BMV-гипотеза над кватернионами и октонионами

А. С. СМИРНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: AlSmirnov@nes.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: BMV-гипотеза, неотрицательно-определённые матрицы, кватернионы, октонионы.

Аннотация

В данной работе рассмотрены обобщения BMV-гипотезы на матрицы над кватернионами и октонионами. Над телом кватернионов показана корректность постановки BMV-гипотезы, её эквивалентность классической комплексной задаче. Для изучения основной гипотезы над октонионами исследованы общие алгебраические свойства данных объектов и эрмитовых матриц над ними.

Abstract

A. S. Smirnov, The BMV-conjecture over quaternions and octonions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 6, pp. 185—222.

This paper investigates generalizations of the BMV-conjecture for quaternionic and octonionic matrices. For quaternions the correctness of the formulation is shown as well as its equivalence to the original conjecture for complex matrices. General properties of octonions and Hermitian matrices over them are examined for the BMV-conjecture formulation over octonions.

1. Введение

Гипотеза с интригующим названием, с момента постановки которой прошло больше четверти века, была сформулирована Д. Бессисом, П. Мусса и М. Виллани [1] в 1975 году при попытке упростить вычисления функций распределения квантово-механических систем. Она связана со свойством положительности следа матриц, которое, если подтвердится, позволит находить точные значения границ погрешности в последовательности аппроксимаций Паде.

BMV-гипотезу легко сформулировать. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ — эрмитовы матрицы. Пусть B является неотрицательно-определённой матрицей. Тогда функционал над полем действительных чисел, определённый как $F(\lambda) = \mathrm{tr}[e^{A-\lambda B}]$, является преобразованием Лапласа положительной меры на $[0, \infty)$.

Данный факт может быть легко установлен для квантовой механики, определяемой уравнением Шрёдингера для бозонов в отсутствие магнитного поля,

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 6, с. 185—222.

так как в этом случае функция распределения может быть представлена интегралом Винера. Это представление невозможно для фермионов, в этом и состоит важность данной гипотезы для физики конденсированной среды.

BMV-гипотеза естественным образом появляется и в других разделах матричного анализа, ей посвящён большой объём литературы. Для матриц размера 2×2 существует простое доказательство справедливости BMV-гипотезы. Однако для матриц размера 3×3 ни доказательства, ни контрпримера до сих пор не было приведено. В некоторых работах (см., например, [3, 4]) доказана справедливость гипотезы в «нормальных» и «средних» случаях.

В 2004 году более удобная для применения алгебраических методов переформулировка данной гипотезы была предложена Э. Либом и Р. Зайрингером [10].

Гипотеза 1. Для любых двух неотрицательно-определённых матриц $A, B \in \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ все коэффициенты полинома $f(t) = \operatorname{tr}[(A+Bt)^m]$ неотрицательны.

Коэффициент при t^k в полиноме $f(t)$ для фиксированного m есть след матрицы $S_{m,k}(A,B)$, где $S_{m,k}(A,B)$ обозначает матрицу, являющуюся суммой всех слов длины m от двух матриц A, B, в которые матрица B входит ровно k раз. Например,

$$S_{4,2}(A,B) = A^2B^2 + AB^2A + ABAB + BABA + B^2A^2 + BA^2B.$$

Утверждение 1.1. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ — эрмитовы неотрицательно-определённые матрицы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *A^n — эрмитова неотрицательно-определённая матрица.*
2. $\operatorname{tr}(A) \geqslant 0$.
3. $\operatorname{Re}(\operatorname{tr}[AB]) \geqslant 0$.
4. *Для любой матрицы $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ матрица C^*AC также является неотрицательно-определённой.*

Из приведённых утверждений очевидным образом следует, что для $0 \leqslant k \leqslant 2$ и для $m-2 \leqslant k \leqslant m$ каждое слово в $S_{m,k}(A,B)$ имеет неотрицательный след, поэтому гипотеза 1 справедлива для $m \leqslant 5$. В [7] К. Хиллар и Ч. Джонсон проверили первый нетривиальный случай $m = 6$, $k = 3$ для неотрицательно-определённых матриц размера 3×3 и построили пример таких матриц A, B, что $\operatorname{tr}(ABAB^2A) \leqslant 0$. Д. Хегеле [5] установил, что BMV-гипотеза выполняется для $m = 7$. К. Хиллар в [6] установил также следующий факт.

Теорема 1.2 [6, следствие 1.8]. *Если гипотеза 1 выполняется для некоторого $m = m_0$, то она выполняется и для всех $m \leqslant m_0$.*

Таким образом, BMV-гипотеза оказывается справедлива для случая $m \leqslant 7$. И. Клепом и М. Швайгхофером в [9] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.3. *Гипотеза 1 справедлива при $m \leqslant 13$.*

Также С. Бургдорф [2] доказано, что при $0 \leqslant k \leqslant 4$ и $m-4 \leqslant k \leqslant m$ вне зависимости от m $\operatorname{tr}\big(S_{m,k}(A,B)\big) \geqslant 0$. Поэтому в полиноме $f(t)$ коэффициент при t^k для таких k неотрицателен.

В данной работе рассматривается некоммутативный (т. е. формулировка гипотезы 1 над кватернионами) и неассоциативный (т. е. формулировка гипотезы 1 над октонионами) случаи данной гипотезы.

2. Кватернионный случай

2.1. Матрицы над кватернионами

Пространство кватернионов — это четырёхмерное пространство $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$ с базисными векторами 1, i, j, k. Кватернион — это элемент данного пространства, т. е. вектор вида

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k,$$

где $q_i \in \mathbb{R}$.

Пространство $\mathbb{H}$ наделяется операцией покомпонентного сложения векторов и их умножения на элементы из $\mathbb{R}$. Операция умножения элементов векторного пространства $\mathbb{H}$ друг на друга определяется таблицей умножения базисных векторов

$$1i = i, \quad 1j = j, \quad 1k = k, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

и требованием левой и правой дистрибутивности. На кватернионах определяются все «стандартные» понятия комплексных чисел.

Определение 2.1. Сопряжённым элементом к элементу

$$q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}$$

называется элемент

$$\bar{q} := q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k.$$

Определение 2.2. Для каждого $q \in \mathbb{H}$ определена его норма $\|q\| := \sqrt{q\bar{q}}$.

Относительно введённых операций сохраняются все классические свойства. Нам важно отметить одно из них.

Замечание 2.3. $\overline{(ab)} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ для любых $a, b \in \mathbb{H}$.

Каждый кватернион может быть представлен в виде

$$q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k = (q_1 + q_2 i) + (q_3 + q_4 i)j = c_1 + c_2 j,$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Замечание 2.4. Если $q = c_1 + c_2 j$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, то $\bar{q} = \bar{c}_1 - c_2 j$.

Кватернионные матрицы также могут быть представлены в аналогичной форме. Пусть $Q = (q_{mn}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{H})$ и $q_{mn} = a_{mn} + b_{mn} j$, где $a_{mn}, b_{mn} \in \mathbb{C}$. Тогда $Q = A + Bj$, где $A = (a_{mn}),\ B = (b_{mn}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{H})$. Можно рассматривать и все «привычные» операции с матрицами над кватернионами, в частности транспонирование, сопряжение элементов матрицы, операцию инволюции *. Определения обратной и эрмитовой матрицы также без труда переносятся на случай кватернионов. Отметим лишь сохранение необходимого нам свойства.

Замечание 2.5 [12, с. 28, теорема 4.1]. Для любых $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{H})$, $B \in \mathrm{M}_{n,k}(\mathbb{H})$ выполнено $(AB)^* = B^*A^*$.

2.2. Неотрицательно-определённые матрицы над кватернионами

Определение 2.6. Кватернионная матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ называется неотрицательно-определённой (положительно-определённой), если для любого вектора $0 \neq x \in \mathbb{H}^n$ выполнено $x^*Ax \geqslant 0$ ($x^*Ax > 0$).

Пусть $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{H})$ и $A = A_1 + A_2 j$, где $A_1, A_2 \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Тогда существует гомоморфизм из $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{H})$ в $\mathrm{M}_{2m,2n}(\mathbb{C})$, задаваемый как $A \mapsto \chi_A$, где χ_A — блочная матрица, определяемая следующим образом:

$$\chi_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\bar{A}_2 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 2.7 [12, с. 42, замечание 6.1]. *χ_A — неотрицательно-определённая (положительно-определённая) матрица тогда и только тогда, когда A — неотрицательно-определённая (положительно-определённая) матрица.*

Замечание 2.8 [12, с. 30, теорема 4.2]. Пусть $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{H})$, $B \in \mathrm{M}_{n,k}(\mathbb{H})$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\chi_A \chi_B = \chi_{AB}, \quad \chi_{A^*} = (\chi_A)^*.$$

Утверждение 2.9. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$. Тогда $2\,\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A)] = \mathrm{tr}(\chi_A)$.*

Доказательство. Пусть $A = A_1 + A_2 j$. Тогда

$$\mathrm{tr}(\chi_A) = \mathrm{tr}(A_1) + \mathrm{tr}(\bar{A}_1) = \mathrm{tr}(A_1) + \overline{\mathrm{tr}(A_1)} = 2\,\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A_1)] = 2\,\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A)]. \qquad \square$$

2.3. Свойства неотрицательно-определённых матриц над кватернионами

Согласно определению 2.6 диагональные элементы кватернионной неотрицательно-определённой матрицы должны быть вещественными и неотрицательными, а следовательно, неотрицательным будет и след матрицы.

Утверждение 2.10. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ — неотрицательно-определённая матрица. Тогда для любой матрицы $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ матрица C^*AC также является неотрицательно-определённой.*

Доказательство. Согласно определению 2.6 необходимо показать, что для любого вектора $y \in \mathbb{H}^n$ верно неравенство $y^*(C^*AC)y \geqslant 0$. При этом $y^*C^*ACy = (Cy)^*A(Cy) = x^*Ax$, где $x = Cy \in \mathbb{H}^n$. Но по определению неотрицательно-определённой матрицы $x^*Ax \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbb{H}^n$, в частности для $x = Cy$, поэтому $y^*C^*ACy \geqslant 0$. $\square$

Утверждение 2.11. *Пусть* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ — *неотрицательно-определённая матрица. Тогда* A^n *является неотрицательно-определённой матрицей для любого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Воспользуемся утверждением 2.7. Матрица A является неотрицательно-определённой тогда и только тогда, когда матрица χ_A является неотрицательно-определённой. Согласно замечанию 2.8 верно свойство $\chi_A \chi_B = \chi_{AB}$, т. е., в частности, выполнено равенство $\chi_{(A^n)} = (\chi_A)^n$. Для комплексных матриц верно, что любая степень неотрицательно-определённой матрицы есть неотрицательно-определённая матрица. Поэтому заключаем, что при условии, что матрица A неотрицательно-определённая, матрица $\chi_{(A^n)}$ также является неотрицательно-определённой, а следовательно, применяя утверждение 2.7, получаем, что матрица A^n также является неотрицательно-определённой. $\square$

Замечание 2.12. В общем случае для произвольных кватернионных матриц A, B равенство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ неверно.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{tr}(AB) = 2k \neq -2k = \mathrm{tr}(BA)$.

Утверждение 2.13. *Пусть* $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ — *эрмитовы матрицы. Тогда* $\mathrm{tr}(AB) = \overline{\mathrm{tr}(BA)}$.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ \bar{q}_{12} & r_2 & \ldots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{q}_{1n} & \bar{q}_{2n} & \ldots & r_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ \bar{p}_{12} & t_2 & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

где $r_i, t_i \in \mathbb{R}$, $q_{ij}, p_{ij} \in \mathbb{H}$. Тогда

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} q_{ij}\bar{p}_{ij} + \sum_{i<j}^{j=n} \bar{q}_{ij} p_{ij},$$

$$\mathrm{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} p_{ij}\bar{q}_{ij} + \sum_{i<j}^{j=n} \bar{p}_{ij} q_{ij},$$

следовательно,

$$\overline{\mathrm{tr}(BA)} = \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} \overline{(p_{ij}\bar{q}_{ij})} + \sum_{i<j}^{j=n} \overline{(\bar{p}_{ij} q_{ij})} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} q_{ij}\bar{p}_{ij} + \sum_{i<j}^{j=n} \bar{q}_{ij} p_{ij} = \mathrm{tr}(AB). \quad \square$$

Утверждение 2.14. *Пусть* $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ — *эрмитовы неотрицательно-определённые матрицы. Тогда* $\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)] = \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(BA)] \geqslant 0$.

