соответственно. Тогда f и g являются топологически сопряжёнными, если и только если $|\lambda|, |\lambda'| \neq 1$, или $\lambda = \lambda'$, или $\lambda = \bar{\lambda}'$.*

Доказательство. Из сопряжённости линейных операторов следует их топологическая сопряжённость, поэтому мы можем считать, что матрицы операторов $f(x) = Ax$ и $g(x) = Bx$ жордановы:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & \lambda'^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda, \lambda' \neq \pm 1, 0.$$

Возможны четыре случая.

Случай 1. $|\lambda| \neq 1$ и $|\lambda'| \neq 1$. В обозначениях (2.1)

$$A_{01} \oplus A_{1\infty} = [\lambda] \oplus [\lambda^{-1}], \quad B_{01} \oplus B_{1\infty} = [\lambda'] \oplus [\lambda'^{-1}].$$

Операторы f и g являются топологически сопряжёнными по утверждению 2 теоремы 2.2.

Случай 2. $|\lambda| = |\lambda'| = 1$. Тогда

$$A_1 \oplus \bar{A}_1 = [\lambda] \oplus [\bar{\lambda}], \quad B_1 \oplus \bar{B}_1 = [\lambda'] \oplus [\bar{\lambda}'].$$

Согласно утверждению 2 теоремы 2.2 f и g являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда $\lambda = \lambda'$ или $\lambda = \bar{\lambda}'$.

Случай 3. $|\lambda| = 1$ и $|\lambda'| \neq 1$. Тогда

$$A_1 \oplus \bar{A}_1 = [\lambda] \oplus [\bar{\lambda}], \quad B_{01} \oplus B_{1\infty} = [\lambda'] \oplus [\lambda'^{-1}].$$

Операторы f и g не являются топологически сопряжёнными согласно утверждению 2 теоремы 2.2.

Случай 4. $|\lambda| \neq 1$ и $|\lambda'| = 1$. Операторы f и g не являются топологически сопряжёнными. $\square$

Лемма 2.1. *Преобразования Мёбиуса $f(z) = az$ и $g(z) = bz$ являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда*

$$|a|, |b| \neq 1, \quad \text{или} \quad a = b, \quad \text{или} \quad a = \bar{b}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Докажем импликацию $\Longleftarrow$. Предположим, что f и g удовлетворяют условию (2.5).

Если для f и g выполняется

$$|a|, |b| < 1, \quad \text{или} \quad |a|, |b| > 1, \quad \text{или} \quad a = b, \quad \text{или} \quad a = \bar{b}, \tag{2.6}$$

то согласно утверждению 2 теоремы 2.2 линейные отображения $z \mapsto az$ и $z \mapsto bz$ на $\mathbb{C}$ являются топологически сопряжёнными через некоторый гомеоморфизм $\eta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Тогда преобразования f и g являются топологически сопряжёнными через гомеоморфизм $h\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, определённый следующим образом: $h(z) := \eta(z)$ для $z \in \mathbb{C}$ и $h(\infty) := \infty$.

Если f и g не удовлетворяют (2.6) (но удовлетворяют (2.5)), то либо $|a| < 1$ и $|b| > 1$, либо $|a| > 1$ и $|b| < 1$. Предположим, что $|a| < 1$ и $|b| > 1$. Тогда $|1/b| < 1$, и в силу (2.6) f является топологически сопряжённым с $g^{-1}(z) = (1/b)z$, которое в свою очередь является топологически сопряжённым с g через $z \mapsto 1/z$.

Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Пусть преобразования Мёбиуса $f(z) = az$ и $g(z) = bz$ являются топологически сопряжёнными, т. е. существует гомеоморфизм $h\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, такой что

$$hg(z) = fh(z) \quad \text{для всех} \quad z \in \hat{\mathbb{C}}. \tag{2.7}$$

Так как h отображает все неподвижные точки g на все неподвижные точки f, а их неподвижные точки — 0 и ∞, то возможны два случая.

Случай 1. $h(\infty) = \infty$ и $h(0) = 0$. В силу (2.7) линейные операторы $z \mapsto az$ и $z \mapsto bz$ на $\mathbb{C}$ (ограничения f и g на $\mathbb{C}$) являются топологически сопряжёнными через гомеоморфизм — ограничение h на $\mathbb{C}$. По утверждению 2 теоремы 2.2

$$|a|, |b| < 1, \quad \text{или} \quad |a|, |b| > 1, \quad \text{или} \quad a = b, \quad \text{или} \quad a = \bar{b}. \tag{2.8}$$

Случай 2. $h(\infty) = 0$ и $h(0) = \infty$. Преобразования Мёбиуса $f^{-1}(z) = (1/a)z$ и $g(z) = bz$ являются топологически сопряжёнными через $h_1 := \varphi h$ с $\varphi(z) := 1/z$. Поскольку $h_1(\infty) = \infty$, то выполняется утверждение (2.8) с $1/a$ вместо a.

