О совпадении факторизационного ранга и ранга Гондрана—Мину матриц над полукольцом

Я. Н. ШИТОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: yaroslav-shitov@yandex.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: полукольцо, факторизационный ранг, ранг Гондрана—Мину.

Аннотация

В работе рассматриваются функции матриц над полукольцами, обобщающие классическое понятие ранга матрицы над полем. Изучаются полукольца, факторизационный ранг матриц над которыми совпадает с рангом Гондрана—Мину. Показано, что любое полукольцо, матрицы над которым удовлетворяют данному условию, вложено в некоторое поле. Приведён пример целостного кольца, для матриц над которым это условие нарушается.

Abstract

Ya. N. Shitov, On the coincidence of the factor and Gondran—Minoux rank functions of matrices over a semiring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 6, pp. 223—232.

We consider the rank functions of matrices over semiring, functions that generalize the classical notion of the rank of a matrix over a field. We study semirings over which the factor and Gondran—Minoux ranks of any matrix coincide. It is shown that every semiring satisfying that condition is a subsemiring of a field. We provide an example of an integral domain over which the factor and Gondran—Minoux ranks are different.

1. Введение

Множество $\mathcal{S}$ с бинарными операциями $+$ и $\cdot$ (называемыми *сложением* и *умножением* соответственно) и выделенными элементами $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ называется *полукольцом*, если $(\mathcal{S}, +, \mathbf{0})$ — абелев моноид, $(\mathcal{S}, \cdot, \mathbf{1})$ — моноид, умножение справа и слева дистрибутивно по сложению и для любого элемента x из $\mathcal{S}$ верно, что $x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot x = \mathbf{0}$. Иными словами, полукольцо отличается от кольца только тем, что его ненулевые элементы не обязаны быть обратимыми по сложению.

Полукольцо называется *коммутативным*, если его мультипликативная полугруппа коммутативна. В нашей работе мы будем рассматривать только такие полукольца, поэтому далее коммутативные полукольца будут называться просто полукольцами.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 6, с. 223—232.

Одной из активно развивающихся областей линейной алгебры является на данный момент теория матриц над полукольцами (см. [2,6,9]). Важность обобщения базовых понятий линейной алгебры на полукольцевой случай обусловлена рядом приложений, в том числе в комбинаторной оптимизации (см. [4]), теории сложности алгоритмов (см. [3]) и алгебраической геометрии (см. [9]). Оказывается, что различные приложения могут приводить к различным способам обобщения классических понятий линейной алгебры, поэтому существует несколько различных важных ранговых функций матриц над полукольцами. Отметим, что операции над векторами и матрицами с элементами из полукольца $\mathcal{S}$ определяются так же, как и в случае, когда $\mathcal{S}$ является полем, только обычные операции сложения и умножения элементов поля заменяются на их полукольцевые аналоги.

В данной работе изучаются функции факторизационного ранга и рангов Гондрана—Мину. Приведём сначала определение линейной зависимости в смысле Гондрана—Мину, которое обобщает классическое понятие линейной зависимости векторов над полем.

Определение 1 [11]. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо. Система из n строк

$$\{a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{im}) \in \mathcal{S}^m\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

называется *линейно зависимой в смысле Гондрана—Мину*, если найдутся I и J — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, такие что $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1, \ldots, n\}$, найдутся $\lambda_i \in \mathcal{S}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, не все равные $\mathbf{0}$, такие что для всех $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ верно равенство

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_{ik} = \sum_{j \in J} \lambda_j a_{jk}. \tag{1}$$

Замечание 2. В определении 1 и далее результат суммирования элементов полукольца по пустому множеству полагается равным $\mathbf{0}$. Например, если множество I пусто, мы считаем, что $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i a_{ik} = \mathbf{0}$.

Понятие ранга Гондрана—Мину основано на определении линейной зависимости и является обобщением классической ранговой функции матриц над полем.

Определение 3 [2]. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{S}^n$ — система строк. Максимальное число строк в тех подсистемах системы $a_1, \ldots, a_m$, которые не являются линейно зависимыми в смысле Гондрана—Мину, называется *рангом Гондрана—Мину* этой системы. Ранг Гондрана—Мину системы строк матрицы $A \in \mathcal{S}^{m \times n}$ обозначается через $\mathrm{GMr}(A)$, ранг Гондрана—Мину системы строк транспонированной матрицы $A^\top$ (столбцов матрицы A) — через $\mathrm{GMc}(A)$.

