Локальная солнечность солнц в линейных нормированных пространствах*

А. Р. АЛИМОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexey.alimov@gmail.com

УДК 517.982.256

Ключевые слова: солнце, строгое солнце, крайняя точка, экстремальная отделимость, экстремальная гиперплоскость, брус, замкнутый промежуток, выпуклость по Менгеру.

Аннотация

Исследуется солнечность пересечений солнц с брусами (в частности, с замкнутыми шарами и экстремальными гиперполосами) в линейных нормированных пространствах. Показывается, что солнце в конечномерном (BM)-пространстве (в частности, в $\ell^1(n)$) монотонно линейно связно. Установлено, что непустое пересечение m-связного множества (в частности, солнца в произвольном двумерном пространстве или конечномерном (BM)-пространстве) с произвольным брусом является монотонно линейно связным солнцем. Аналогичные результаты получены для ограниченно компактных множеств в бесконечномерном пространстве. Показано, что непустое пересечение монотонно линейно связного множества в линейном нормированном пространстве с брусом является монотонно линейно связным α-солнцем.

Abstract

A. R. Alimov, Local connectedness of suns in normed linear spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 3—14.

The paper is concerned with solarity of intersections of suns with bars (in particular, with closed balls and extreme hyperstrips) in normed linear spaces. A sun in a finite-dimensional (BM)-space (in particular, in $\ell^1(n)$) is shown to be monotone path connected. A nonempty intersection of an m-connected set (in particular, a sun in a two-dimensional space or in a finite-dimensional (BM)-space) with a bar is shown to be a monotone path-connected sun. Similar results are obtained for boundedly compact subsets of infinite-dimensional spaces. A nonempty intersection of a monotone path-connected subset of a normed space with a bar is shown to be a monotone path-connected α-sun.

1. Введение

Напомним, что подмножество M линейного нормированного пространства X называется *солнцем* [11], если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует точка

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00442).

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 7, с. 3—14.

$y \in P_M x$, такая что $y \in P_M[(1-\lambda)y + \lambda x]$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (здесь и далее $P_M x$ — множество ближайших точек из M для x). Замкнутое множество $M \neq \varnothing$ называется *α-солнцем*, если для любой точки $x \notin M$ существует луч ℓ с вершиной x, такой что для любого $z \in \ell$ имеет место равенство $\rho(z, M) = \|z - x\| + \rho(x, M)$, где $\rho(x, M)$ — расстояние от точки x до множества M. (Ясно, что любое солнце является α-солнцем.)

В работе исследуются солнечность пересечений солнц и α-солнц с брусами и замкнутыми промежутками Π в линейных нормированных пространствах. По своей структуре брусы являются пересечениями гиперполос, порождённых экстремальными (крайними) точками сопряжённой сферы (точное определение даётся ниже). В задаче о солнечности пересечений солнц с такими подмножествами указанная экстремальная структура множеств Π важна и естественна. К примеру, если подпространство $H \subset \ell^\infty(n)$ не экстремально (т. е. порождено не экстремальным функционалом), то всегда можно построить [1] солнце M в $\ell^\infty(n)$, для которого пересечение $M \cap H$ не стягиваемо (и, следовательно, не является солнцем). Аналогичный результат верен и в общих пространствах (теорема 5).

Ниже показывается, что в широком классе линейных нормированных пространств (глобальная) солнечность влечёт локальную солнечность в естественной постановке при пересечении с множествами из самого естественного в этой ситуации класса — брусами и замкнутыми промежутками (в частности, с замкнутыми шарами и экстремальными гиперполосами).

Характеризации чебышёвских множеств, солнц и строгих солнц в $\ell^\infty(n)$ в терминах аппроксимативных свойств их пересечений с замкнутыми промежутками (брусами) получены в [1, 3]. Для строгих солнц в пространстве $C(Q)$ данный вопрос рассмотрен в [7]. В [5] полностью рассмотрен случай нормированной плоскости.

В конечномерном случае солнце всегда линейно связно и локально линейно связно (В. А. Кощеев [12], А. Л. Браун [17]); в бесконечномерном случае В. А. Кощеев построил пример несвязного солнца.

Всюду ниже X — действительное линейное нормированное пространство, X_n — линейное нормированное пространство конечной размерности n.