Доказательство. Перейдём от матриц A, B к соответствующим матрицам χ_A и χ_B. В силу утверждения 2.7 матрицы χ_A, χ_B являются комплексными неотрицательно-определёнными и к ним применимо утверждение 1.1. Применяя также утверждение 2.7, получаем

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\chi_{AB}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\chi_A \chi_B) \geqslant 0. \qquad \square$$

Следствие 2.15. *Пусть* $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ — *эрмитовы неотрицательно-определённые матрицы. Тогда* $\mathrm{tr}(A^x B^y A^z + A^z B^y A^x) \geqslant 0$ *для любых* $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $x \geqslant z$. Тогда

$$\mathrm{tr}(A^x B^y A^z + A^z B^y A^x) = \\ = \mathrm{tr}(A^{x-z}(A^z B^y A^z) + (A^z B^y A^z)A^{x-z}) = \mathrm{tr}(A^{x-z}C + CA^{x-z}),$$

где $C = A^z B^y A^z$ — неотрицательно-определённая матрица согласно утверждению 2.10. Остаётся применить утверждения 2.13 и 2.14. □

2.4. BMV-гипотеза над кватернионами

Во введении была сформулирована BMV-гипотеза для комплексных неотрицательно-определённых матриц. Выдвинем аналогичную гипотезу для кватернионных неотрицательно-определённых матриц.

Гипотеза 2. Для любых двух неотрицательно-определённых матриц $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ все коэффициенты полинома $f(t) = \mathrm{tr}[(A + Bt)^m]$ неотрицательны.

Утверждение 2.16. *Формулировка гипотезы* 2 *корректна, т. е. верно, что все коэффициенты полинома* $f(t)$ — *действительные числа.*

Доказательство. Очевидно, что для любой матрицы $L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ матрица $L + L^*$ является эрмитовой. Сумма эрмитовых матриц — эрмитова матрица, поэтому все слова в $S_{m,k}(A, B)$ разобьются на пары матриц L и L^*, сумма в которых будет эрмитовой матрицей. Если L^* совпадает с L, то матрица L сама является эрмитовой. След эрмитовой матрицы вещественен, это и обеспечивает корректность постановки BMV-гипотезы над кватернионами. □

Известно, что гипотеза 1 справедлива для неотрицательно-определённых матриц $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ [7, с. 4, следствие 1.7]. Выведем из этого факта справедливость гипотезы 2 для кватернионных неотрицательно-определённых матриц размера 2×2.

Утверждение 2.17 [7, с. 4, утверждение 1.6]. *Для любых эрмитовых неотрицательно-определённых матриц* $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ *любое слово из них имеет два вещественных неотрицательных собственных значения, а следовательно, и неотрицательный след.*

Над полем комплексных чисел унитарные матрицы определяются соотношением $U^*U = UU^* = E$. В кватернионном случае подобное определение сохраняется. Его корректность гарантирует следующее утверждение.

Утверждение 2.18 [12, с. 28, предложение 4.1]. *Пусть A, B — кватернионные матрицы. Тогда если $AB = E$, то и $BA = E$.*

Определение 2.19. Матрица $U \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ называется унитарной, если $U^*U = E$.

Теорема 2.20. *Пусть заданы эрмитовы матрицы $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$. Тогда существует такая унитарная матрица $U \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$, что U^*AU, $U^*BU \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Пусть изначально

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix},$$

p, q — заданные кватернионы, r_1, r_2 — заданные неотрицательные действительные числа. По ним мы хотим подобрать $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ так, чтобы условие теоремы выполнялось. Выпишем все условия, которые необходимо наложить на a, b, c, d:

1) $\|a\|^2 + \|c\|^2 = 1$, $\|b\|^2 + \|d\|^2 = 1$;
2) $\bar{a}b + \bar{c}d = 0$;
3) $\bar{a}r_1b + \bar{c} \cdot \bar{q}b + \bar{a}qd + \bar{c}r_2d \in \mathbb{C}$;
4) $\bar{a}t_1b + \bar{c} \cdot \bar{p}b + \bar{a}pd + \bar{c}t_2d \in \mathbb{C}$.

Первые два условия системы соответствуют условию унитарности матрицы U. Последующие два — тому, что на побочной диагонали у каждой из матриц A и B в новом базисе будут комплексные числа.

Первое условие данной системы уравнений можно отбросить. Действительно, пусть нашлись a, b, c, d, которые удовлетворяют системе 2)—4). Тогда

$$a' = \frac{a}{\sqrt{\|a\|^2 + \|c\|^2}}, \quad b' = \frac{b}{\sqrt{\|b\|^2 + \|d\|^2}},$$
$$c' = \frac{c}{\sqrt{\|a\|^2 + \|c\|^2}}, \quad d' = \frac{d}{\sqrt{\|b\|^2 + \|d\|^2}}$$

будут решениями системы 1)—4). Поэтому будем искать решение системы 2)—4), а затем пронормируем его соответствующими константами.

Запишем все кватернионы в «комплексном» виде:

$$a = a_1 + a_2j, \quad b = b_1 + b_2j, \quad c = c_1 + c_2j, \quad d = d_1 + d_2j,$$
$$p = p_1 + p_2j, \quad q = q_1 + q_2j.$$

Тогда система уравнений 2)—4) сведётся к системе уравнений с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} &(\bar{a}_1 - a_2j)(b_1 + b_2j) + (\bar{c}_1 - c_2j)(d_1 + d_2j) = 0, \\ &r_1(\bar{a}_1 - a_2j)(b_1 + b_2j) + (\bar{c}_1 - c_2j)(\bar{q}_1 - q_2j)(b_1 + b_2j) + \\ &\quad + (\bar{a}_1 - a_2j)(q_1 + q_2j)(d_1 + d_2j) + r_2(\bar{c}_1 - c_2j)(d_1 + d_2j) \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

$$t_1(\bar{a}_1 - a_2j)(b_1 + b_2j) + (\bar{c}_1 - c_2j)(\bar{p}_1 - p_2j)(b_1 + b_2j) +$$
$$+ (\bar{a}_1 - a_2j)(p_1 + p_2j)(d_1 + d_2j) + t_2(\bar{c}_1 - c_2j)(d_1 + d_2j) \in \mathbb{C},$$

которая в свою очередь эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_1b_1 + a_2\bar{b}_2 + \bar{c}_1d_1 + c_2\bar{d}_2 = 0,\\
&\bar{a}_1b_2 - a_2\bar{b}_1 + \bar{c}_1d_2 - c_2\bar{d}_1 = 0,\\
&\bar{a}_1r_1b_2 - a_2r_1\bar{b}_1 + \bar{c}_1 \cdot \bar{q}_1b_2 - \bar{c}_1q_2\bar{b}_1 - c_2q_1\bar{b}_1 - c_2\bar{q}_2b_2 +\\
&\quad + \bar{a}_1q_1d_2 + \bar{a}_1q_2\bar{d}_1 - a_2\bar{q}_1 \cdot \bar{d}_1 + a_2\bar{q}_2d_2 + \bar{c}_1r_2d_2 - c_2r_2\bar{d}_1 = 0,\\
&\bar{a}_1t_1b_2 - a_2t_1\bar{b}_1 + \bar{c}_1 \cdot \bar{p}_1b_2 - \bar{c}_1p_2\bar{b}_1 - c_2p_1\bar{b}_1 - c_2\bar{p}_2b_2 +\\
&\quad + \bar{a}_1p_1d_2 + \bar{a}_1p_2\bar{d}_1 - a_2\bar{p}_1 \cdot \bar{d}_1 + a_2\bar{p}_2d_2 + \bar{c}_1t_2d_2 - c_2t_2\bar{d}_1 = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим эту систему уравнений как систему линейных однородных уравнений относительно $\bar{a}_1$, a_2, $\bar{c}_1$, c_2. Теперь мы находимся в поле комплексных чисел, и условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при переменных, относительно которых рассматривается система, т. е. если существуют такие b_1, b_2, d_1, d_2, что

$$D = \det\begin{vmatrix} b_1 & \bar{b}_2 & d_1 & \bar{d}_2 \\ b_2 & -\bar{b}_1 & d_2 & -\bar{d}_1 \\ r_1b_2 + q_1d_2 + q_2\bar{d}_1 & -r_1\bar{b}_1 - \bar{q}_1\bar{d}_1 + \bar{q}_2d_2 & \bar{q}_1b_2 - q_2\bar{b}_1 + r_2d_2 & -q_1\bar{b}_1 - \bar{q}_2b_2 - r_2\bar{d}_1 \\ t_1b_2 + p_1d_2 + p_2\bar{d}_1 & -t_1\bar{b}_1 - \bar{p}_1\bar{d}_1 + \bar{p}_2d_2 & \bar{p}_1b_2 - p_2\bar{b}_1 + t_2d_2 & -p_1\bar{b}_1 - \bar{p}_2b_2 - t_2\bar{d}_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то существует решение данной системы относительно $\bar{a}_1$, a_2, $\bar{c}_1$, c_2, а следовательно, существует и требуемая унитарная матрица U.

Упростим уравнение допущениями. Положим $b_1 = d_1 = 0$, $b_2 = 1$. При таких значениях неизвестных получаем следующее полиномиальное уравнение на d_2:

$$D = \det\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \bar{d}_2 \\ 1 & 0 & d_2 & 0 \\ r_1 + q_1d_2 & \bar{q}_2d_2 & \bar{q}_1 + r_2d_2 & -\bar{q}_2 \\ t_1 + p_1d_2 & \bar{p}_2d_2 & \bar{p}_1 + t_2d_2 & -\bar{p}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Расписываем его подробнее. Получаем

$$D = -\det\begin{vmatrix} 1 & d_2 & 0 \\ r_1 + q_1d_2 & \bar{q}_1 + r_2d_2 & -\bar{q}_2 \\ t_1 + p_1d_2 & \bar{p}_1 + t_2d_2 & -\bar{p}_2 \end{vmatrix} - \bar{d}_2 \cdot \det\begin{vmatrix} 1 & 0 & d_2 \\ r_1 + q_1d_2 & \bar{q}_2d_2 & \bar{q}_1 + r_2d_2 \\ t_1 + p_1d_2 & \bar{p}_2d_2 & \bar{p}_1 + t_2d_2 \end{vmatrix} =$$
$$= -[D_1 + \bar{d}_2D_2] = 0,$$
$$D_1 = -\bar{p}_2 \cdot \bar{q}_1 - \bar{p}_2r_2d_2 - \bar{q}_2t_1d_2 - \bar{q}_2p_1{d_2}^2 + \bar{p}_2r_1d_2 + \bar{p}_2q_1{d_2}^2 + \bar{q}_2 \cdot \bar{p}_1 + \bar{q}_2t_2d_2,$$
$$D_2 = \bar{q}_2 \cdot \bar{p}_1d_2 + \bar{q}_2t_2{d_2}^2 + \bar{p}_2r_1{d_2}^2 + \bar{p}_2q_1{d_2}^3 - \bar{q}_2t_1{d_2}^2 - \bar{q}_2p_1{d_2}^3 -$$
$$- \bar{p}_2 \cdot \bar{q}_1d_2 - \bar{p}_2r_2{d_2}^2.$$

Заметим, что $d_2D_1 = D_2$, следовательно, $D = -[(1+\|d_2\|^2)D_1] = 0$ тогда и только тогда, когда $D_1 = 0$, но уравнение $D = 0$ является квадратным уравнением относительно d_2 в поле комплексных чисел и, как известно, всегда имеет хотя бы одно решение. Таким образом, мы предъявили b_1, b_2, d_1, d_2.

Проверим теперь законность перехода от системы 1)—4) к системе 2)—4). Нужно показать, что в двух парах кватернионов a, c и b, d числа не обращаются в 0 одновременно. Из самого построения следует, что $b = j$, поэтому $\sqrt{\|b\|^2 + \|d\|^2} \neq 0$. Возможность деления на $\sqrt{\|a\|^2 + \|c\|^2}$ в свою очередь следует из самого доказательства леммы, ведь при доказательстве как раз и ищется нетривиальное решение системы относительно $\bar{a}_1$, a_2, $\bar{c}_1$, c_2, что равносильно тому, что a, c одновременно не могут быть равны 0. На этом и заканчивается доказательство. □

Пример. Проиллюстрируем на примере доказательство предыдущей теоремы. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-j \\ 1+j & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1+k \\ 1-k & 4 \end{pmatrix}.$$
В обозначениях предыдущей теоремы имеем
$$r_1 = 1, \quad r_2 = 3, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 4, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = i.$$
Следовательно, $D_1 = (i-1)[1 + 2d_2 - {d_2}^2]$. Корнем уравнения $D_1 = 0$ является $d_2 = 1 + \sqrt{2}$, т. е. мы получаем, что $b = j$, $d = (1+\sqrt{2})j$. Теперь решим систему уравнений на a и c. Матрица системы линейных уравнений будет иметь вид
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} & 4+3\sqrt{2} & 1 \\ 3+\sqrt{2} & -i-\sqrt{2}i & 5+4\sqrt{2} & i \end{pmatrix}.$$
Приводим матрицу D с помощью элементарных преобразований к виду
$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Заключаем, что решением системы будет, например, $a_1 = -1 - \sqrt{2}$, $a_2 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, следовательно, $a = -1 - \sqrt{2}$, $c = 1$. В итоге получаем матрицу
$$U' = \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & j \\ 1 & (1+\sqrt{2})j \end{pmatrix}.$$
Пронормируем её соответствующими константами. В данном случае обе константы оказываются равными $M = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1}$. Получаем окончательный результат для самой унитарной матрицы U:
$$U = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{2} & j \\ 1 & (1+\sqrt{2})j \end{pmatrix}.$$

Проверим, что унитарная матрица U искомая:

$$U^*AU = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}), \quad U^*BU = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} & i \\ -i & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}).$$

Таким образом, показано, что матрица U унитарным подобием переводит кватернионные эрмитовы (неотрицательно-определённые) матрицы A, B в комплексные эрмитовы (неотрицательно-определённые).