Отметим, что строчный и столбцовый ранги Гондрана—Мину матрицы над полукольцом, вообще говоря, не совпадают. Исследованию матриц над бинарным булевым и тропическим полукольцами, для которых эти ранговые функции различаются, посвящена работа [1].

Понятие факторизационного ранга полезно для изучения полуколец, а также для решения некоторых задач теории сложности и тропической геометрии (см., например, [5, 7, 9]).

Определение 4 [2, 9]. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $A \in \mathcal{S}^{m\times n}$. Если матрица A содержит хотя бы один элемент, отличный от $\mathbf{0}$, её *факторизационным рангом* $\mathrm{f}(A)$ называется наименьшее целое число k, для которого существуют такие матрицы $B \in \mathcal{S}^{m\times k}$ и $C \in \mathcal{S}^{k\times n}$, что $A = B \cdot C$. В противном случае полагаем $\mathrm{f}(A) = 0$.

Заметим, что рассматриваемые ранговые функции действительно задают обобщение классической ранговой функции над полем: одним из базовых результатов линейной алгебры является равенство $\mathrm{f}(A) = \mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMc}(A) = \mathrm{rank}(A)$, верное для матриц над полем. Тем не менее факторизационный ранг матрицы, вообще говоря, не обязан совпадать ни с её строчным, ни со столбцовым рангом Гондрана—Мину. Проиллюстрируем данные определения на следующем примере.

Пример 5. Пусть элементы a, b, c полукольца $\mathcal{S}$ таковы, что $a \neq b$, $c \neq \mathbf{0}$ и $ac = bc$. Положим

$$A = \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{2\times 2}.$$

Тогда $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMc}(A) = 1$, $\mathrm{f}(A) = 2$.

Доказательство. 1. Заметим сначала, что для любого элемента $\lambda \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$ верно, что $\lambda \cdot (a, \mathbf{1}) = (a \cdot \lambda, \lambda) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Согласно определению 1 это означает, что набор, состоящий из первой строки матрицы A, не является линейно зависимым в смысле Гондрана—Мину, поэтому из определения 3 следует, что $\mathrm{GMr}(A) \geqslant 1$. Аналогично показывается, что набор, состоящий из второго столбца матрицы A, не является линейно зависимым в смысле Гондрана—Мину, поэтому также $\mathrm{GMc}(A) \geqslant 1$.

2. Теперь воспользуемся определением 1, чтобы показать, что строки матрицы A линейно зависимы в смысле Гондрана—Мину. Положим $I = \{1\}$, $J = \{2\}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = c$. Тогда по условиям примера имеем, что $c \cdot (a, \mathbf{1}) = c \cdot (b, \mathbf{1})$, что доказывает выполнение равенства (1). Таким образом, из определения 3 следует, что $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 1$. Аналогично равенство

$$c \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ac \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

доказывает линейную зависимость столбцов матрицы A в смысле Гондрана—Мину, поэтому $\mathrm{GMc}(A) \leqslant 1$.

3. Равенство

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

показывает, как следует из определения 4, что $\mathrm{f}(A) \leqslant 2$.

4. Покажем теперь, что $\mathrm{f}(A) \neq 1$. Предположим противное. Тогда для некоторых элементов p, q, r и s полукольца $\mathcal{S}$ верно, что

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \mathbf{1} \\ b & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

или, в иной записи,

$$pr = a, \quad qr = b, \tag{2}$$

$$ps = \mathbf{1}, \quad qs = \mathbf{1}. \tag{3}$$

Из равенств (3) следует, что $sp = \mathbf{1}$, $qsp = p$. Поэтому $q \cdot \mathbf{1} = p$, или $q = p$. Из равенств (2) теперь следует, что $a = b$. Полученное равенство противоречит условию примера, поэтому $\mathrm{f}(A) \neq 1$.