2. Промежутки и брусы

Сначала дадим определение промежутка в пространстве $C(Q)$. Естественным обобщением этого понятия на случай общих линейных нормированных пространств является понятие бруса [8]. Приведём соответствующие определения.

Для $x, y \colon Q \to \mathbb{R}$ определим *интервал*:

$$[\![x, y]\!] = \{z \in C(Q) \mid z(t) \in [x(t), y(t)] \text{ для всех } t \in Q\}. \tag{1}$$

Множество $\varnothing \neq \Pi \subset C(Q)$ называется *промежутком*, если включение $[\![x,y]\!] \subset \Pi$ выполнено для всех $x, y \in \Pi$. В [10] установлено, что подмножество $\Pi \subset C(Q)$ (Q — метрический компакт) является замкнутым промежутком, если и только если Π представимо в виде $\Pi = [\![x,y]\!]$, где $x, y\colon Q \to \bar{\mathbb{R}}$, $x \leqslant y$, x полунепрерывна сверху на Q, а y — снизу.

По аналогии с (1) определим *интервал* в произвольном линейном нормированном пространстве X:

$$[\![x,y]\!] := \{z \in X \mid \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leqslant \varphi(z) \leqslant \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \text{ для всех } \varphi \in \operatorname{ext} S^*\};$$

здесь $\operatorname{ext} S^*$ — множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S^* сопряжённого пространства X^* (аналогия объясняется тем, что каждый экстремальный функционал $f \in C(Q)^*$ (или $f \in C_0(Q)^*$) имеет вид $f(x) = \pm x(t)$, где $x \in C(Q)$ или $x \in C_0(Q)$, $t \in Q$).

Имея в своём распоряжении понятие интервала, мы можем по аналогии с вышесказанным определить понятие промежутка в линейном нормированном пространстве X: множество $\varnothing \neq \Pi \subset X$ называется *промежутком*, если для всех $x, y \in \Pi$ выполнено $[\![x,y]\!] \subset \Pi$.

Перейдём к определению бруса [8]. Для данных $M \subset X$ и $f \in X^*$ обозначим $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$. Пусть $p_f(M)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $f(M)$. Таким образом, $p_f(M) \subset \mathbb{R}$ — это замкнутый выпуклый числовой промежуток между $\inf f(M)$ и $\sup f(M)$. Пусть $D \subset X^*$ — произвольное подмножество сопряжённого пространства. По определению *D-брус* — это замкнутое выпуклое множество $M \subset X$ вида

$$M = \bigcap_{f \in D} f^{-1}\bigl(p_f(M)\bigr).$$

Любой D-брус — это пересечение замкнутых полупространств, поэтому D-брус является выпуклым (в обычном смысле) и замкнутым множеством. Если D — шар или сфера пространства X^*, то верно и обратное: всякое выпуклое замкнутое множество является D-брусом (это следует из теоремы отделимости). Пересечение любого числа и сумма конечного числа D-брусов снова является D-брусом.

Множество $M \subset X$ называется *брусом* [8], если M — D-брус для $D \subset \operatorname{ext} S^*$. Легко убедиться, что замкнутый шар является брусом. Если норма сопряжённого пространства строго выпукла (или если точки строгой дифференцируемости плотны на сфере сопряжённого пространства [22, 25]), то брусы — выпуклые замкнутые множества.

Отметим, что все брусы в $C(Q)$ — замкнутые промежутки [8]. Ниже мы покажем, что аналогичный результат верен для множеств с непустой внутренностью в любом конечномерном пространстве X_n. Включение $[\![x,y]\!] \subset \Pi$ при любых $x, y \in \Pi$ (Π — брус) очевидно в любом X (т. е. брус заведомо является замкнутым промежутком).

Брусы естественно возникают в задачах отделимости экстремальными функционалами, а также в теории приближений при приближении гладкими функциями при ограничении на производную. Интересно отметить, что брусы обладают следующим характеристическим свойством: они строго экстремально отделяются (т. е. строго отделяются экстремальным функционалом из S^*) от любой точки, им не принадлежащей [8]; при этом для двумерных пространств, а также для пространств типа $C(Q)$ имеет место аналог теоремы отделимости: два непересекающихся бруса строго отделяются экстремальным функционалом [8]. В общем случае (например, в $L^1(\Omega)$, $|\Omega| \geqslant 3$) это утверждение неверно.