В обоих случаях a и b удовлетворяют (2.5). □

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть f и g — два нетождественных преобразования Мёбиуса, λ и λ' — собственные числа матриц M_f и M_g соответственно,

$$n(f) \text{ и } n(g) \text{ — числа неподвижных точек } f \text{ и } g. \tag{3.1}$$

Напомним, что число неподвижных точек нетождественного преобразования Мёбиуса равно 1 или 2.

Докажем эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 4). Пусть выполняется условие 1). Тогда $n(f) = n(g)$. Поскольку f и g — нетождественные преобразования, то возможны два случая.

Случай 1. $n(f) = n(g) = 1$. В силу (1.5) f и g являются сопряжёнными с $m_1(z) = z + 1$; так как мультипликатор m_1 равен 1, то выполняется 4).

Случай 2. $n(f) = n(g) = 2$. Пусть $\mu, \nu \notin \{0, 1\}$ — мультипликаторы f и g соответственно. Согласно (1.5) f и g являются сопряжёнными с $m_\mu(z) = \mu z$ и $m_\nu(z) = \nu z$; их неподвижные точки — 0 и ∞. Утверждение 4) выполняется в силу леммы 2.1.

Мы доказали импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Этими же рассуждениями, но в обратном порядке, доказываем импликацию 1) $\Longleftarrow$ 4).

Докажем эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 4). Если μ — мультипликатор f, то в силу (1.5) и (1.2) f является сопряжённым с $m_\mu(z) = \mu z$ и матрица M_f подобна

$$M_{m_\mu} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu}} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mu} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица M_f имеет собственное число λ, равное

$$\sqrt{\mu} \quad \text{или} \quad -\sqrt{\mu}. \tag{3.2}$$

Аналогично если ν — мультипликатор g, то M_g имеет собственное число λ', равное $\sqrt{\nu}$ или $-\sqrt{\nu}$, что доказывает эквивалентность 3) и 4).

Докажем эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3). Сначала докажем эквивалентность

$$|\lambda| = 1 \Longleftrightarrow \operatorname{tr} M_f = \pm \operatorname{tr} M_{m_\mu} \in [-2; 2]. \tag{3.3}$$

Равенство $\pm \operatorname{tr} M_f = \operatorname{tr} M_{m_\mu}$ следует из подобия матриц M_f и M_{m_μ}. Если $|\lambda| = 1$, то в силу (1.4)

$$\operatorname{tr} M_{m_\mu} = \lambda + \lambda^{-1} = \lambda + \bar{\lambda} \in [-2; 2].$$

Если $|\lambda| \neq 1$, то $\lambda^{-1} \neq \bar{\lambda}$ и $\operatorname{tr} M_{m_\mu} = \lambda + \lambda^{-1} \notin [-2; 2]$, что доказывает (3.3). Возможны три случая.

Случай 1. $|\lambda| \neq 1$ и $|\lambda'| \neq 1$. Тогда 3) и 2) выполняются в силу (3.3).

Случай 2. $|\lambda| = 1$ и $|\lambda'| \neq 1$, либо $|\lambda| \neq 1$ и $|\lambda'| = 1$. Тогда 2) и 3) не выполняются.

Случай 3. $|\lambda| = |\lambda'| = 1$. Условие $\operatorname{tr} M_f = \pm \operatorname{tr} M_g$ эквивалентно $\operatorname{tr} M_{m_\mu} = \pm \operatorname{tr} M_{m_\nu}$, эквивалентно $\lambda+\lambda^{-1} = \pm(\lambda'+\lambda'^{-1})$, эквивалентно $\lambda+\bar{\lambda} = \pm(\lambda'+\bar{\lambda}')$, эквивалентно $\lambda = \pm\lambda'$ или $\lambda = \pm\bar{\lambda}'$.

4. Доказательство следствия 1.2

Пусть f и g — преобразования Мёбиуса. Возможны четыре случая.