В силу пунктов 1 и 2 $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMc}(A) = 1$, в силу пунктов 3 и 4 $\mathrm{f}(A) \in \{0, 2\}$. По условию примера $a \neq b$, поэтому либо $a \neq \mathbf{0}$, либо $b \neq \mathbf{0}$. Таким образом, из определения 4 следует также, что $\mathrm{f}(A) \neq 0$. Тогда получаем, что $\mathrm{f}(A) = 2$, что завершает доказательство. $\square$

В данной работе изучаются полукольца, факторизационный ранг матриц над которыми совпадает со строчным и столбцовым рангами Гондрана—Мину. Заметим, что $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ для матриц над полукольцом $\mathcal{S}$, поэтому факторизационный ранг матрицы инвариантен относительно транспонирования. Это означает, что функция факторизационного ранга совпадает с функцией строчного ранга Гондрана—Мину для всех матриц над $\mathcal{S}$ в том и только том случае, когда она совпадает с функцией столбцового ранга.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 вводятся дополнительные необходимые определения и доказывается, что некоторый класс полуколец не удовлетворяет условию совпадения функций факторизационного ранга и ранга Гондрана—Мину. В разделе 3 показано, что любое полукольцо, удовлетворяющее этому условию, вложено в некоторое поле. Приведён пример целостного кольца, для которого это условие нарушается.

2. Антинегативные полукольца без делителей нуля

Для доказательства результатов данного раздела нам потребуются дополнительные определения.

Определение 6 [10,11]. Полукольцо $\mathcal{S}$ называется антинегативным, если для любых элементов $a, b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$ верно, что $a + b \neq \mathbf{0}$.

Определение 7 [11]. Полукольцо $\mathcal{S}$ называется *полукольцом с сокращением*, если для любых элементов $a, b, c \in \mathcal{S}$ из $ac = bc$ и $c \neq \mathbf{0}$ следует, что $a = b$.

Определение 8 [10]. Ненулевой элемент a полукольца $\mathcal{S}$ называется *делителем нуля*, если найдётся элемент $b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$, для которого $a \cdot b = \mathbf{0}$. Полукольцо $\mathcal{S}$ называется *полукольцом без делителей нуля*, если ни один его ненулевой элемент не является делителем нуля.

Следующее утверждение следует непосредственно из определений.

Лемма 9. *Любое полукольцо с сокращением является полукольцом без делителей нуля.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо с сокращением и элементы $a \in \mathcal{S}$, $b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$ таковы, что $a \cdot b = \mathbf{0}$. Тогда имеем $a \cdot b = \mathbf{0} \cdot b$, и в силу определения 7 $a = \mathbf{0}$. Из определения 8 теперь следует, что никакой ненулевой элемент полукольца $\mathcal{S}$ не является делителем нуля. Лемма доказана. $\square$

Теперь приведём пример полукольца, важный для наших дальнейших рассуждений.

Пример 10. Множество $\mathbb{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, на котором заданы операции $\oplus$ и $\otimes$ равенствами

$$\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{0} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

является полукольцом.

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из определения полукольца. Заметим также, что определения операций $\oplus$ и $\otimes$ соответствуют определениям логических операций ИЛИ и И. $\square$

Полукольцо $\mathbb{B}$ из примера 10 называется *бинарным булевым полукольцом*. Нам потребуется утверждение, связывающее бинарное булево полукольцо с антинегативными полукольцами без делителей нуля. Аналогичные утверждения упоминаются, например, в [8, § 3.2], тем не менее мы приведём доказательство для полноты изложения.

Теорема 11. *Пусть $(\mathcal{S}, +, \cdot, \mathbf{0}', \mathbf{1}')$ — антинегативное полукольцо, не содержащее делителей нуля, и $\mathbf{0}' \neq \mathbf{1}'$. Зададим отображение $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{B}$, положив $\varphi(\mathbf{0}') = \mathbf{0}$, $\varphi(s) = \mathbf{1}$ при $s \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}'\}$. Отображение φ является гомоморфизмом полуколец.*

Доказательство. Согласно определению отображения φ справедливы равенства $\varphi(\mathbf{0}') = \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{1}') = \mathbf{1}$. Поэтому достаточно для любых элементов $a, b \in \mathcal{S}$ проверить равенства

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \tag{4}$$

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \otimes \varphi(b). \tag{5}$$

По определению полукольца $x + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + x = x$ для любого $x \in \mathcal{S}$, откуда следует равенство (4) для любых $a, b \in \mathcal{S}$, хотя бы одно из которых равно $\mathbf{0}'$. Если же $a, b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}'\}$, то по определению 6 $a + b \neq \mathbf{0}'$, что заканчивает проверку равенства (4).