Ниже мы рассматриваем вопрос о солнечности пересечения солнц с брусами. Частный случай пересечения солнц и чебышёвских множеств с шарами рассматривался многими авторами начиная с Д. Вулберта, Б. Брозовского, Л. П. Власова и В. А. Кощеева.

Попутно отметим, что если солнце M обладает свойством V-солнечности (т. е. его пересечение с любым замкнутым шаром является солнцем), то при пересечении M с брусами солнечность не обязательно сохраняется: в некоторых X_n можно построить пример чебышёвского солнца (его пересечение с любым шаром всегда связно), такого что при пересечении с некоторой прямой (брусом) получается несвязное множество (см. замечание 3 ниже).

3. Монотонно линейно связные и $\mathfrak{m}$-связные множества. $(\boldsymbol{BM})$-пространства

Для ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ через $\mathrm{m}(M)$ обозначим пересечение всех замкнутых шаров, содержащих M (следуя [16], мы называем $\mathrm{m}(M)$ *оболочкой Банаха—Мазура* множества M). Множество $M \subset X$ называется m-*связным* (*связным по Менгеру*) [16], если

$$\mathrm{m}(\{x,y\}) \cap M \neq \{x,y\}$$

для любых различных точек $x, y \in M$. Для краткости далее вместо $\mathrm{m}(\{x,y\})$ пишем $\mathrm{m}(x,y)$.

К примеру, в пространстве $X = C(Q)$ структура $\mathrm{m}(x,y)$, $x, y \in X$, вполне ясна:

$$\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!]. \tag{2}$$

Аналогичное представление также верно и в пространстве $C_0(Q)$ (Q — локально компактное хаусдорфово пространство), это следует из характеризации экстремальных элементов («значение в точке») единичной сферы сопряжённого пространства к $C_0(Q)$, полученной Б. Брозовским, Ф. Дойчем и П. Моррисом [14].

Следуя [20], введём в рассмотрение класс (*MeI*) пространств X:

$$\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!] \quad \text{для всех} \quad x, y \in X \tag{MeI}$$

(обозначение *MeI* происходит от английского «the hull $\mathrm{m}(x,y)$ equals the interval $[\![x,y]\!]$ for all x, y»).

Сразу заметим, что включение

$$\mathrm{m}(x,y) \supset [\![x,y]\!] \tag{3}$$

имеет место в любом X (см., например, [20, теорема 3.1]). Действительно, замкнутое выпуклое множество M является пересечением шаров, если и только если для любой точки вне M найдётся замкнутый шар, содержащий M, но не содержащий эту точку [23, с. 55] (см. также [25]). Теперь осталось вспомнить понятный результат (вытекающий из того, что $\|x\| = \sup\limits_{f\in \operatorname{ext} S^*} f(x)$) о том, что точку, не принадлежащую замкнутому шару, всегда можно строго отделить от шара посредством экстремальной гиперплоскости.

Замечание 1. Равенство

$$\mathrm{m}(x,y) = [\![x,y]\!] \tag{4}$$

можно установить для достаточно широкого класса банаховых пространств. К. Франкетти и С. Роверси [20, теорема 3.2] показали, что (2) имеет место для пространств, на единичной сфере которых точки гладкости образуют всюду плотное множество. К таким пространствам относятся слабо асплундовские пространства (в частности, компактно слабо порождённые пространства, а значит, сепарабельные пространства и рефлексивные пространства). Также отметим, что если пространство X таково, что $\operatorname{ext} S^*$ лежит в замыкании множества w^*-полуострых[1] точек шара B^* (*условие Морено*), то $[\![x,y]\!] = \mathrm{m}(x,y)$ для всех $x,y \in X$. Такому условию, в частности, удовлетворяют конечномерные пространства и пространства со свойством пересечения Мазура. Действительно, предположим, что для пространства, удовлетворяющего условию Морено, выполнено $0 \in \mathrm{m}(x,y)$, $0 \notin [\![x,y]\!]$ при некоторых $x,y \in X$. Поскольку $0 \notin [\![x,y]\!]$, то $\inf f([\![x,y]\!]) > 0$ при некотором $f \in \operatorname{ext} S^*$, а следовательно, и при некотором f, являющемся w^*-полуострой точкой сферы S^*. В [21] показано, что в банаховом пространстве функционал $f \in S^*$ является w^*-полуострой точкой, если и только если для любого ограниченного множества C, такого что $\inf f(C) > 0$, найдётся такой замкнутый шар B', что $C \subset B'$ и $0 \notin B'$. Следовательно, в нашей ситуации найдётся шар B', содержащий $[\![x,y]\!]$, но не содержащий 0. Противоречие с тем, что $0 \in \mathrm{m}(x,y)$.