Случай 1. $n(f) \neq n(g)$ (см. (3.1)). Тогда утверждение 1) следствия 1.2 не выполняется. Покажем, что утверждение 2) тоже не выполняется. Предположим, что $n(f) < n(g)$. Если $n(g) = \infty$, то g — тождественное преобразование, $n(f) \in \{1, 2\}$, и 2) не выполняется. Предположим, что $n(g) < \infty$. Тогда $n(f) = 1$ и $n(g) = 2$. Согласно (1.5) и (3.2) f является сопряжённым с $m_1(z) = z + 1$ и g является сопряжённым с $m_\mu(z) = \lambda^2 z$. Операторы $x \mapsto M_f x$ и $x \mapsto M_g x$ являются сопряжёнными с $x \mapsto \pm M_{m_1} x$ и $x \mapsto \pm M_{m_\mu} x$ соответственно, где

$$M_{m_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{m_\mu} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (\lambda \neq 0, 1).$$

Вектор $[0,0]^{\mathrm{T}}$ — единственная неподвижная точка линейного оператора $x \mapsto M_{m_\mu} x$. Все векторы $[a,0]^{\mathrm{T}}$ $(a \in \mathbb{C})$ — неподвижные точки оператора $x \mapsto M_{m_1} x$. Поэтому утверждение 2) не выполняется.

Случай 2. $n(f) = n(g) = 1$. Согласно (1.5) f и g являются сопряжёнными с $z \mapsto z + 1$. Ввиду (1.4) матрицы M_f и M_g подобны

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, M_f подобна M_g или $-M_g$. Тогда $x \mapsto M_f x$ и $x \mapsto \pm M_g x$ являются сопряжёнными, а поэтому и топологически сопряжёнными.

Случай 3. $n(f) = n(g) = 2$. В силу (1.5) и (3.2) f является сопряжённым с $z \mapsto \lambda^2 z$ и g является сопряжённым с $z \mapsto {\lambda'}^2 z$, где λ и λ' — собственные числа матриц M_f и M_g соответственно. Жордановы нормальные формы матриц M_f и M_g имеют вид $\pm J_f$ и $\pm J_g$, где

$$J_f := \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad J_g := \begin{bmatrix} \lambda' & 0 \\ 0 & {\lambda'}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda, \lambda' \notin \{0, \pm 1\}.$$

В силу утверждения 3) теоремы 1.1 f и g являются топологически сопряжёнными тогда и только тогда, когда

$$|\lambda|, |\lambda'| \neq 1, \quad \text{или} \quad \lambda = \pm\lambda', \quad \text{или} \quad \lambda = \pm\bar{\lambda}',$$

тогда и только тогда, когда линейные операторы $x \mapsto J_f x$ и $x \mapsto \pm J_g x$ являются топологически сопряжёнными (см. следствие 2.1), тогда и только тогда, когда линейные операторы $x \mapsto M_f x$ и $x \mapsto \pm M_g x$ являются топологически сопряжёнными.

Случай 4. $n(f) = n(g) > 2$. Утверждения 1) и 2) выполняются, поскольку f и g — тождественные отображения и $M_f = \pm M_g = \pm I_2$, где I_2 — единичная матрица.

Литература

[1] Будницкая Т. В. Классификация топологически сопряжённых аффинных отображений // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 1. — С. 134—139.

[2] Будницкая Т. В. Топологическая классификация преобразований Мёбиуса // Сб. трудов Института математики НАН Украины. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 349—358.

[3] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 1. Начала теории. — М.: Наука, 1967.

[4] Beardon A. F. The Geometry of Discrete Groups. — New York: Springer, 1983.

[5] Blanc J. Conjugacy classes of affine automorphisms of $\mathbb{K}^n$ and linear automorphisms of $\mathbb{P}^n$ in the Cremona groups // Manuscripta Math. — 2006. — Vol. 119, no. 2. — P. 225—241.

[6] Budnitska T. V. Topological classification of affine operators on unitary and Euclidean spaces // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 434. — P. 582—592.

[7] Budnitska T., Budnitska N. Classification of affine operators up to biregular conjugacy // Linear Algebra Appl. — 2011. — Vol. 434. — P. 1195—1199.

[8] Cappell S. E., Shaneson J. L. Nonlinear similarity of matrices // Bull. Am. Math. Soc. — 1979. — Vol. 1. — P. 899—902.

[9] Cappell S. E., Shaneson J. L. Non-linear similarity // Ann. Math. — 1981. — Vol. 113, no. 2. — P. 315—355.

[10] Cappell S. E., Shaneson J. L. Non-linear similarity and linear similarity are equivariant below dimension 6 // Contemp. Math. — 1999. — Vol. 231. — P. 59—66.

[11] Cappell S. E., Shaneson J. L., Steinberger M., West J. E. Nonlinear similarity begins in dimension six // Am. J. Math. — 1989. — Vol. 111. — P. 717—752.

[12] Kuiper N. H., Robbin J. W. Topological classification of linear endomorphisms // Invent. Math. — 1973. — Vol. 19, no. 2. — P. 83—106.

[13] Milnor J. Dynamics in One Complex Variable. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2006.

[14] Robbin J. W. Topological conjugacy and structural stability for discrete dynamical systems // Bull. Am. Math. Soc. — 1972. — Vol. 78. — P. 923—952.