Теорема 2.21. *Гипотеза 2 справедлива для любых двух кватернионных неотрицательно-определённых матриц* $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$.

Доказательство. Достаточно доказать для любых двух кватернионных неотрицательно-определённых матриц $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$ и любых наборов неотрицательных целых чисел α_i, β_j неравенство

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A^{\alpha_1}B^{\beta_1}\ldots A^{\alpha_n}B^{\beta_n})] \geqslant 0.$$

Действительно, $\mathrm{tr}\big(S_{m,k}(A,B)\big) \in \mathbb{R}$ и вклад в общую сумму вносят только действительные части следов слов. Любое слово от A, B, принадлежащее $S_{m,k}(A,B)$, можно записать в следующем виде:

$$A^{\alpha_1}B^{\beta_1}\ldots A^{\alpha_n}B^{\beta_n},$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = m-k, \quad \sum_{i=1}^{n}\beta_i = k, \quad \alpha_2,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1} > 0, \quad \alpha_1,\beta_n \geqslant 0.$$

По теореме 2.20 существует такая унитарная матрица $U \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$, что U^*AU, $U^*BU \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. С помощью матрицы U унитарным преобразованием переведём обе матрицы в комплексные. Получим

$$A^{\alpha_1}B^{\beta_1}\ldots A^{\alpha_n}B^{\beta_n} = (U^*A'^{\alpha_1}U)(U^*B'^{\beta_1}U)\ldots(U^*A'^{\alpha_n}U)(U^*B'^{\beta_n}U) = \\ = U^*[A'^{\alpha_1}B'^{\beta_1}\ldots A'^{\alpha_n}B'^{\beta_n}]U.$$

При этом A', B' уже являются комплексными неотрицательно-определёнными матрицами,

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A^{\alpha_1}B^{\beta_1}\ldots A^{\alpha_n}B^{\beta_n})] = \\ = \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(U^*[A'^{\alpha_1}B'^{\beta_1}\ldots A'^{\alpha_n}B'^{\beta_n}]U)] = \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(U^*QU)],$$

где матрица Q, согласно утверждению 2.17, есть комплексная матрица с двумя вещественными неотрицательными собственными значениями. Согласно утверждению 2.11, замечанию 2.12 и утверждению 2.13 верна следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(U^*QU)] = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\chi_{(U^*QU)}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\chi_{(U^*)}\chi_Q\chi_{(U)}) = \\ = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big((\chi_U)(\chi_U)^*(\chi_Q)\big) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\chi_Q) = \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(Q)] = \mathrm{tr}(Q) \geqslant 0.$$

Таким образом, желаемый результат получен, доказательство теоремы завершено. □

Докажем ещё один факт.

Теорема 2.22. *Гипотеза* 1 *справедлива тогда и только тогда, когда справедлива гипотеза* 2.

Доказательство. Если BMV-гипотеза верна над кватернионами (гипотеза 2), то она, очевидно, верна и над комплексными числами (гипотеза 1). Докажем теорему в обратную сторону. Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ — неотрицательно-определённые кватернионные матрицы,

$$S := \{(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n) \mid A^{\alpha_1} B^{\beta_1} \ldots B^{\beta_n} \in S_{m,k}(A, B)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\bigl(S_{m,k}(A, B)\bigr) &= \sum_S \mathrm{tr}(A^{\alpha_1} B^{\beta_1} A^{\alpha_2} \ldots A^{\alpha_n} B^{\beta_n}) = \\
&= \mathrm{Re}\Bigl[\sum_S \mathrm{tr}(A^{\alpha_1} B^{\beta_1} A^{\alpha_2} \ldots A^{\alpha_n} B^{\beta_n})\Bigr] = \\
&= \sum_S \mathrm{Re}[\mathrm{tr}(A^{\alpha_1} B^{\beta_1} A^{\alpha_2} \ldots A^{\alpha_n} B^{\beta_n})] = \frac{1}{2} \sum_S \mathrm{tr}(\chi_{(A^{\alpha_1} B^{\beta_1} A^{\alpha_2} \ldots A^{\alpha_n} B^{\beta_n})}) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_S \mathrm{tr}({\chi_A}^{\alpha_1} {\chi_B}^{\beta_1} {\chi_A}^{\alpha_2} \ldots {\chi_A}^{\alpha_n} {\chi_B}^{\beta_n}) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A, \chi_B)\bigr).
\end{aligned}$$

Первый из переходов означает, что $S_{m,k}(A, B)$ есть сумма всех слов длины m с k вхождениями B. Второй переход обусловлен тем, что $\mathrm{tr}\bigl(S_{m,k}(A, B)\bigr)$ — действительное число, третий — тем, что операция Re линейна. Дальнейшие переходы верны в силу отмечавшихся в утверждении 2.11, замечании 2.12 и утверждении 2.13 свойств матриц χ_A и χ_B. Таким образом, если BMV-гипотеза верна для комплексных матриц, то она верна, в частности, и для матриц χ_A, χ_B, поэтому $\mathrm{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A, \chi_B)\bigr) \geqslant 0$. Как можно заметить из приведённого равенства, это неравенство равносильно неравенству $\mathrm{tr}\bigl(S_{m,k}(A, B)\bigr) \geqslant 0$. Матрицы A, B брались произвольными, поэтому данный результат доказывает то, что гипотеза 2 следует из гипотезы 1. □

Следствие 2.23. *Гипотеза* 1 *верна для комплексных неотрицательно-определеных матриц* A, B *вида*

$$\begin{pmatrix} r_1 & q_1 & 0 & q_2 \\ \bar{q}_1 & r_2 & -q_2 & 0 \\ 0 & -\bar{q}_2 & r_1 & \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 & 0 & q_1 & r_2 \end{pmatrix},$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$, $r_1 r_2 \geqslant \|q_1\|^2 + \|q_2\|^2$.

Доказательство. Прообразом каждой подобного вида матрицы при отображении $A \to \chi_A$ из кватернионных неотрицательно-определённых матриц в комплексные неотрицательно-определённые матрицы будет являться кватернионная неотрицательно-определённая матрица размера 2×2. Имеем, что

$$\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A,\chi_B)\bigr).$$

BMV-гипотеза над кватернионами справедлива для матриц размера 2×2, т. е.

$$\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr) \geqslant 0$$

для любых матриц $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$. Поэтому

$$\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A,\chi_B)\bigr) = 2\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr) \geqslant 0,$$

что и доказывает гипотезу 1 для матриц такого вида. □

Следствие 2.24. *Гипотеза 2 справедлива для любых двух кватернионных неотрицательно-определённых матриц A, B при всех $m \leqslant 13$ и любом n.*

Доказательство. В [9] доказан аналогичный результат для гипотезы 1. Используя его и тождество

$$\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A,\chi_B)\bigr) = 2\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr),$$

получаем, что для указанных значений m

$$\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A,\chi_B)\bigr) \geqslant 0.$$

Поэтому $\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr) \geqslant 0$ ровно для тех же значений m, для которых доказана BMV-гипотеза для комплексных неотрицательно-определённых матриц. □

Следствие 2.25. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ — эрмитовы неотрицательно-определённые матрицы. Тогда коэффициенты при t^0, t^1, t^2, t^3, t^4 (t^m, t^{m-1}, t^{m-2}, t^{m-3}, t^{m-4}) в полиноме $f(t) = \operatorname{tr}[(A+Bt)^m]$ неотрицательны.*

Доказательство. В [2] доказан аналогичный результат для гипотезы 1. Используя его и тождество

$$\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A,\chi_B)\bigr) = 2\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr),$$

получаем, что для указанных значений k, где k — показатель степени при переменной t, выполнено

$$\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(\chi_A,\chi_B)\bigr) \geqslant 0.$$

Поэтому $\operatorname{tr}\bigl(S_{m,k}(A,B)\bigr) \geqslant 0$ ровно для тех значений k, для которых доказана BMV-гипотеза для комплексных неотрицательно-определённых матриц. □

3. Октонионный случай

3.1. Октонионы и матрицы над ними

Пространство октонионов — это восьмимерное пространство $\mathbb{O}$ над $\mathbb{R}$ с базисными векторами 1, i, j, k, l, il, jl, kl. Октонион — это элемент данного пространства, т. е. вектор вида

$$q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 l + q_5 il + q_6 jl + q_7 kl,$$

где $q_i \in \mathbb{R}$. Пространство $\mathbb{O}$ наделяется операцией покомпонентного сложения векторов и их умножения на элементы $\mathbb{R}$. Операция умножения элементов векторного пространства $\mathbb{O}$ друг на друга определяется таблицей умножения базисных векторов

$\times$	1	i	j	k	l	il	jl	kl
1	1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	i	-1	k	$-j$	il	$-l$	$-kl$	jl
j	j	$-k$	-1	i	jl	kl	$-l$	$-il$
k	k	j	$-i$	-1	kl	$-jl$	il	$-l$
l	l	$-il$	$-jl$	$-kl$	-1	i	j	k
il	il	l	$-kl$	jl	$-i$	-1	$-k$	j
jl	jl	kl	l	$-il$	$-j$	k	-1	$-i$
kl	kl	$-jl$	il	l	$-k$	$-j$	i	-1

и требованием левой и правой дистрибутивности.

Определение 3.1. Чисто мнимым октонионом назовём октонион с нулевой компонентой q_0.

Аналогично комплексным числам вводится понятие сопряжённого элемента и для каждого октониона определяется его норма и обратный элемент.

Определение 3.2. Сопряжённым к октониону

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 l + q_5 il + q_6 jl + q_7 kl \in \mathbb{O}$$

называется октонион

$$\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k - q_4 l - q_5 il - q_6 jl - q_7 kl.$$

Определение 3.3. Нормой октониона

$$q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 l + q_5 il + q_6 jl + q_7 kl \in \mathbb{O}$$

называется число

$$\|q\| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{\sum_{i=0}^{i=7} q_i^2}.$$

Определение 3.4. Для произвольного ненулевого октониона q определён его обратный элемент

$$q^{-1} := \frac{1}{\|q\|^2}\bar{q}.$$

Для него верны соотношения $q^{-1}q = qq^{-1} = 1$.

Отметим сохраняющиеся при данных определениях свойства октонионов.

Утверждение 3.5 [11, с. 183, теорема 4.4]. *Пусть $p, q \in \mathbb{O}$. Тогда*

$$\|pq\| = \|p\|\,\|q\|, \quad \overline{(pq)} = \bar{q}\bar{p}.$$

Аналогично комплексным и кватернионным матрицам можно рассматривать все «привычные» операции с октонионными матрицами, в частности транспонирование, сопряжение элементов матрицы, операцию инволюции *, а следовательно, можно определить и понятие эрмитовой матрицы.

Определение 3.6. Октонионной матрица A называется эрмитовой, если $A = A^*$.

Следствие 3.7. *Пусть $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{O})$, $B \in \mathrm{M}_{n\times k}(\mathbb{O})$ — октонионные матрицы. Тогда $(AB)^* = B^*A^*$.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Тогда, если $C = (c_{ij}) := (AB)^*$, $D = (d_{ij}) := B^*A^*$, то, с одной стороны,

$$c_{ij} = \overline{\sum_{t=1}^{t=n} (a_{jk})(b_{ki})},$$

а с другой —

$$d_{ij} = \sum_{t=1}^{t=n} \overline{(b_{ki})} \cdot \overline{(a_{jk})}.$$

Из утверждения 3.5 и линейности операции сопряжения следует равенство матриц C и D. Таким образом, следствие доказано. □

Определение 3.8. Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ называется неотрицательно-определённой, если существует такая матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$, что $A = C^*C$.

Замечание 3.9. Из определения 3.8 и из следствия 3.7 вытекает необходимость условия эрмитовости для неотрицательно-определённой октонионной матрицы.

Замечание 3.10. Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ — неотрицательно-определённая матрица. Тогда $\mathrm{tr}(A) \geqslant 0$.