Отметим, что условие Морено не выполнено для пространства ℓ^1 (на единичном шаре пространства ℓ^∞ отсутствуют w^*-полуострые точки [24]), но однако согласно указанной теореме Франкетти—Роверси в ℓ^1 равенство (2) имеет место.

В конечномерном случае равенство $[\![x,y]\!] = \mathrm{m}(x,y)$ установлено А. Брауном [16]. Также отметим, что (2) имеет место для пространств с антиподальным единичным шаром.

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X. Следуя [15] говорим, что кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f\big(k(\tau)\big)$ является монотонной функцией по τ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$.

[1] Напомним, что точка $f \in S^*$ называется *w^*-полуострой* точкой сопряжённого шара B^* (см., например, [21]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой w^*-срез $S\ell$ шара B^*, что $\operatorname{diam}(\{f\} \cup S\ell) < \varepsilon$. Здесь $S\ell(B^*,x,\delta) := \{g \in S^* \mid g(x) > 1-\delta\}$, $0<\delta<1$, $x \in X$.

Замкнутое подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным* [4], если любые две точки из M можно соединить непрерывной монотонной кривой (дугой) $k(\cdot) \subset M$. Понятно, что любая монотонная кривая является простой (жордановой). Отметим, что монотонно линейно связное множество всегда V-связно (т. е. его пересечение с любым замкнутым (а следовательно, и с открытым [11]) шаром связно; ср. [15, утверждение 1.3]). Также отметим, что монотонно линейно связное множество является α-солнцем [6] (в конечномерном пространстве — солнцем [16]).

Замечание 2. Используя (3), несложно проверить, что монотонно линейно связное множество необходимо m-связно. Обратное утверждение неверно даже для замкнутых множеств; соответствующий пример в $C[0,1]$ предложен К. Франкетти и С. Роверси [20] (см. также [4]). Однако в c_0 и в произвольном конечномерном пространстве X_n эти свойства эквивалентны для замкнутых множеств (см. [2, теорема 1, предложение 6]); утверждение для X_n следует из (3), (4) и [4, лемма 2]). Некоторые достаточные условия монотонной линейной связности m-связного подмножества линейного нормированного пространства даны в [4, лемма 2]. Отметим, что пространствах X_n со свойством $\overline{\operatorname{ext} S^*} = S^*$ класс монотонно линейно связных (m-связных) замкнутых множеств совпадает с классом замкнутых выпуклых множеств [25].

Следуя [20], рассмотрим класс действительных линейных нормированных пространств X:

существует подмножество $F = (f_i)_{i\in I} \subset \operatorname{ext} S^*$, $\operatorname{card} I \leqslant \aleph_0$, такое что $F \cup (-F)$ w^*-плотно в $\operatorname{ext} S^*$ $\qquad$ (Ex-w^*s)

(обозначение Ex-w^*s происходит от немецкого «die Extrempunktmenge der konjugierten Einheitskugel ist w^*-separabel»).

Сразу отметим, что любое пространство из класса (Ex-w^*s) имеет w^*-сепарабельный единичный шар. Действительно, так как единичный шар B^* пространства X^* является слабым* замыканием выпуклой оболочки множества $\operatorname{ext} S^*$, то w^*-сепарабельность множества $\operatorname{ext} B^*$ (границы Джеймса) влечёт w^*-сепарабельность шара B^* и, как следствие [19, с. 253], w^*-сепарабельность пространства X^*. В [19, утверждение (2)] показано, что w^*-сепарабельность шара B^* эквивалентна тому, что пространство X изометрически изоморфно подпространству пространства ℓ^∞ (известно, что последнее выполнено для всех сепарабельных банаховых пространств). Также отметим, что в [19] предъявлен пример такого банахова пространства, что X^* w^*-сепарабельно, а шар B^* — нет.