Согласно определению полукольца $x \cdot \mathbf{0}' = \mathbf{0}' \cdot x = \mathbf{0}'$, что доказывает равенство (5) для любых $a, b \in \mathcal{S}$, хотя бы одно из которых равно $\mathbf{0}'$. Наконец, если $a, b \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}'\}$, то по определению 8 $a \cdot b \neq \mathbf{0}'$, что завершает доказательство равенства (5). $\square$

Следующий пример тоже будет полезен для доказательства основных результатов.

Пример 12. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{B}^{4\times 4},$$

а матрицы $R \in \mathbb{B}^{4\times k}$ и $S \in \mathbb{B}^{k\times 4}$ таковы, что $R \otimes S = A$. Тогда $k \geqslant 4$.

Доказательство. Предположим, что утверждение не выполняется, тогда $k \leqslant 3$. Рассмотрим возможные случаи.

1. Предположим, что некоторый столбец матрицы S или некоторая строка матрицы R состоят только из элементов $\mathbf{0}$. Тогда из определения операций на полукольце $\mathbb{B}$ следует, что матрица A содержит соответственно либо нулевой столбец, либо нулевую строку. Это противоречит определению матрицы A, поэтому случай 1 не реализуется.

2. Пусть либо матрица R содержит две совпадающие строки, либо матрица S содержит два совпадающих столбца. В этом случае из определения умножения матриц следует, что матрица A содержит либо две совпадающих строки, либо два совпадающих столбца. Это опять противоречит определению матрицы A и показывает, что случай 2 невозможен.

3. Предположим, что некоторая строка (обозначим её номер через t) матрицы R состоит только из элементов $\mathbf{1}$. По определению матрицы A найдётся индекс $q \in \{1, 2, 3, 4\}$, для которого $a_{tq} = \mathbf{0}$. В этом случае по определению произведения матриц

$$(r_{t1} \otimes s_{1q}) \oplus \ldots \oplus (r_{tk} \otimes s_{kq}) = \mathbf{0}.$$

По предположению этого пункта каждый элемент строки с номером t матрицы R равен $\mathbf{1}$, т. е. равен нейтральному по умножению элементу полукольца $\mathbb{B}$. Таким образом, мы получаем, что $s_{1q} \oplus \ldots \oplus s_{kq} = \mathbf{0}$, откуда по определению операций на полукольце $\mathbb{B}$ следует, что $s_{1q} = \ldots = s_{kq} = \mathbf{0}$. Таким образом, столбец матрицы S с номером q состоит только из элементов $\mathbf{0}$, что противоречит результату пункта 1.

4. Предположим теперь, что $k = 3$ и некоторая строка (её номер мы будем обозначать через u) матрицы R содержит ровно два элемента $\mathbf{1}$. Таким образом, $r_{ux} = r_{uy} = \mathbf{1}$, $r_{uz} = \mathbf{0}$, где $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$. По определению матрицы A найдутся два различных индекса $g_1, g_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, для которых $a_{ug_1} = a_{ug_2} = \mathbf{0}$. В этом случае по определению произведения матриц

$$(r_{ux} \otimes s_{xg_i}) \oplus (r_{uy} \otimes s_{yg_i}) \oplus (r_{uz} \otimes s_{zg_i}) = \mathbf{0}$$

при любом $i \in \{1, 2\}$. По определению операций на полукольце $\mathbb{B}$ верно, что $s_{xg_i} = s_{yg_i} = \mathbf{0}$. Отсюда следует, что либо один из столбцов матрицы S с индексами g_1, g_2 состоит только из элементов $\mathbf{0}$, либо эти два столбца совпадают. Таким образом, мы получаем противоречие с результатами пунктов 1 и 2.

5. Остаётся разобрать случай, когда все строки матрицы R содержат ровно по одному элементу $\mathbf{1}$. В этом случае согласно принципу Дирихле матрица R содержит совпадающие строки, что противоречит результату пункта 2.

Осталось заметить, что пункты 1—5 исчерпывают все возможные случаи. □

Теперь мы можем привести пример матрицы над произвольным антинегативным полукольцом, не содержащим делителей нуля, факторизационный ранг которой не совпадает с её рангами Гондрана—Мину.