Доказательство. Если $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ — неотрицательно-определённая матрица, то существует матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$, такая что $A = C^*C$. Пусть $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, где c_i — октонионные векторы. Тогда

$$A=\begin{pmatrix}c_1^*\\ c_2^*\\ \vdots\\ c_n^*\end{pmatrix}(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\begin{pmatrix}\|c_1\|^2 & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \|c_2\|^2 & \ldots & \ldots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \|c_n\|^2\end{pmatrix}$$

и, соответственно,

$$\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^{i=n}\|c_i\|^2\geqslant 0. \qquad \square$$

Для случая поля комплексных чисел определение неотрицательно-определённой (положительно-определённой) матрицы было эквивалентно неотрицательности (положительности) выражения x^*Ax для любого вектор-столбца x. Здесь подобного определения ввести нельзя, так как x^*Ax может оказаться недействительным числом. В самом деле, октонионы неассоциативны, а поэтому в общем случае $(x^*A)x \neq x^*(Ax)$. Также из-за замены привычного определения на новое мы уже не можем разделять положительно-определённые и неотрицательно-определённые матрицы. В случае комплексных матриц этим «разделителем» являлась невырожденность матрицы C.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1-il\\ 1+il & 3\end{pmatrix}.$$

Как будет видно позже, она будет неотрицательно-определённой в смысле данного нами определения. Посчитаем значение x^*Ax на векторе $(1-i,-jl)$. Остановимся на определении $x^*Ax := x^*(Ax)$. Тогда

$$\begin{pmatrix}1+i & jl\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1-il\\ 1+il & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i\\ -jl\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i & jl\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-i-jl-k\\ 1-i-l+il-3jl\end{pmatrix}=$$
$$=1-i-jl-k+i+1+kl+j+jl-kl+j+k+3=5+2j.$$

Таким образом, видим, что аналогичное комплексному (и даже кватернионному) случаю определение для неотрицательно-определённых матриц над октонионами дать нельзя.

Замечание 3.11. Для октонионов не существует изоморфизмов в матричные алгебры над кватернионами, комплексными или действительными числами. Этот факт обосновывается неассоциативностью октонионов и ассоциативностью алгебр кватеринонных, комплексных и действительных матриц.

Замечание 3.12. Теряет смысл понятие сопряжения матриц. Вообще говоря, $(C^*A)C \neq C^*(AC)$ для октонионных матриц и каждая из матриц $(C^*A)C$ и $C^*(AC)$ сама по себе может даже не быть эрмитовой, а следовательно, и неотрицательно-определённой. К понятию сопряжения мы ещё вернемся.

3.2. Различные тождества над октонионами

Этот раздел целиком посвящён различного рода тождествам для октонионов. В нём будут приведены доказательства известных тождеств.

Определение 3.13. Ассоциатором октонионов x, y, z называется выражение

$$[x, y, z] := (xy)z - x(yz).$$

Утверждение 3.14 [11, с. 179]. *Алгебра октонионов альтернативна. Другими словами, для любых двух элементов выполнены соотношения* $x(xy) = (xx)y$ *и* $(yx)x = y(xx)$.

Из предыдущего утверждения очевидным образом следует, что для любых октонионов x, y справедливо $[x, y, y] = [x, x, y] = 0$. Также заметим, что ассоциатор — полилинейная функция своих аргументов.

Утверждение 3.15. *Ассоциатор является кососимметрической функцией своих аргументов.*

Доказательство. Достаточно доказать тождества $[x, y, z] = -[y, x, z]$ и $[x, y, z] = -[x, z, y]$. Покажем, что из них следует и третье тождество кососимметричности:

$$[x, y, z] = -[x, z, y] = [z, x, y] = -[z, y, x].$$

В первом и третьем переходе мы пользуемся вторым тождеством, во втором — первым. Теперь докажем два заявленные тождества. В силу полилинейности

$$0 = [x + z, x + z, y] = [x, x, y] + [z, z, y] + [x, z, y] + [z, x, y] = [x, z, y] + [z, x, y].$$

Второе свойство доказывается аналогично. □

Следствие 3.16. $(xy)x = x(yx)$ *для любых октонионов* x, y.

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из кососимметричности ассоциатора. □

Утверждение 3.17. *Для произвольных октонионов* x *и* y *выполнены следующие тождества*:

1) $(xy)\bar{x} = x(y\bar{x})$;
2) $\bar{x}(xy) = \|x\|^2 y$;
3) $(yx)\bar{x} = \|x\|^2 y$.

Доказательство. Докажем, например, первое тождество. Остальные пункты утверждения доказываются аналогично с использованием трёх тождеств альтернативности. Пусть $x = x_0 + x_1$, где x_0 — вещественное число, x_1 — чистый октонион. Тогда

$$\begin{aligned}(xy)\bar{x} &= [(x_0 + x_1)y](x_0 - x_1) = x_0^2 y - x_0(yx_1) + x_0(x_1 y) - (x_1 y)x_1 = \\ &= x_0^2 y - x_0(yx_1) + x_0(x_1 y) - x_1(yx_1) = (x_0 + x_1)[y(x_0 - x_1)] = x(y\bar{x}).\end{aligned}$$ □

Утверждение 3.18 [11, с. 183]. *Для произвольных октонионов x, y, z выполнены тождества Муфанг*

1) $z(xyx) = [(zx)y]x$;
2) $(xyx)z = x[y(xz)]$;
3) $x(yz)x = (xy)(yz)$.

Утверждение 3.19. *Для любых $a, b, c \in \mathbb{O}$ верно равенство*

$$\mathrm{Re}[a(bc)] = \mathrm{Re}[(ab)c].$$

Доказательство. Для доказательства данного факта нужно показать, что если $e_i(e_je_k) = \pm 1$ для некоторых индексов i, j, k, то для этих же индексов $(e_ie_j)e_k = \pm 1$. Действительно,

$$a(bc) = \sum_{i,j,k} a_ib_jc_k[e_i(e_je_k)]$$

и если $e_i(e_je_k) \neq \pm 1$, то $\mathrm{Re}(a_ib_jc_k[e_i(e_je_k)]) = 0$. Если $e_i(e_je_k) = \pm 1$ для некоторых индексов i, j, k, то, домножая данное тождество на $-e_i$ слева и пользуясь кососимметричность умножения и утверждением 3.17, получаем, что $e_ke_j = \pm e_i$. Подставим данное соотношение в доказываемое тождество $(e_ie_j)e_k = \pm 1$. Пользуясь утверждением 3.17, получим

$$(e_ie_j)e_k = \pm\big((e_ke_j)e_j\big)e_k = \pm\big(e_k(e_je_j)\big)e_k = \pm 1. \qquad \square$$

3.3. Альтернативные алгебры

Теорема 3.20 (Э. Артин). *Подалгебра, образованная двумя элементами альтернативной алгебры, ассоциативна.*

Следствие 3.21. *Алгебра, порождённая любыми двумя октонионами, ассоциативна.*

Доказательство. Как мы знаем, алгебра октонионов альтернативна, и поэтому к ней применима теорема Артина. $\square$

Отсюда очевидным образом следует, что корректно определена степень любого октониона и запись любого слова от двух октонионов корректна без расстановки в нём скобок.

3.4. Октонионные матрицы размера 2×2

Любая октонионная эрмитова матрица размера 2×2 представима следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix},$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{O}$. Но, очевидно, не любая матрица подобного вида будет неотрицательно-определённой. Два её диагональных элемента обязаны быть неотрицательными вещественными числами.

Далее введём для эрмитовых октонионных матриц размера 2×2 понятие определителя матрицы.

Определение 3.22. Определителем октонионной эрмитовой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}$$

назовём число

$$\det(A) := r_1 r_2 - \|q\|^2.$$

Определение 3.23. Октонионную матрицу $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ назовём обратимой, если существует такая матрица $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$, что $BA = AB = E$, где $E = E_{11} + \ldots + E_{nn}$.

Замечание 3.24. Если выполнено равенство $pq = r$, где $p, q \in \mathbb{O}$, $r \in \mathbb{R}$, то $p = \alpha\bar{q}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Домножим обе части данного тождества $pq = r$ справа на q^{-1}. Пользуясь утверждением 3.17, получаем, что

$$(pq)q^{-1} = p(qq^{-1}) = p = rq^{-1} = \frac{r}{\|q\|^2}\bar{q} = \alpha\bar{q},$$

где $\alpha = r/\|q\|^2 \in \mathbb{R}$. □

Утверждение 3.25. *Любая эрмитова матрица $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$, такая что $\det(A) \neq 0$, обратима, и обратная матрица для неё единственна. Верно и обратное утверждение, а именно если эрмитова матрица $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ обратима, то $\det(A) \neq 0$.*

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{O}$. Предъявим обратную для A матрицу B. Пусть

$$B = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} r_2 & -q \\ -\bar{q} & r_1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственным перемножением убеждаемся, что $BA = AB = E$, т. е. матрица B действительно является обратной к матрице A.

Теперь докажем единственность обратной матрицы. Пусть существуют две матрицы B_1 и B_2, такие что $B_1A = AB_1 = E$, $B_2A = AB_2 = E$ и $B_1 \neq B_2$. Исходя из данных соотношений получаем, что $(B_1 - B_2)A = 0$, т. е. матрица $B_1 - B_2 \neq 0$ аннулирует данную матрицу A. Вычислим $B_1 - B_2$ явно. Если $r_1, r_2, \det(A) \neq 0$, то

$$(B_1 - B_2)A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar_1 + b\bar{q} & aq + br_2 \\ cr_1 + d\bar{q} & cq + dr_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{r_1} b\bar{q}, \\ b = -\dfrac{1}{r_2} aq, \\ c = -\dfrac{1}{r_1} d\bar{q}, \\ d = -\dfrac{1}{r_2} cq. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{r_1 r_2}(aq)\bar{q} = \dfrac{1}{r_1 r_2} a\|q\|^2, \\ c = \dfrac{1}{r_1 r_2}(cq)\bar{q} = \dfrac{1}{r_1 r_2} c\|q\|^2. \end{cases}$$

Поэтому $a = 0$, следовательно, $b = 0$, и $c = 0$, следовательно, $d = 0$. Таким образом, $B_1 = B_2$.

Рассмотрим случай, когда $r_1 = 0$, $\det(A) \neq 0$ (случай, когда $r_2 = 0$, рассматривается аналогично). Пусть $r_1 = 0$. Тогда $b\bar{q} = 0$, $d\bar{q} = 0$. По замечанию 3.24 либо $q = 0$, либо $b = 0$ и $d = 0$. Если $q = 0$, то получаем, что $\det(A) = 0$, что по предположению невозможно. Если же $b = 0$ и $d = 0$, то $aq = cq = 0$, и по тому же замечанию 3.24 получаем, что либо $q = 0$, либо $a = 0$ и $c = 0$. Если $q = 0$, то $\det(A) = 0$ — опять противоречие. Таким образом, в любом случае $a = b = c = d = 0$, и в случае, когда $r_1 = 0$, мы доказали единственность обратной матрицы для октонионной эрмитовой матрицы размера 2×2.

Теперь докажем, что если определитель октонионной эрмитовой матрицы размера 2×2 равен 0, то она не может быть обратимой. Предположим противное. Пусть $D_A = 0$ и существует такая матрица B, что $BA = AB = E$, т. е. для некоторых октонионов a, b, c, d верно

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar_1 + b\bar{q} & aq + br_2 \\ cr_1 + d\bar{q} & cq + dr_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, при условии, что $r_1, r_2 \neq 0$ получаем

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_1} b\bar{q}, \\ b = -\dfrac{1}{r_2} aq, \\ c = -\dfrac{1}{r_1} d\bar{q}, \\ d = \dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_2} cq. \end{cases}$$

Тогда

$$a = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2}(aq)\bar{q} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 r_2} a\|q\|^2 = \frac{1}{r_1} + a,$$

т. е. $1/r_1 = 0$, что невозможно.

Если же $r_1 = 0$ и при этом $\det(A) = 0$, то $q = 0$, и следовательно, $ar_1 + b\bar{q} = 0 \neq 1$, т. е. $BA \neq E$ для любой матрицы B. Случай, когда $r_2 = 0$ и $\det(A) = 0$, рассматривается аналогично. Таким образом, все возможные случаи разобраны и утверждение доказано. □

Утверждение 3.26. *Любая октонионная неотрицательно-определённая матрица размера 2×2 имеет неотрицательный определитель.*

Доказательство. Пусть $A = C^*C$ для некоторой матрицы

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A = C^*C = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_3 \\ \bar{c}_2 & \bar{c}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|c_1\|^2 + \|c_3\|^2 & \bar{c}_1 c_2 + \bar{c}_3 c_4 \\ \bar{c}_2 c_1 + \bar{c}_4 c_3 & \|c_2\|^2 + \|c_4\|^2 \end{pmatrix}.$$

Посчитаем определитель матрицы A:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (\|c_1\|^2 + \|c_3\|^2)(\|c_2\|^2 + \|c_4\|^2) - (\bar{c}_1 c_2 + \bar{c}_3 c_4)(\bar{c}_2 c_1 + \bar{c}_4 c_3) = \\
&= \|c_1\|^2\|c_2\|^2 + \|c_1\|^2\|c_4\|^2 + \|c_3\|^2\|c_2\|^2 + \|c_3\|^2\|c_4\|^2 - \\
&- \|c_1\|^2\|c_2\|^2 - \|c_3\|^2\|c_4\|^2 - \bar{c}_3 c_4 \bar{c}_2 c_1 - \bar{c}_1 c_2 \bar{c}_4 c_3 = \\
&= \|c_1\|^2\|c_4\|^2 + \|c_3\|^2\|c_2\|^2 - 2\operatorname{Re}[\bar{c}_1 c_2 \bar{c}_4 c_3] \geqslant \\
&\geqslant 2\sqrt{\|c_1\|^2\|c_4\|^2\|c_3\|^2\|c_2\|^2} - 2\operatorname{Re}[\bar{c}_1 c_2 \bar{c}_4 c_3] = \\
&= 2\big[(\|(\bar{c}_1 c_2)(\bar{c}_4 c_3)\|) - \operatorname{Re}[(\bar{c}_1 c_2)(\bar{c}_4 c_3)]\big] \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Последний переход обоснован, поскольку норма числа, очевидно, больше либо равна его действительной части. □

Естественно, по аналогии с критерием Сильвестра для комплексных матриц размера 2×2 хотелось бы доказать и обратное утверждение.