Хорошо известно, что если X — сепарабельное линейное нормированное пространство, то w^*-топология единичного шара B^* сопряжённого пространства X^* метризуема. Отсюда следует, что любое сепарабельное пространство лежит в классе (Ex-w^*s). Также отметим, что класс (Ex-w^*s) содержит несепарабельное пространство ℓ^∞ (как пространство непрерывных функций на стоун-чеховской компактификации натурального ряда). При этом $C(Q)$ на несепарабельном Q и $c_0(\Gamma)$ на несчётном Γ не лежат в (Ex-w^*s).

Кратко суммируя сказанное выше относительно пространств классов (*MeI*) и (*Ex-*w^*s), отметим, что класс (*MeI*) $\cap$ (*Ex-*w^*s) содержит все сепарабельные банаховы пространства (в частности, все пространства $C(Q)$ на метризуемом компакте Q) и несепарабельное пространство ℓ^∞).

Напомним, что линейное нормированное пространство X называется (*BM*)-*пространством* [16], если

$$B(0,\|x\|)\cap(\mathrm{m}(x,y)\setminus\{x\})\neq\varnothing,\quad\text{если}\quad x\neq 0\quad\text{и}\quad [x,x-y]\cap\mathring{B}(0,\|x\|)=\varnothing$$

(здесь и далее $B(x,r)$ ($\mathring{B}(x,r)$) — шар (открытый шар) с центром x радиуса r).

Класс (*BM*)-пространств введён А. Брауном [16], содержит в себе все гладкие пространства, все двумерные пространства с полигональным единичным шаром, пространство $\ell^\infty(n)$, c_0, c, ℓ^∞, все замкнутые идеалы пространства $C(Q)$, все подрешётки $C(Q)$ с единицей [20], а также замкнут по отношению к формированию конечной ℓ^∞-прямой суммы [16, разд. 5] и бесконечной c_0-прямой суммы сепарабельных (*BM*)-пространств [20, теорема 8.7]. Характеризация полиэдральных $X_n \in$ (*BM*) получена А. Брауном в [18].

А. Браун [16] показал, что солнца в конечномерных (*BM*)-пространствах m-связны и при этом удовлетворяют очень высоким когомологическим условиями связности (являясь clc^∞-когомологически локально-связными и R_δ-множествами в смысле Ароншайна (в частности, P-ацикличными множествами[1])). Бесконечномерный случай рассматривается в [20].

Отметим следующий результат, оказавшийся не замеченным в геометрической теории приближений; он усиливает теорему 4.2 работы [16], гарантируя не только m-связность, но и монотонную линейную связность солнц в соответствующих случаях (см. замечание 2). Теорема 1 следует из [4, лемма 2] с учётом замечания 2.

Теорема 1. *Пусть* $X_n \in$ (*BM*) *и* $M \subset X_n$ — *солнце. Тогда* M *монотонно линейно связно.*

В связи с этим результатом отметим, что в пространстве $C(Q)$ (Q — метризуемый компакт) любое ограниченно компактное строгое солнце монотонно линейно связно [4] (в c_0 любое солнце монотонно линейно связно [2]). Характеризация полиэдральных X_n, в которых каждое солнце монотонно линейно связно (m-связно), получена А. Брауном [18]. Отметим также, что в двумерном пространстве каждое солнце (в частности, чебышёвское множество) монотонно линейно связно [5].

4. Солнечность пересечений солнц с брусами

Вопрос об аппроксимативных и геометрических свойствах пересечений солнц и строгих солнц с промежутками (брусами) в пространстве $C(Q)$ рас-

[1] Напомним, что множество M *ациклично*, если оно непусто, компактно и его группы гомологий H_q, $q \geqslant 1$, и приведённая группа $\tilde{H}_0$ тривиальны. Множество M называется P-*ацикличным*, если для каждого x множество его ближайших точек $P_M x$ из M ациклично.