Пример 13. Пусть $(\mathcal{S}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ — антинегативное полукольцо, не содержащее делителей нуля, в котором $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$. Положим

$$H = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathrm{f}(H) > \mathrm{GMr}(H) = \mathrm{GMc}(H)$.

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathrm{f}(H) \geqslant 4$. Предположим, что это не так. Тогда по определению 4 $H = P \cdot Q$ для некоторых матриц $P \in \mathcal{S}^{4\times k}$ и $Q \in \mathcal{S}^{k\times 4}$ и некоторого $k < 4$. Через R и S обозначим булевы матрицы, полученные соответственно из P и Q покомпонентным применением отображения φ из теоремы 11. Тогда, поскольку φ — гомоморфизм, произведение $R \otimes S$ булевых матриц оказывается равно матрице A из примера 12. Противоречие с результатом примера 12 показывает, что на самом деле $\mathrm{f}(H) \geqslant 4$.

Теперь покажем, что $\mathrm{GMc}(H) \leqslant 3$. Согласно определению 3 нам требуется показать, что столбцы матрицы H линейно зависимы в смысле Гондрана—Мину. По определению 1 их линейная зависимость следует из равенства

$$\mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Наконец, равенство $\mathrm{GMr}(H) = \mathrm{GMc}(H)$ следует из определения 3 ввиду того, что матрица H совпадает со своей транспонированной. □

3. Доказательство основных результатов

В данном разделе мы докажем, что любое полукольцо, удовлетворяющее условию совпадения функций факторизационного ранга и ранга Гондрана—Мину, вложено в некоторое поле. Сначала мы докажем достаточное условие существование полукольца частных коммутативного кольца. Отметим, что глубокое изучение полуколец частных было проведено в [10]. Для наших же рассуждений будет достаточно более слабого условия, чем те, которые рассматривались в [10].

Теорема 14. *Пусть* $(\mathcal{S}, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ — *коммутативное полукольцо с сокращением, в котором* $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$. *На множестве* $\mathcal{S} \times (\mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\})$ *зададим отношение* $\sim$ *по правилу* $(a, b) \sim (c, d)$ *тогда и только тогда, когда* $ad = bc$. *Тогда*

1) $\sim$ *является отношением эквивалентности*;
2) *множество* $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$ *классов эквивалентности* $\langle a, b\rangle$ *пар* $(a, b) \in \mathcal{S} \times (\mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\})$ *является полукольцом относительно операций* $\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle = \langle ad + bc, bd\rangle$, $\langle a, b\rangle \cdot \langle c, d\rangle = \langle ac, bd\rangle$; *нейтральным по сложению является класс эквивалентности элемента* $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$, *по умножению — элемента* $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$. *Любой ненулевой элемент полукольца* $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$ *обратим по умножению.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения $\sim$ следуют непосредственно из его определения. Если же $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (g, h)$, то $ad = bc$ и $ch = dg$. Тогда имеем $adch = bcdg$, откуда следует, что $ah = bg$, или $(a, b) \sim (g, h)$. Таким образом, $\sim$ действительно является отношением эквивалентности.

Проверим теперь, что операции на множестве $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$ определены корректно. Действительно, пусть $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ и $(c_1, d_1) \sim (c_2, d_2)$, т. е.

$$a_1 b_2 = a_2 b_1, \quad c_1 d_2 = c_2 d_1. \tag{6}$$

Тогда $\langle a_i, b_i\rangle \cdot \langle c_i, d_i\rangle = \langle a_i c_i, b_i d_i\rangle$ при $i \in \{1, 2\}$, а из (6) следует, что $a_1 c_1 b_2 d_2 = a_2 c_2 b_1 d_1$. Это означает, что $\langle a_1, b_1\rangle \cdot \langle c_1, d_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle \cdot \langle c_2, d_2\rangle$. Кроме того, $\langle a_i, b_i\rangle + \langle c_i, d_i\rangle = \langle a_i d_i + b_i c_i, b_i d_i\rangle$. Опять из равенств (6) следует, что $(a_1 d_1 + b_1 c_1) b_2 d_2 = (a_2 d_2 + b_2 c_2) b_1 d_1$, поэтому $\langle a_1, b_1\rangle + \langle c_1, d_1\rangle = \langle a_2, b_2\rangle + \langle c_2, d_2\rangle$. Итак, операции на $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$ определены корректно.