Утверждение 3.27. *Пусть $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — эрмитова матрица. Тогда если хотя бы одно число на диагонали этой матрицы неотрицательно и $\det(A) \geqslant 0$, то A — неотрицательно-определённая матрица.*

Доказательство. Для начала покажем, что в действительности оба диагональных числа матрицы A в условиях данного утверждения неотрицательны. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} -$$

исходная матрица. Без ограничения общности будем считать, что $r_1 \geqslant 0$. Тогда

$$r_2 \geqslant \frac{\|q\|^2}{r_1} \geqslant 0.$$

Для доказательства исходного утверждения предъявим матрицу C, для которой $C^*C = A$. Тогда матрица A по определению будет являться неотрицательно-определённой.

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство $C^*C = A$ можно переписать в виде системы из трёх уравнений

$$\begin{cases} \|c_1\|^2 + \|c_3\|^2 = r_1, \\ \|c_2\|^2 + \|c_4\|^2 = r_2, \\ \bar{c}_1 c_2 + \bar{c}_3 c_4 = q. \end{cases}$$

Сразу упростим систему допущениями: пусть

$$c_1 = R_1 c_3, \quad c_2 = R_2 c_4, \quad c_4 = \frac{1}{2}\sqrt{r_2},$$

где $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$. Получим новую систему

$$\begin{cases} (R_1^2 + 1)\|c_3\|^2 = r_1, \\ c_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{r_2}, \\ c_4 = \dfrac{1}{2}\sqrt{r_2}, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{3r_2} R_1 \bar{c}_3 = q. \end{cases}$$

Из этой системы находим значения c_3 и R_1:

$$\begin{cases} (R_1^2 + 1)\|c_3\|^2 = r_1, \\ c_3 = \dfrac{2q}{\sqrt{r_2}(\sqrt{3}R_1 + 1)}. \end{cases}$$

В итоге, решая данную систему, получаем, что

$$(R_1^2 + 1)\left\| \frac{2q}{\sqrt{r_2}(\sqrt{3}R_1 + 1)} \right\|^2 = r_1,$$

следовательно,

$$r_1 r_2 = \frac{4R_1^2 + 4}{3R_1^2 + 2\sqrt{3}R_1 + 1}\|q\|^2,$$

поэтому

$$\frac{r_1 r_2}{\|q\|^2} = 1 + \frac{(R_1 - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}R_1 + 1)^2}.$$

Тогда

$$\frac{R_1 - \sqrt{3}}{R_1 + 1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3(r_1 r_2 - \|q\|^2)}}{\|q\|},$$

следовательно,

$$R_1 = \frac{\sqrt{3}\|q\| + \sqrt{r_1 r_2 - \|q\|^2}}{\|q\| - \sqrt{3(r_1 r_2 - \|q\|^2)}},$$

$$c_3 = \frac{\|q\| - \sqrt{3(r_1 r_2 - \|q\|^2)}}{2\|q\|\sqrt{r_2}}\bar{q},$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}\|q\| + \sqrt{r_1 r_2 - \|q\|^2}}{2\|q\|\sqrt{r_2}}\bar{q}.$$

Таким образом, мы подобрали такую матрицу C, что $C^*C = A$, а следовательно, матрица A по определению является неотрицательно-определённой. □

Замечание 3.28. Заметим, что в приведённых выкладках мы явно используем неотрицательность определителя матрицы A. В выражениях для элементов матрицы C участвует $\sqrt{\det(A)}$.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1+i+jl \\ 1-i-jl & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдём для данной матрицы такую матрицу C, что $A = C^*C$. Согласно предыдущему утверждению это возможно сделать, так как $\det(A) = 8 - 3 = 5 \geqslant 0$ и её диагональные элементы неотрицательны.

По явным формулам из предыдущего утверждения получаем, что

$$c_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad c_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}(1-i-jl), \quad c_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(1-i-jl),$$

следовательно,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}(1-i-jl) & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(1-i-jl) & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C^*C = \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}(1+i+jl) & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(1+i+jl) \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}(1-i-jl) & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(1-i-jl) & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9+5+6\sqrt{5}}{24}\cdot 3 + \frac{6-2\sqrt{5}}{8}\cdot 3 & \frac{3+\sqrt{5}}{4}(1+i+jl) + \frac{1-\sqrt{5}}{4}(1+i+jl) \\ \frac{3+\sqrt{5}}{4}(1-i-jl) + \frac{1-\sqrt{5}}{4}(1-i-jl) & \frac{6}{4} + \frac{2}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1+i+jl \\ 1-i-jl & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Следствие 3.29. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — эрмитовы неотрицательно-определённые матрицы. Тогда* $\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(AB)] \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\operatorname{tr}[AB] = r_1t_1 + r_2t_2 + q\bar{p} + \bar{q}p,$$

поэтому

$$\operatorname{Re}[\operatorname{tr}[AB]] = r_1t_1 + r_2t_2 + \operatorname{Re}(q\bar{p}) + \operatorname{Re}(\bar{q}p) = r_1t_1 + r_2t_2 + \operatorname{Re}(q\bar{p}) + \operatorname{Re}(p\bar{q}) =$$
$$= r_1t_1 + r_2t_2 + 2\operatorname{Re}(q\bar{p}) \geqslant 2\sqrt{r_1r_2t_1t_2} + 2\operatorname{Re}(q\bar{p}) \geqslant 2\|q\|\,\|p\| + 2\operatorname{Re}(q\bar{p}) \geqslant 0.$$

Предпоследний переход верен, так как по условию матрица является неотрицательно-определённой, а следовательно, имеет неотрицательный определитель. Последний переход верен, поскольку норма числа по модулю всегда больше его действительной части. □

Расширим данное нами определение детерминанта.

Определение 3.30. Октонионную матрицу $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ назовём почти эрмитовой, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & k_1q \\ k_2\bar{q} & r_2 \end{pmatrix},$$

где $r_1, r_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{O}$. Тогда её детерминантом назовём число

$$\det(A) := r_1r_2 - k_1k_2\|q\|^2.$$

Замечание 3.31. Очевидно, что эрмитова октонионная матрица является и почти эрмитовой, в этом случае $k_1 = k_2$.

Утверждение 3.32. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — октонионные почти эрмитовы матрицы, и пусть AB является октонионной почти эрмитовой матрицей. Тогда $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.*

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & k_1q \\ k_2\bar{q} & r_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & l_1p \\ l_2\bar{p} & t_2 \end{pmatrix},$$

$r_i, k_i, t_i, l_i \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{O}$. Тогда

$$\det(A) = r_1r_2 - k_1k_2\|q\|^2, \quad \det(B) = t_1t_2 - l_1l_2\|q\|^2,$$
$$AB = \begin{pmatrix} r_1t_1 + k_1l_2q\bar{p} & r_1l_1p + k_1t_2q \\ k_2t_1\bar{q} + r_2l_2\bar{p} & k_2l_1\bar{q}p + r_2t_2 \end{pmatrix}$$

Матрица AB должна быть почти эрмитовой, поэтому её диагональные элементы — действительные числа. Из замечания 3.24 следует, что $p = \alpha q$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. После подстановки данного соотношения в матрицу AB она становится почти эрмитовой. Теперь посчитаем определитель AB:

$$\det(AB) = (r_1t_1 + k_1l_2q\bar{p})(k_2l_1\bar{q}p + r_2t_2) - (r_1l_1p + k_1t_2q)(k_2t_1\bar{q} + r_2l_2\bar{p}) =$$
$$= r_1t_1r_2t_2 + k_1l_2k_2l_1\alpha^2\|q\|^4 + r_1t_1k_2l_1\alpha\|q\|^2 + r_2t_2k_1l_2\alpha\|q\|^2 -$$
$$- k_1t_2k_2t_1\|q\|^2 - r_1l_1r_2l_2\alpha^2\|q\|^2 - k_2t_1r_1l_1\alpha\|q\|^2 - k_1t_2r_2l_2\alpha\|q\|^2 =$$

$$= r_1t_1r_2t_2 + k_1l_2k_2l_1\alpha^2\|q\|^4 - k_1t_2k_2t_1\|q\|^2 - r_1l_1r_2l_2\alpha^2\|q\|^2 =$$
$$= (r_1r_2 - k_1k_2\|q\|^2)(t_1t_2 - l_1l_2\alpha^2\|q\|^2) = \det(A)\det(B). \qquad \square$$

Замечание 3.33. Условие почти эрмитовости произведения матриц необходимо в силу того, что сама функция детерминанта определяется только для почти эрмитовых матриц 2×2.

3.5. Собственные значения октонионных эрмитовых матриц размера 2×2

В этом разделе мы рассмотрим действительные собственные числа и собственные векторы октонионных эрмитовых матриц размера 2×2 и их связь с ранее введёнными понятиями. На самом деле у октонионных матриц размера 2×2 могут быть и недействительные собственные значения, но они не понадобятся для следующих утверждений. О них можно прочесть, например, в [11].

Определение 3.34. Действительным собственным числом эрмитовой матрицы $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ назовём такое $\lambda \in \mathbb{R}$, что существует $x \in \mathbb{O}^2$, для которого верно $Ax = \lambda x$.

Утверждение 3.35. *Действительных собственных чисел эрмитовой матрицы $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ два. Им соответствуют два собственных вектора. При этом $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A)$ и $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$.*

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение $Ax = \lambda x$ переписывается в виде следующей системы октонионных уравнений:

$$\begin{cases} (r_1 - \lambda)a + qb = 0, \\ \bar{q}a + (r_2 - \lambda)b = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение слева на $(r_1 - \lambda)q/\|q\|^2$. Используя утверждение 3.17, получаем следующую равносильную систему:

$$\begin{cases} (r_1 - \lambda)a + qb = 0, \\ (r_1 - \lambda)a + \dfrac{(r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda)}{\|q\|^2}qb = 0. \end{cases}$$

Таким образом, для того чтобы данная система была совместной, необходимо, чтобы выполнялось $(r_1 - \lambda)(r_2 - \lambda) = \|q\|^2$, т. е. $\det(A - \lambda E) = 0$. Получаем квадратное уравнение на λ:

$$\lambda^2 - (r_1 + r_2)\lambda + r_1r_2 - \|q\|^2 = 0.$$

По теореме Виета получаем заявленные тождества $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$ и $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$. При данных λ_1, λ_2 соответствующие собственные векторы будут пропорциональны векторам $\left(1, \bar{q}/\|q\|^2(\lambda_1 - r_1)\right)$, $\left(1, \bar{q}/\|q\|^2(\lambda_2 - r_1)\right)$. □

В заключение вернёмся к проблеме определения неотрицательно-определённых матриц над октонионами.

Утверждение 3.36. *Пусть $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — эрмитова матрица. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *A является неотрицательно-определённой, т. е. существует матрица $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$, такая что $A = C^*C$;*
2) *диагональные элементы матрицы неотрицательны и* $\det(A) \geqslant 0$;
3) $\operatorname{Re}[x^*(Ax)] \geqslant 0$ *для любого $x \in \mathbb{O}^n$;*
4) *оба действительных собственных значения матрицы A неотрицательны.*

Доказательство. Равносильность первых двух пунктов уже установлена нами в утверждениях 3.26 и 3.27. Докажем, что второе и четвёртое определения равносильны. Пусть оба собственных значения матрицы A неотрицательны. Тогда по утверждению 3.35 имеем, что $\det(A) \geqslant 0$ и $\operatorname{tr}(A) \geqslant 0$. Допустим, что один из диагональных элементов матрицы A отрицателен. Тогда получим, что $\det(A) = r_1r_2 - \|q\|^2 \leqslant 0$, что неверно. Докажем равносильность в обратную сторону. Имеем по доказанному в утверждении 3.35, что $\lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 0$ и $\lambda_1\lambda_2 \geqslant 0$, поэтому оба собственных значения матрицы A неотрицательны.

Докажем, что из третьего определения следует второе. Рассмотрим значение $\operatorname{Re}[x^*(Ax)]$ на собственных нормированных векторах матрицы A. Имеем, что

$$0 \leqslant \operatorname{Re}[x^*(Ax)] = \operatorname{Re}[x^*(\lambda_{1,2}x)] = \lambda_{1,2}.$$

Из утверждения 3.35 следует, что тогда $\det(A) \geqslant 0$. Рассмотрим значение выражения $\operatorname{Re}[x^*(Ax)]$ на векторах $x = (1,0)$ и $x = (0,1)$. Это как раз и будут диагональные элементы матрицы A, поэтому они неотрицательны.