сматривался в [3,4,7]. Аппроксимативные свойства пересечений солнц, строгих солнц и чебышёвских множеств с интервалами на нормированной плоскости изучались в [5].

В теоремах 2—4 даются условия, обеспечивающие солнечность пересечений солнц с брусами. Естественность бруса в данной задаче показана в теореме 5.

Теорема 2. *Пусть* $\varnothing \neq M \subset X_n$ — *замкнутое* m-*связное множество (в частности,* M — *солнце в произвольном двумерном пространстве* X_2 *или в* $X_n \in (BM)$*), и пусть* Π — *брус в* X_n*,* $M \cap \Pi \neq \varnothing$*. Тогда* $M \cap \Pi$ — *монотонно линейно связное солнце в* X_n*.*

Теорема 3. *Пусть* $X \in (MeI) \cap (Ex\text{-}w^*s)$ *(в частности,* X — *сепарабельное банахово пространство),* $M \neq \varnothing$ — *ограниченно компактное* m-*связное множество, и пусть* Π — *брус в* X*,* $M \cap \Pi \neq \varnothing$*. Тогда* $M \cap \Pi$ — *монотонно линейно связное солнце в* X*.*

Теорема 4. *Пусть* $M \neq \varnothing$ — *монотонно линейно связное множество в линейном нормированном пространстве* X*, и пусть* Π — *брус в* X*,* $M \cap \Pi \neq \varnothing$*. Тогда* $M \cap \Pi$ — *монотонно линейно связное* α*-солнце в* X*.*

Замечание 3. Отметим существенность требования монотонной линейной связности (m-связности) солнц в теоремах 2—4. Именно, для любого $n \geqslant 3$ можно построить пример конечномерного пространства X_n, в котором существует не монотонно линейно связное чебышёвское множество (конечно, являющееся солнцем). Рассмотрим пространства X_n со свойством $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$. Р. Фелпс [25] показал, что свойство $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ выполнено для пространства X_n, если и только если каждое выпуклое ограниченное замкнутое подмножество X_n представимо как пересечение замкнутых шаров. Как следствие, в таком пространстве монотонная линейная связность замкнутого множества равносильна его выпуклости. Для любого $n \geqslant 3$ И. Г. Царьков [13] построил пример пространства X_n' со свойством $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$, содержащего *неограниченное* невыпуклое чебышёвское множество M' (при этом любое *ограниченное* чебышёвское множество в таком X_n' выпукло). Таким образом, M' служит примером не монотонно линейно связного чебышёвского солнца.

В пространстве X_n со свойством $\overline{\operatorname{ext}} S^* = S^*$ класс брусов совпадает с классом выпуклых замкнутых множеств [8]. Имея в распоряжении невыпуклое чебышёвское солнце M' в X_n', мы можем найти такую прямую (брус), пересечение которой с M' несвязно и, следовательно, по упомянутой выше теореме Кощеева—Брауна не может быть солнцем.

Теорема 5. *Пусть* $\Pi \neq \varnothing$ — *замкнутое множество в* X_n*. Следующие утверждения эквивалентны*:

а) Π — *брус (замкнутый промежуток)*;

б) $\Pi \cap M$ — *монотонно линейно связное солнце для любого монотонно линейно связного солнца* M*,* $M \cap \Pi \neq \varnothing$;

в) $\Pi \cap M$ — *солнце для любого монотонно линейно связного солнца* M*,* $M \cap \Pi \neq \varnothing$;

г) $\Pi\cap M$ — *монотонно линейно связное солнце для любой монотонной дуги* γ, $\gamma\cap\Pi\neq\varnothing$.

В теореме 5 требование монотонной линейной связности существенно (см. замечание 3). Аналогичный результат для пространства $\ell^\infty(n)$ получен в [3], для нормированной плоскости — в [5]. Солнечность пересечений строгих солнц с замкнутыми телесными промежутками (брусами) в $C(Q)$ рассмотрена в [7].