Теперь мы можем доказывать второе утверждение теоремы. Коммутативность сложения и умножения элементов $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$, также как и ассоциативность умножения, следуют непосредственно из определения этих операций. Кроме того, заметим, что

$$\begin{gathered}
\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle + \langle a, b\rangle = \langle \mathbf{0} \cdot b + \mathbf{1} \cdot a, b \cdot \mathbf{1}\rangle = \langle a, b\rangle, \\
\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \cdot \langle a, b\rangle = \langle \mathbf{0} \cdot a, \mathbf{1} \cdot b\rangle = \langle \mathbf{0}, b\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle, \\
\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle \cdot \langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle.
\end{gathered}$$

Если же $a \neq \mathbf{0}$, т. е. если $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ не принадлежит классу эквивалентности пары (a, b), то $\langle a, b\rangle \cdot \langle b, a\rangle = \langle ab, ab\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle$. Для доказательства теоремы теперь достаточно проверить ассоциативность сложения и дистрибутивность:

$$\begin{gathered}
(\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle) + \langle g, h\rangle = \langle adh + bch + bdg, bdh\rangle = \langle a, b\rangle + (\langle c, d\rangle + \langle g, h\rangle), \\
(\langle a, b\rangle + \langle c, d\rangle) \cdot \langle g, h\rangle = \langle adgh + bcgh, bdhh\rangle = (\langle a, b\rangle \cdot \langle g, h\rangle) + (\langle c, d\rangle \cdot \langle g, h\rangle).
\end{gathered}$$

□

Замечание 15. В условиях теоремы 14 имеет место естественное вложение полукольца $\mathcal{S}$ в полукольцо $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$. Действительно, для любых $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ верно, что

$$\langle s_1, \mathbf{1}\rangle + \langle s_2, \mathbf{1}\rangle = \langle s_1 + s_2, \mathbf{1}\rangle, \quad \langle s_1, \mathbf{1}\rangle \cdot \langle s_2, \mathbf{1}\rangle = \langle s_1 s_2, \mathbf{1}\rangle.$$

Теперь мы можем доказать один из главных результатов работы.

Теорема 16. *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ таково, что для любой матрицы A над $\mathcal{S}$ верно, что* $\mathrm{f}(A) = \mathrm{GMc}(A)$. *Тогда $\mathcal{S}$ вложено в некоторое поле.*

Доказательство. Если нейтральные по сложению и умножению элементы полукольца $\mathcal{S}$ совпадают, то $\mathcal{S} = \{\mathbf{0}\}$, и поэтому $\mathcal{S}$ вложено в поле. Далее считаем, что $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$.

Согласно примеру 5 $\mathcal{S}$ является полукольцом с сокращением. Тогда из леммы 9 следует, что полукольцо $\mathcal{S}$ не содержит делителей нуля. Как показывает пример 13, полукольцо $\mathcal{S}$ не является антинегативным. Таким образом, найдутся ненулевые элементы $a, b \in \mathcal{S}$, для которых $a + b = \mathbf{0}$.

По теореме 14 полукольцо $\mathcal{S}$ обладает полукольцом частных $\mathrm{Quot}\,\mathcal{S}$, каждый ненулевой элемент которого обратим по умножению. Из замечания 15 следует, что $\mathcal{S}$ вложено в $\mathrm{Quot}\,\mathcal{S}$. Теперь нам достаточно показать, что любой элемент полукольца $\mathrm{Quot}\,\mathcal{S}$ обратим по сложению. Действительно, при любом $x \in \mathcal{S}$ и $y \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$ имеем $ay \neq \mathbf{0}$ и $\langle x, y\rangle + \langle bx, ay\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$. □

В завершение мы покажем, что вложенности полукольца $\mathcal{S}$ в поле недостаточно для совпадения функций факторизационного ранга и ранга Гондрана—Мину матриц над $\mathcal{S}$. Оказывается, что даже при дополнительном ограничении, что $\mathcal{S}$ является кольцом, могут найтись матрицы над $\mathcal{S}$ с различными факторизационным рангом и рангом Гондрана—Мину.