Докажем, что из второго определения следует третье. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произвольный вектор $x = (a, b)$. Если $\det(A) \geqslant 0$, то $r_2 \geqslant \|q\|^2/r_1$. Используя данный факт, получаем, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[x^*(Ax)] &= \operatorname{Re}\left[\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right] = \\
&= r_1\|a\|^2 + \operatorname{Re}[\bar{a}(qb)] + \operatorname{Re}[\bar{b}(\bar{q}a)] + r_2\|b\|^2 = \\
&= r_1\|a\|^2 + 2\operatorname{Re}[\bar{a}(qb)] + r_2\|b\|^2 \geqslant \\
&\geqslant r_1\|a\|^2 - 2\|a\|\,\|q\|\,\|b\| + \frac{\|q\|^2}{r_1}\|b\|^2 = \frac{1}{r_1}(r_1\|a\| - \|q\|\,\|b\|)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

□

3.6. Основные теоремы об октонионных эрмитовых матрицах размера 2×2

Главная цель данного раздела — установить, что степень неотрицательно-определённой октонионной матрицы размера 2×2 есть также неотрицательно-определённая октонионная матрица. Ключевым фактом для доказательства данного утверждения будет являться эрмитовость матрицы A^n при условии эрмитовости матрицы A. Мы доказываем эти утверждения только для матриц размера 2×2. Для начала определим понятие степени матрицы A размера 2×2.

Утверждение 3.37. *Алгебра октонионных эрмитовых матриц размера 2×2 альтернативна. Другими словами, для любых эрмитовых матриц $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ справедливы тождества $(AA)B = A(AB)$ и $(AB)B = A(BB)$.*

Доказательство. Проверим данные тождества. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix}.$$
Тогда
$$\begin{aligned}(AA)B &= \left[\begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r_1^2 + \|q\|^2 & (r_1+r_2)q \\ (r_1+r_2)\bar{q} & \|q\|^2 + r_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r_1^2 t_1 + \|q\|^2 t_1 + (r_1+r_2)q\bar{p} & r_1^2 p + \|q\|^2 p + (r_1+r_2)t_2 q \\ (r_1+r_2)t_1\bar{q} + \|q\|^2\bar{p} + r_2^2\bar{p} & (r_1+r_2)\bar{q}p + \|q\|^2 t_2 + r_2^2 t_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Теперь посчитаем правую часть предполагаемого тождества:
$$\begin{aligned}A(AB) &= \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix}\right] = \\ &= \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 t_1 + q\bar{p} & r_1 p + t_2 q \\ t_1\bar{q} + r_2\bar{p} & \bar{q}p + r_2 t_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r_1^2 t_1 + \|q\|^2 t_1 + (r_1+r_2)q\bar{p} & r_1^2 p + q(\bar{q}p) + (r_1+r_2)t_2 q \\ (r_1+r_2)t_1\bar{q} + \bar{q}(q\bar{p}) + r_2^2\bar{p} & (r_1+r_2)\bar{q}p + \|q\|^2 t_2 + r_2^2 t_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Сравним выражения для $(AA)B$ и $A(AB)$. Диагональные элементы двух матриц равны, а равенство элементов на побочной диагонали следует из утверждения 3.17.

Теперь проверим второе из заявленных тождеств. Докажем его отличным от предыдущего утверждения способом. Пусть $q = q_0 + q_1$, $p = p_0 + p_1$, где q_0, p_0 — действительные числа, q_1, p_1 — чистые октонионы. Представим матрицы A и B в виде
$$A = R + q_1 U, \quad B = S + p_1 U,$$
где
$$R = \begin{pmatrix} r_1 & q_0 \\ q_0 & r_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} t_1 & p_0 \\ p_0 & t_2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что R, S, U — вещественные матрицы и поэтому поэлементно коммутируют с октонионами q_1 и p_1. При этом $U^2 = -E$. Необходимо проверить тождество

$$[(R + q_1U)(S + p_1U)](S + p_1U) = (R + q_1U)[(S + p_1U)^2].$$

Вычислим отдельно правую и левую части:

$$\begin{aligned}
(AB)B &= [(R + q_1U)(S + p_1U)](S + p_1U) = \\
&= (RS + p_1RU + q_1US - q_1p_1E)(S + p_1U) = \\
&= RSS + p_1RSU + p_1RUS - p_1^2R + q_1USS + q_1p_1USU - q_1p_1S - (q_1p_1)p_1U, \\
A(BB) &= (R + q_1U)[(S + p_1U)^2] = (R + q_1U)(SS + p_1SU + p_1US - p_1^2E) = \\
&= RSS + p_1RSU + p_1RUS - p_1^2R + q_1USS + q_1p_1USU - q_1p_1S - q_1(p_1^2)U.
\end{aligned}$$

Сравниваем выражения, приводим подобные слагаемые и видим, что равенство $(AB)B = A(BB)$ свелось к утверждению 3.17. □

Определение 3.38. Ассоциатором октонионных матриц A, B, C называется выражение

$$[A, B, C] := (AB)C - A(BC).$$

Исходя из только что установленного свойства альтернативности алгебр октонионных матриц размера 2×2 заключаем, что справедливы утверждения, аналогичные утверждениям для алгебры октонионов.

Следствие 3.39. *Пусть A, B, C — октонионные эрмитовы матрицы размера 2×2. Тогда*

1) $[A, B, C]$ *является кососимметрической функцией своих аргументов*;
2) $(AB)A = A(BA)$;
3) *корректно определена степень A^n для любого натурального n*;
4) *корректно определено произвольное слово от матриц A, B.*

Перейдём к доказательству двух ключевых теорем раздела о степени эрмитовой (неотрицательно-определённой) матрицы. Для доказательства этих теорем нам понадобится следующий вспомогательный факт.

Утверждение 3.40. *Пусть*

$$R := \begin{pmatrix} r_1 & s \\ s & r_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) -$$

симметрическая матрица размера 2×2,

$$U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

q — чисто мнимый октонион. Тогда

1) *q^{2k} — действительное число*;
2) $S_{m,k}(R, U) = (-1)^k S^{\mathrm{T}}_{m,k}(R, U)$.

Доказательство. Первое утверждение достаточно доказать для квадрата чистого октониона, так как $q^{2k} = (q^2)^k$ ввиду корректности определения степени для октонионов. Для квадрата чистого октониона данное утверждение очевидно в силу кососимметричности умножения октонионов:

$$q^2 = (q_1 i + q_2 j + q_3 k + q_4 l + q_5 il + q_6 jl + q_7 kl)^2 = -\sum_{i=1}^{i=7} q_i^2.$$

Докажем второй пункт утверждения. Заметим, что R, U — действительные матрицы, для них умножение ассоциативно, и для любых вещественных матриц верно, что $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$. При этом $R^{\mathrm{T}} = R$, $U^{\mathrm{T}} = -U$. Возьмём произвольное слово L из $S_{m,k}(R, U)$. Пусть L имеет вид

$$L = R^{r_1} U^{u_1} R^{r_2} \dots U^{u_t},$$

где $r_i, u_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{t} u_i = k$, $\sum\limits_{i=1}^{t} r_i = m-k$. Покажем, что тогда $L \in (-1)^k S_{m,k}^{\mathrm{T}}(R, U)$. Это включение верно ввиду следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} L^{\mathrm{T}} &= [R^{r_1} U^{u_1} R^{r_2} \dots U^{u_t}]^{\mathrm{T}} = (U^{u_t})^{\mathrm{T}} \dots (R^{r_2})^{\mathrm{T}} (U^{u_1})^{\mathrm{T}} (R^{r_1})^{\mathrm{T}} = \\ &= (U^{\mathrm{T}})^{u_t} \dots (R^{\mathrm{T}})^{r_2} (U^{\mathrm{T}})^{u_1} (R^{\mathrm{T}})^{r_1} = \\ &= (-1)^{u_t} U^{u_t} \dots R^{r_2} (-1)^{u_1} U^{u_1} R^{r_1} = (-1)^{\sum u_i} [U^{u_t} \dots R^{r_2} U^{u_1} R^{r_1}] = \\ &= (-1)^k [U^{u_t} \dots R^{r_2} U^{u_1} R^{r_1}]. \end{aligned}$$

Следовательно, $L^{\mathrm{T}} \in (-1)^k S_{m,k}(R, U)$, так как суммы показателей матриц R и U удовлетворяют всё тем же тождествам $r_i, u_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{t} u_i = k$, $\sum\limits_{i=1}^{t} r_i = m - k$. Поэтому $L \in (-1)^k S_{m,k}^{\mathrm{T}}(R, U)$. Обратное включение доказывается аналогично. □

Следствие 3.41. *В условиях предыдущего утверждения октонионная матрица $q^k [S_{m,k}(R, U)]$ является эрмитовой.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи чётного и нечётного k. При чётном k из предыдущего утверждения следует, что q^k — действительное число, а $S_{m,k}(R, U)$ — симметрическая действительная матрица. Домножение на действительное число симметричность матрицы не изменит.

Теперь пусть k нечётное. Тогда $k - 1$ чётное и $q^k = q^{k-1} q$. Поэтому из первого пункта утверждения 3.40 следует, что q^{k-1} — действительное число. Таким образом, q^k пропорционально q с действительным коэффициентом. А так как q — чистый октонион, то $\bar{q} = -q$. Поэтому $\overline{q^k} = -q^k$ при нечётном k. Следовательно,

$$\begin{aligned} (q^k [S_{m,k}(R, U)])^* &= [S_{m,k}(R, U)]^* (-q^k) = \\ &= [S_{m,k}(R, U)]^{\mathrm{T}} (-q^k) = -[S_{m,k}(R, U)](-q^k) = q^k [S_{m,k}(R, U)]. \end{aligned}$$

Первый переход — это свойство операции $*$, второй — действительность матрицы $S_{m,k}(R,U)$, третий — вторая часть предыдущего утверждения для нечётных k, четвёртый — действительность матрицы $S_{m,k}(R,U)$. Таким образом, получаем, что и в случае нечётного k матрица $q^k[S_{m,k}(R,U)]$ эрмитова. Следствие доказано. □

Теорема 3.42. *Пусть $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — эрмитова матрица. Тогда A^n — эрмитова матрица.*

Доказательство. Пусть изначально

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & p \\ \bar{p} & r_2 \end{pmatrix},$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{O}$, $s := \mathrm{Re}(p)$, $q := \mathrm{Im}(p)$. Запишем A в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & \mathrm{Re}(p) \\ \mathrm{Re}(p) & r_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Im}(p) \\ -\mathrm{Im}(p) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & s \\ s & r_2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R + qU.$$

Возникают матрицы R, U и чисто мнимый октонион q из предыдущего утверждения. Имеем

$$A^n = (R+qU)^n = \sum_{k=1}^{n} q^k[S_{n,k}(R,U)].$$

Из предыдущего утверждения нам известно, что каждое слагаемое в данной сумме есть октонионная эрмитова матрица, а следовательно, и A^n также есть эрмитова матрица. Теорема доказана. □

Замечание 3.43. Прокомментируем равенство

$$(R+qU)^n = \sum_{k=0}^{n} q^k[S_{n,k}(R,U)].$$

Матрицы R и qU являются октонионными эрмитовыми матрицами размера 2×2, а значит, к ним применимо следствие 3.39 и значение каждого слова не зависит от расстановки скобок в произведении матриц. Октонионы коммутируют с действительными числами, а следовательно, и с действительными матрицами. Также корректно определена степень октониона, она не зависит от расстановки скобок. Поэтому

$$S_{n,k}(R,qU) = q^k S_{n,k}(R,U),$$

откуда следует, что

$$(R+qU)^n = \sum_{k=0}^{n} q^k[S_{n,k}(R,U)].$$

Теорема 3.44. *Пусть $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — неотрицательно-определённая матрица. Тогда A^n также является неотрицательно-определённой матрицей для любого $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Будем доказывать эту теорему по индукции. База индукции при $n = 1$ очевидна. Пусть теорема доказана для всех $k \leqslant n-1$. Докажем её для $k = n$. Из теоремы 3.42 следует, что A^{n-1}, A^n — эрмитовы матрицы, т. е. применимо утверждение о мультипликативности детерминанта на эрмитовых матрицах. Получим, что $\det(A^n) = \det(A^{n-1})\det(A) \geqslant 0$ по индукционному предположению. Также

$$\operatorname{tr}(A^n) = \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(A^n)] = \operatorname{Re}[\operatorname{tr}(A^{n-1}A)] \geqslant 0$$

по условию теоремы, индукционному предположению и следствию 3.29. Произведение диагональных элементов октонионной эрмитовой матрицы размера 2×2 всегда не меньше определителя матрицы. Из этого следует, что оба диагональных элемента матрицы A^n — неотрицательные числа, так как их сумма и произведение — неотрицательные числа. Следовательно, по утверждению 3.27 матрица A^n является неотрицательно-определённой. □

3.7. Сопряжение на октонионных эрмитовых матрицах размера 2×2

Наша главная цель на данном этапе — «реанимировать» понятие сопряжения для октонионных эрмитовых матриц размера 2×2 и доказать, что сопряжённая матрица к неотрицательно-определённой октонионной эрмитовой матрице размера 2×2 есть также неотрицательно-определённая матрица. Для доказательства этого утверждения нам понадобится несколько вспомогательных тождеств и теорем.

Утверждение 3.45. *Для любых $x, y, z \in \mathbb{O}$ верно тождество*

$$[x(yz)]\bar{x} = (xy)(z\bar{x}).$$

Доказательство. Пусть $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$, $z = z_0 + z_1$, где $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, а x_1, y_1, z_1 — чистые октонионы. Необходимо проверить тождество

$$\big[(x_0+x_1)\big((y_0+y_1)(z_0+z_1)\big)\big](x_0-x_1) = \big((x_0+x_1)(y_0+y_1)\big)\big((z_0+z_1)(x_0-x_1)\big).$$

Считаем отдельно левую и правую части:

$$\begin{aligned}
&\big[(x_0+x_1)\big((y_0+y_1)(z_0+z_1)\big)\big](x_0-x_1) = \\
&\quad = [(x_0+x_1)(y_0z_0 + y_0z_1 + z_0y_1 + y_1z_1)](x_0-x_1) = \\
&\quad = \big(x_0y_0z_0 + x_0y_0z_1 + x_0z_0y_1 + x_0y_1z_1 + \\
&\quad + y_0z_0x_1 + y_0x_1z_1 + z_0x_1y_1 + x_1(y_1z_1)\big)(x_0-x_1) = \\
&\quad = x_0^2y_0z_0 + x_0^2y_0z_1 + x_0^2z_0y_1 + x_0^2y_1z_1 + \\
&\quad + x_0y_0z_0x_1 + x_0y_0x_1z_1 + x_0z_0x_1y_1 + x_0x_1(y_1z_1) - \\
&\quad - x_0y_0z_0x_1 - x_0y_0z_1x_1 - x_0z_0y_1x_1 - x_0(y_1z_1)x_1 - \\
&\quad - y_0z_0x_1^2 - y_0x_1z_1x_1 - z_0x_1y_1x_1 - x_1(y_1z_1)x_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big((x_0+x_1)(y_0+y_1)\big)\big((z_0+z_1)(x_0-x_1)\big)=\\&\quad=(x_0y_0+x_0y_1+y_0x_1+x_1y_1)(z_0x_0+x_0z_1-z_0x_1-z_1x_1)=\\&\quad=x_0^2y_0z_0+x_0^2y_0z_1-x_0y_0z_0x_1-x_0y_0z_1x_1+\\&\quad+x_0^2z_0y_1+x_0^2y_1z_1-x_0z_0y_1x_1-x_0y_1(z_1x_1)+\\&\quad+y_0z_0x_0x_1+x_0y_0x_1z_1-y_0z_0x_1^2-y_0x_1z_1x_1+\\&\quad+z_0x_0x_1y_1+x_0(x_1y_1)z_1-z_0x_1y_1x_1-(x_1y_1)(z_1x_1).\end{aligned}$$

Сравнивая обе части предполагаемого равенства и приводя подобные слагаемые, заключаем, что равенство двух данных выражений равносильно равенству

$$x_0x_1(y_1z_1)-x_0(y_1z_1)x_1-x_1(y_1z_1)x_1=x_0(x_1y_1)z_1-x_0y_1(z_1x_1)-(x_1y_1)(z_1x_1).$$

Согласно тождеству Муфанг $x_1(y_1z_1)x_1=(x_1y_1)(z_1x_1)$, на эти слагаемые можно сократить. Оставшиеся части равны в силу следующих тождеств:

$$\begin{aligned}&x_0x_1(y_1z_1)-x_0(x_1y_1)z_1=x_0[x_1,y_1,z_1]=\\&\qquad\qquad=-x_0[y_1,x_1,z_1]=x_0[y_1,z_1,x_1]=x_0(y_1z_1)x_1-x_0y_1(z_1x_1).\end{aligned}$$

Таким образом, равенство доказано. В предыдущих переходах мы каждый раз пользовались кососимметричностью ассоциатора. □

Следствие 3.46. *Для любых двух октонионов p, q верно равенство*

$$\big(\bar q(p\bar q)\big)\big(q(\bar pq)\big)=\|p\|^2\|q\|^4.$$

Доказательство. По утверждениям 3.17 и 3.45 верны следующие переходы:

$$\big(\bar q(p\bar q)\big)\big(q(\bar pq)\big)=\big(\bar q(p\bar q)\big)\big((q\bar p)q\big)=\bar q[(p\bar q)(q\bar p)])q=\bar q[p\|q\|^2\bar p])q=\|p\|^2\|q\|^4.\quad\square$$

Утверждение 3.47. *Для любых двух октонионов p, q верно равенство*

$$(p\bar q+q\bar p-\bar pq-\bar qp)=0.$$

Доказательство. $(p\bar q+q\bar p-\bar pq-\bar qp)=2\operatorname{Re}[p\bar q]-2\operatorname{Re}[\bar qp]=0.$ □

Утверждение 3.48. *Для произвольного октониона x верно тождество*

$$2\operatorname{Re}^2[x]-\operatorname{Re}[x^2]=\|x\|^2.$$

Доказательство. Пусть

$$x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k+x_4l+x_5il+x_6jl+x_7kl.$$

В данных обозначениях

$$2\operatorname{Re}^2[x]=2x_0^2,\quad \|x\|^2=\sum_{i=0}^{i=7}x_i^2,$$

$$\operatorname{Re}[x^2]=\operatorname{Re}[\operatorname{Re}^2(x)]+2\operatorname{Re}[\operatorname{Re}(x)\operatorname{Im}(x)]+\operatorname{Re}[\operatorname{Im}^2(x)]=x_0^2+0-\sum_{i=1}^{i=7}x_i^2.$$

Следовательно,

$$2\,\mathrm{Re}^2[x] - \mathrm{Re}[x^2] = 2x_0^2 - \left(x_0^2 - \sum_{i=1}^{i=7} x_i^2\right) = x_0^2 + \sum_{i=1}^{i=7} x_i^2 = \|x\|^2. \qquad \square$$

Теорема 3.49. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — эрмитовы матрицы. Тогда ABA — эрмитова матрица. При этом если матрица B неотрицательно-определённая, то матрица ABA также является неотрицательно-определённой.*

Доказательство. Эрмитовость матрицы ABA вытекает из следствия 3.39. Имеем

$$[(AB)A]^* = A(BA) = (AB)A.$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix},$$

Тогда

$$ABA = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & p \\ \bar{p} & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 r_1 + p\bar{q} & t_1 q + r_2 p \\ r_1\bar{p} + t_2\bar{q} & \bar{p}q + t_2 r_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} t_1 r_1^2 + r_1 p\bar{q} + r_1 q\bar{p} + t_2\|q\|^2 & r_1 t_1 q + r_1 r_2 p + q(\bar{p}q) + t_2 r_2 q \\ t_1 r_1 \bar{q} + \bar{q}(p\bar{q}) + r_1 r_2 \bar{p} + r_2 t_2 \bar{q} & t_1\|q\|^2 + r_2\bar{q}p + r_2\bar{p}q + t_2 r_2^2 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства того, что матрица ABA является неотрицательно-определённой, воспользуемся утверждением 3.27. Достаточно доказать неотрицательность определителя матрицы ABA и неотрицательность хотя бы одного числа на диагонали этой матрицы. Посчитаем определитель матрицы ABA:

$$\begin{aligned}
\det(ABA) &= t_1^2 r_1^2\|q\|^2 + t_1 r_1^2 r_2\bar{q}p + t_1 r_1^2 r_2 \bar{p}q + t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 + \\
&+ r_1 t_1\|q\|^2 p\bar{q} + r_1 r_2 (p\bar{q})(\bar{q}p) + r_1 r_2 (p\bar{q})(\bar{p}q) + r_1 t_2 r_2^2 p\bar{q} + \\
&+ r_1 t_1\|q\|^2 q\bar{p} + r_1 r_2 (q\bar{p})(\bar{q}p) + r_1 r_2 (q\bar{p})(\bar{p}q) + r_1 t_2 r_2^2 q\bar{p} + \\
&+ t_1 t_2\|q\|^4 + t_2 r_2\|q\|^2\bar{q}p + t_2 r_2\|q\|^2\bar{p}q + t_2^2 r_2^2\|q\|^2 - r_1^2 t_1^2\|q\|^2 - t_1 r_1^2 r_2\bar{q}p - \\
&- t_1 r_1\Big(\bar{q}\big(q(\bar{p}q)\big)\Big) - t_1 r_1 t_2 r_2\|q\|^2 - r_1 t_1\Big(\big(\bar{q}(p\bar{q})\big)q\Big) - r_1 r_2\Big(\big(\bar{q}(p\bar{q})\big)p\Big) - \\
&- \big(\bar{q}(p\bar{q})\big)\big(q(\bar{p}q)\big) - r_2 t_2\Big(\big(\bar{q}(p\bar{q})\big)q\Big) - r_1^2 r_2 t_1\bar{p}q - r_1^2 r_2^2\|p\|^2 - r_1 r_2\Big(\bar{p}\big(q(\bar{p}q)\big)\Big) - \\
&- r_1 r_2^2 t_2\bar{p}q - r_1 t_1 r_2 t_2\|q\|^2 - r_1 r_2^2 t_2\bar{q}p - r_2 t_2\Big(\bar{q}\big(q(\bar{p}q)\big)\Big) - r_2^2 t_2^2\|q\|^2.
\end{aligned}$$

Далее приводим в данном выражении подобные слагаемые с использованием утверждения 3.17. После указанных преобразований и группировки слагаемых имеем

$$\begin{aligned}
\det(ABA) &= t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 + t_1 t_2\|q\|^4 - 2t_1 t_2 r_1 r_2\|q\|^2 - r_1^2 r_2^2\|p\|^2 + r_1 t_1\|q\|^2 p\bar{q} + \\
&+ r_1 t_1\|q\|^2 q\bar{p} - t_1 r_1\|q\|^2\bar{p}q - r_1 t_1\|q\|^2\bar{q}p + r_1 t_2 r_2^2 p\bar{q} + r_1 t_2 r_2^2 q\bar{p} - r_1 r_2^2 t_2\bar{p}q -
\end{aligned}$$

$$- r_1 r_2^2 t_2 \bar{q} p + r_1 r_2 (p\bar{q})(\bar{q}p) + r_1 r_2 (p\bar{q})(\bar{p}q) + r_1 r_2 (q\bar{p})(\bar{q}p) + r_1 r_2 (q\bar{p})(\bar{p}q) -$$
$$- r_1 r_2 \Big(\big(\bar{q}(p\bar{q})\big) p \Big) - r_1 r_2 \Big(\bar{p} \big(q(\bar{p}q) \big) \Big) - \big(\bar{q}(p\bar{q})\big) \Big(q \big(\bar{p}q\big) \Big).$$

Применяя поочерёдно утверждение 3.45, следствие 3.46, утверждения 3.47 и 3.48, получаем

$$\det(ABA) = t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 + t_1 t_2 \|q\|^4 - 2 t_1 t_2 r_1 r_2 \|q\|^2 - r_1^2 r_2^2 \|p\|^2 -$$
$$- \|p\|^2 \|q\|^4 + 2 r_1 r_2 \|p\|^2 \|q\|^2 = (r_1 r_2 - \|q\|^2)^2 (t_1 t_2 - \|p\|^2) \geqslant 0.$$

Согласно утверждению 3.27 остаётся проверить неотрицательность хотя бы одного числа на диагонали:

$$t_1 r_1^2 + r_1 p\bar{q} + r_1 q\bar{p} + t_2 \|q\|^2 = t_1 r_1^2 + 2 r_1 (\mathrm{Re}[p\bar{q}]) + t_2 \|q\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant t_1 r_1^2 - 2 r_1 \|p\| \|q\| + t_2 \|q\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant t_1 r_1^2 - 2 r_1 \|q\| \sqrt{t_1 t_2} + t_2 \|q\|^2 = [\sqrt{t_1} r_1 - \sqrt{t_2} \|q\|]^2 \geqslant 0.$$

Итак, заключаем, что ABA — неотрицательно-определённая матрица в условиях данной теоремы. □

Замечание 3.50. В предыдущем утверждении нельзя заменить условия, что матрицы A, B эрмитовы и их размер 2×2, на более слабые. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q \\ \bar{q} & r_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O}) -$$