Пример 17. Пусть $\mathcal{S}$ — кольцо вещественных многочленов от трёх переменных $\mathbb{R}[x, y, z]$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ 0 & y & x \\ y & 0 & z \end{pmatrix}$$

над полукольцом $\mathcal{S}$. Тогда $\mathrm{GMc}(A) = 2$, $\mathrm{f}(A) = 3$.

Доказательство. Заметим, что первые два столбца матрицы A линейно независимы, поэтому $\mathrm{GMc}(A) \geqslant 2$. С другой стороны, по определению 1 равенство

$$z \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} -z \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

показывает, что столбцы матрицы A линейно зависимы в смысле Гондрана—Мину. Из определения 3 следует, таким образом, что $\mathrm{GMc}(A) = 2$.

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ 0 & y & x \\ y & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -z & 0 \\ 0 & y & x \\ y & 0 & z \end{pmatrix},$$

поэтому $\mathrm{f}(A) \leqslant 3$.

Теперь нам достаточно доказать, что $\mathrm{f}(A) \geqslant 3$. Предположим противное. Тогда найдутся матрицы $B \in \mathbb{B}^{3\times k}$ и $C \in \mathbb{B}^{k\times 3}$, для которых $k < 3$ и $A = BC$. Заметим, что классический ранг матрицы A в поле $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$ равен 2, поэтому в нашем случае $k = 2$ и строки матрицы C образуют базис линейного пространства, порождённого строками матрицы A. В этом случае строки матрицы C являются линейными комбинациями (с коэффициентами из поля $\operatorname{Quot} \mathcal{S}$) строк матрицы A и потому ортогональны строке $(z\ x\ \ -y)$. Таким образом, $c_{i1}z + c_{i2}x - c_{i3}y = 0$ при $i \in \{1, 2\}$. Из последнего равенства следует, что свободные члены многочленов c_{i1}, c_{i2} и c_{i3} равны нулю. Таким образом, свободные члены всех элементов матрицы C равны нулю. Аналогично показывается, что свободные члены всех элементов матрицы B также равны нулю. Отсюда следует, что многочлен $a_{11} = b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21}$ либо равен нулю, либо является суммой мономов степени, не меньшей 2. Противоречие с определением матрицы A завершает доказательство. □

Я благодарен моему научному руководителю А. Э. Гутерману за постоянное внимание к моей работе. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов МД-2502.2012.1 и РФФИ 12-01-00140-а.

Литература

[1] Шитов Я. Минимальный пример матрицы, различающей GM- и d-ранги в макс-алгебрах // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 231—268.

[2] Akian M., Gaubert S., Guterman A. Linear independence over tropical semirings and beyond // Tropical and Idempotent Mathematics. Int. Workshop TROPICAL-07, Moscow, Russia, August 25—30, 2007 / G. L. Litvinov, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2009. — (Contemp. Math.; Vol. 495). — P. 1—38.

[3] Akian M., Gaubert S., Guterman A. Tropical polyhedra are equivalent to mean payoff games // Int. J. Algebra Comput. — 2012. — Vol. 22, no. 1. — P. 1250001.

[4] Baccelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J. P. Synchronization and Linearity. — Wiley, 1992.

[5] Barvinok A., Johnson D. S., Woeginger G. J. The maximum traveling salesman problem under polyhedral norms // Integer Programming and Combinatorial Optimization. — Berlin: Springer, 1998. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 1412). — P. 195—201.

[6] Beasley L. B., Guterman A. E. Rank inequalities over semirings // J. Korean Math. Soc. — 2005. — Vol. 42, no. 2. — P. 223—241.

[7] Beasley L. B., Pullman N. J. Boolean-rank-preserving operators and Boolean-rank-1 spaces // Linear Algebra Appl. — 1984. — Vol. 59. — P. 55—77.

[8] Beasley L. B., Pullman N. J. Semiring rank versus column rank // Linear Algebra Appl. — 1988. — Vol. 101. — P. 33—48.

[9] Develin M., Santos F., Sturmfels B. On the rank of a tropical matrix // Discrete and Computational Geometry / E. Goodman, J. Pach, E. Welzl, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. — (MSRI Publ.).

[10] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[11] Gondran M., Minoux M. Graphs, Dioids and Semirings: New Models and Algorithms. — Springer Science+Business Media, 2008.