эрмитова матрица,

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O}) -$$

произвольная октонионная матрица. Покажем, что для такой пары матриц $(B^*A)B$ не будет эрмитовой матрицей. Имеем

$$(B^*A)B = \left[\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & \bar{q} \\ q & r_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \|a\|^2 r_1 + (\bar{c}\bar{q})a + (\bar{a}q)c + \|c\|^2 r_2 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $c = -i$, $q = -j$, $a = l$. Тогда

$$\|a\|^2 r_1 + (\bar{c}\bar{q})a + (\bar{a}q)c + \|c\|^2 r_2 = r_1 + r_2 + 2kl \notin \mathbb{R}.$$

Это означает, что матрица $(B^*A)B$ не является эрмитовой, так как её диагональный элемент не является действительным числом.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & x & y \\ \bar{x} & r_2 & z \\ \bar{y} & \bar{z} & r_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} t_1 & s & m \\ \bar{s} & t_2 & n \\ \bar{m} & \bar{n} & t_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{O}) -$$

эрмитовы матрицы. Покажем, что в данном случае $(AB)A \neq A(BA)$. Как несложно заметить, условие $(AB)A = A(BA)$ для эрмитовых матриц A, B эквивалентно условию эрмитовости матрицы $(AB)A$. Это условие мы и исследуем:

$$(AB)A = \left[\begin{pmatrix} r_1 & x & y \\ \bar{x} & r_2 & z \\ \bar{y} & \bar{z} & r_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & s & m \\ \bar{s} & t_2 & n \\ \bar{m} & \bar{n} & t_3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} r_1 & x & y \\ \bar{x} & r_2 & z \\ \bar{y} & \bar{z} & r_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_1^2t_1 + x\bar{s}r_1 + y\bar{m}r_1 + r_1s\bar{x} + \|x\|^2t_2 + (y\bar{n})\bar{x} + r_1m\bar{y} + (xn)\bar{y} + \|y\|^2t_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $y = i$, $n = -j$, $x = -l$. Тогда

$$r_1^2t_1 + x\bar{s}r_1 + y\bar{m}r_1 + r_1s\bar{x} + \|x\|^2t_2 + (y\bar{n})\bar{x} + r_1m\bar{y} + (xn)\bar{y} + \|y\|^2t_3 =$$
$$= r_1^2t_1 + 2r_1\,\mathrm{Re}[x\bar{s}] + 2r_1\,\mathrm{Re}[y\bar{m}] + \|x\|^2t_2 + \|y\|^2t_3 + 2kl \notin \mathbb{R}.$$

Это означает, что матрица $(AB)A$ не является эрмитовой, так как её диагональный элемент не является действительным числом.

3.8. BMV-гипотеза над октонионами

Проблема формулировки BMV-гипотезы над октонионами состоит в невозможности корректного определения слова от матриц. Рассмотрим для примера коэффициент при t в полиноме $(A+Bt)^3$ для комплексных матриц. Он будет равен $AAB + ABA + BAA$. Для октонионов такая запись будет некорректна, нужно ввести «порядок» перемножения матриц A и B. Пусть мы перемножаем матрицы слева направо. Тогда коэффициент при t в полиноме $(A+Bt)^3$ будет выглядеть как $(AA)B + (AB)A + (BA)A$. Также заметим, что коэффициенты (в смысле матриц, а не следов) при каждой степени t для комплексного случая были эрмитовыми матрицами, что и обеспечивало действительность следа и корректность формулировки BMV-гипотезы. Для октонионных эрмитовых матриц совсем не обязательно, что выполнено, например, тождество $(AA)B + (AB)A + (BA)A = B(AA) + A(BA) + A(AB)$, поэтому действительность, а следовательно, и корректность постановки BMV-гипотезы для октонионных матриц гарантировать нельзя. Тем не менее сформулируем BMV-гипотезу над октонионами, ничего не утверждая о её корректности.

Гипотеза 3. Для любых двух неотрицательно-определённых матриц $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ все коэффициенты полинома $f(t) = \mathrm{tr}[(A+Bt)^m]$ неотрицательны.

Далее мы будем рассматривать только случай матриц размера 2×2. Отметим свойство, справедливое для всех неотрицательно-определённых матриц над октонионами.

Утверждение 3.51. *Для любых двух эрмитовых октонионных матриц $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{O})$ верно равенство*

$$\mathrm{tr}(AB) = \overline{\mathrm{tr}(BA)}.$$

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} r_1 & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ \bar{q_{12}} & r_2 & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{q_{1n}} & \bar{q_{2n}} & \dots & r_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ \bar{p_{12}} & t_2 & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{p_{1n}} & \bar{p_{2n}} & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

где $r_i, t_i \in \mathbb{R}$, q_{ij}, p_{ij} — октонионы. Тогда

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} q_{ij}\bar{p}_{ij} + \sum_{i<j}^{j=n} \bar{q}_{ij} p_{ij},$$

$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} p_{ij}\bar{q}_{ij} + \sum_{i<j}^{j=n} \bar{p}_{ij} q_{ij},$$

$$\overline{\operatorname{tr}(BA)} = \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} \overline{(p_{ij}\bar{q}_{ij})} + \sum_{i<j}^{j=n} \overline{(\bar{p}_{ij} q_{ij})} =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} r_i t_i + \sum_{i<j}^{j=n} q_{ij}\bar{p}_{ij} + \sum_{i<j}^{j=n} \bar{q}_{ij} p_{ij} = \operatorname{tr}(AB),$$

что и завершает доказательство утверждения. □

Теорема 3.52. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — неотрицательно-определённые матрицы. Для них формулировка BMV-гипотезы корректна.*

Доказательство. Проблема формулировки октонионного аналога BMV-гипотезы состоит в невозможности корректно определить слово от матриц, не расставляя в нём скобок. При выборе какого-то конкретного порядка перемножения теряется свойство эрмитовости коэффициентов $S_{m,k}(A, B)$ для эрмитовых A, B. Из-за этого сам коэффициент полинома, являющийся следом матрицы, может быть недействительным числом. Но для октонионных неотрицательно-определённых матриц размера 2×2 мы можем воспользоваться утверждением 3.48. Тогда по свойствам инволюции имеем, что если произвольное слово L от матриц A и B содержится в $S_{m,k}(A, B)$, то L^* также содержится в $S_{m,k}(A, B)$. Поэтому получаем, что $S_{m,k}(A, B) = S^*_{m,k}(A, B)$, что в свою очередь означает эрмитовость матрицы $S_{m,k}(A, B)$, а следовательно, и вещественность её следа. □

Теорема 3.53. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ — неотрицательно-определённые матрицы. Тогда коэффициенты при t^0, t^1, t^2, t^{m-2}, t^{m-1}, t^m в полиноме $f(t) = \operatorname{tr}[(A + tB)^m]$ — неотрицательные числа.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать неотрицательность коэффициентов при t^0, t^1 и t^2. Неотрицательность коэффициента при t^0 следует из теоремы 3.44 и замечания 3.10. Остаётся доказать неотрицательность коэффициентов при t^1 и t^2. Имеем

$$S_{m,1}(A,B) = BA^{m-1} + ABA^{m-2} + \ldots + A^tBA^{m-t-1} + \ldots + A^{m-2}BA + A^{m-1}B.$$

Берём след от обеих частей равенства:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\bigl(S_{m,1}(A,B)\bigr) = \operatorname{tr}(BA^{m-1} + A^{m-1}B) + \ldots + \\
&\quad + \operatorname{tr}\bigl((A^tBA^t)A^{m-2t-1} + A^{m-2t-1}(A^tBA^t)\bigr) + \ldots = \\
&= \left[\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{t=0}^{m/2-1} \operatorname{tr}[(A^tBA^t)A^{m-2t-1} + A^{m-2t-1}(A^tBA^t)], & m = 2s, \\
\displaystyle\sum_{t=0}^{(m-3)/2} \operatorname{tr}[(A^tBA^t)A^{m-2t-1} + A^{m-2t-1}(A^tBA^t)] + & \\
\quad + \operatorname{tr}(A^{(m-1)/2}BA^{(m-1)/2}), & m = 2s+1.
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Каждое из слагаемых в данной сумме неотрицательно по теореме 3.49 и утверждению 3.36, поэтому и вся сумма также неотрицательна.

Теперь докажем неотрицательность коэффициента при t^2. Любое слово от матриц A, B из $S_{m,2}(A,B)$ может быть представлено в виде $A^xBA^yBA^z$ для некоторых неотрицательных целых чисел x, y, z, таких что $x+y+z = m-2$, $x,y,z \geqslant 0$. Рассмотрим $\operatorname{tr}(A^xBA^yBA^z + A^zBA^yBA^x)$. Ввиду симметрии данного выражения по x и z без ограничения общности считаем, что $x \geqslant z$. Имеем

$$\operatorname{tr}(A^xBA^yBA^z + A^zBA^yBA^x) = \operatorname{tr}(A^{x-z}(A^zBA^yBA^z) + (A^zBA^yBA^z)A^{x-z}).$$

Так как матрица $A^zBA^yBA^z$ является неотрицательно-определённой, по теореме 3.49 и утверждению 3.36 имеем, что $\operatorname{tr}(A^xBA^yBA^z + A^zBA^yBA^x) \geqslant 0$. При этом на пары подобного рода разобьются все слова в $S_{m,2}(A,B)$, кроме тех, для которых в описанном представлении $x = z$. Но каждое из таких слов представляет собой неотрицательно-определённую матрицу и, следовательно, имеет неотрицательный след. Таким образом, показано, что коэффициент при t^2 неотрицателен. □

Следствие 3.54. *Гипотеза 3 справедлива для любых двух неотрицательно-определённых матриц $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{O})$ при $m \leqslant 5$.*

Доказательство. При $m \leqslant 5$ каждый из коэффициентов полинома $f(t) = \operatorname{tr}[(A+Bt)^m]$ будет являться коэффициентом либо при t^0, t^1, t^2, либо при t^{m-2}, t^{m-1}, t^m, поэтому для таких значений m BMV-гипотеза над октонионами справедлива. □

Замечание 3.55. Для октонионных матриц размера 3×3 (даже эрмитовых) понятие степени некорректно. Уже для A^3 существуют матрицы, для которых $(A^2)A \neq A(A^2)$. Также неинвариантна композиция степенной функции и операции взятия следа матрицы. Другими словами, существуют матрицы, для которых $\operatorname{tr}[(A^2)A] \neq \operatorname{tr}[A(A^2)]$.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & il \\ -i & 3 & j \\ -il & -j & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем, что

$$(A^2)A = \begin{pmatrix} 20 + 2jl & * & * \\ * & 42 + 2jl & * \\ * & * & 10 + 2jl \end{pmatrix},$$

$$A(A^2) = \begin{pmatrix} 20 - 2jl & * & * \\ * & 42 - 2jl & * \\ * & * & 10 - 2jl \end{pmatrix}.$$

На примере данной матрицы A мы видим, что

$$(A^2)A \neq A(A^2)$$

и

$$\mathrm{tr}[(A^2)A] \neq \mathrm{tr}[A(A^2)].$$

Однако также

$$\mathrm{Re}\big[\mathrm{tr}[(A^2)A]\big] = \mathrm{Re}\big[\mathrm{tr}[A(A^2)]\big].$$

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи, внимание к работе и ценные обсуждения. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта МД-2502.2012.1 и гранта РФФИ 12-01-00140-а.

Литература

[1] Bessis D., Moussa P., Villani M. Monotonic converging variational approximations to the functional integrals in quantum statistical mechanics // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16. — P. 2318—2325.

[2] Burgdorf S. Sums of Hermitian squares as an approach to the BMV conjecture // Linear and Multilinear Algebra. — 2011. — Vol. 59, no. 1. — P. 1—9.

[3] Fannes M., Petz D. On the function e^{H+itK} // Int. J. Math. Math. Sci. — 2001. — Vol. 29. — P. 389—394.

[4] Fannes M., Petz D. Perturbation of Wigner matrices and a conjecture // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131. — P. 1981—1988.

[5] Hägele D. Proof of the case $p \leqslant 7$ of the Lieb—Seiringer formulation of the Bessis—Moussa—Villani conjecture // J. Stat. Phys. — 2007. — Vol. 127, no. 6. — P. 1167—1171.

[6] Hillar C. J. Advances on the Bessis—Moussa—Villani trace conjecture // Linear Algebra Appl. — 2007. — Vol. 426, no. 1. — P. 130—142.

[7] Hillar C. J., Johnson C. R. Eigenvalues of words in two positive definite letters // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 2002. — Vol. 23, no. 4. — P. 916—928.

[8] Horn R. A., Johnson C. R. Matrix Analysis. — New York: Cambridge Univ. Press, 1985.

[9] Klep I., Schweighofer M. Sums of Hermitian squares and the BMV conjecture // J. Stat. Phys. — 2008. — Vol. 133. — P. 739—760.

[10] Lieb E. H., Seiringer R. Equivalent forms of the Bessis—Moussa—Villani conjecture // J. Stat. Phys. — 2004. — Vol. 115. — P. 185—190.

[11] Ward J. P. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications. — Boston: Kluwer Academic, 1997.

[12] Zhang F. Quaternions and matrices of quaternions // Linear Algebra Appl. — 1997. — Vol. 251. — P. 21—57.