Для доказательства теоремы 5 нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Предложение 1. *В X_n в классе множеств с непустой внутренностью брусы — это в точности замкнутые промежутки.*

Для $C(Q)$ аналог предложения 1 без предположения о непустоте внутренности был установлен в [8]. Рассмотрим случай X_n. Выше было отмечено, что любой брус является замкнутым промежутком. Установим обратное утверждение. Так как $X_n \in (Ex\text{-}w^*s)$, то, следуя А. Брауну [16], на X_n можно ввести ассоциированную норму, зафиксировав суммируемую последовательность положительных чисел (α_i) и набор функционалов $(f_i)\subset S^*$ из определения класса $(Ex\text{-}w^*s)$, следующим образом:

$$|x|=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i|f_i(x)|,\quad x\in X.$$

Следуя Г. Буземану, множество M в метрическом пространстве (X,d) назовём *d-выпуклым*, если из того, что $x,y\in M$, следует, что $\langle x,y\rangle_d\subset M$, где $\langle x,y\rangle_d := \{z\in M \mid d(x,y)=d(x,z)+d(z,y)\}$ ($\langle x,y\rangle_d$ — d-отрезок). А. Браун [16] показал, что

$$z\in \mathrm{m}(x,y),\quad \text{если и только если}\quad z\in\langle x,y\rangle_{|\cdot|}. \tag{5}$$

Согласно (3) любая экстремальная гиперплоскость вместе с произвольными точками x, y содержит и их оболочку Банаха—Мазура $\mathrm{m}(x,y)$, а значит, и интервал $[\![x,y]\!]$. Поэтому согласно (5) экстремальная гиперплоскость всегда $d_{|\cdot|}$-выпукла (т. е. d-выпукла относительно ассоциированной нормы $|\cdot|$).

Теперь для доказательства предложения 1 осталось воспользоваться следующим результатом Германа—Солтана [9, теорема 6.10]: всякое отличное от $\mathbb{R}^n$ замкнутое d-выпуклое тело представляется в виде пересечения некоторого семейства замкнутых d-выпуклых полупространств.

Доказательство теоремы 3. Поскольку любое конечномерное пространство лежит в $(\mathit{MeI})\cap(Ex\text{-}w^*s)$, то теорема 2 следует из теоремы 3.

Пусть $x,y\in M\cap\Pi$. Поскольку любой брус является интервально-выпуклым множеством (в том смысле, что из того, что $x,y\in M$, следует, что $[\![x,y]\!]\subset M$), а в пространстве $X\in(\mathit{MeI})$ всегда выполнено $[\![x,y]\!]=\mathrm{m}(x,y)$, то $M\cap\Pi$ m-связно. Понятно также, что $M\cap\Pi$ ограниченно компактно. Далее воспользуемся бесконечномерным аналогом теоремы Брауна [16, теорема 3.6] (см. [4, лемма 4]), согласно которому непустое ограниченно компактное m-связное подмножество пространства $X \in (MeI) \cap (Ex\text{-}w^*s)$ P-ациклично (и следовательно, является солнцем в X по известной теореме Власова [11, теорема 4.4]). Монотонная линейная связность m-связного пересечения $M \cap \Pi$ следует из [4, лемма 2]. □

Доказательство теоремы 4. Как и выше, воспользуемся тем, что в наших условиях ограниченно компактное m-связное множество монотонно линейно связно [4, лемма 2]. При пересечении монотонно линейно связного множества с брусом (последний всегда является интервально-выпуклым множеством) свойство монотонной линейной связности сохраняется. Для завершения доказательства осталось воспользоваться результатом из [6], согласно которому монотонно линейно связное множество в произвольном линейном нормированном пространстве X является α-солнцем. □

Доказательство теоремы 5. Импликация а) $\Longrightarrow$ б) доказана в теореме 2.

Установим справедливость импликации г) $\Longrightarrow$ а). Предположим, что множество $\Pi \subset X$ не является брусом. По предложению 1 в X_n брусы — это замкнутые промежутки. Тогда по определению замкнутого промежутка $[\![x, y]\!] \not\subset \Pi$ при некоторых $x, y \in \Pi$. Следовательно, найдётся непрерывная монотонная кривая (дуга) $k(\cdot)$, соединяющая x и y и такая, что $k(\cdot) \not\subset \Pi$. Ясно, что $k(\cdot) \subset [\![x, y]\!]$ и что кривая $k(\cdot)$ компактна. Согласно [15, предложение 1.3], если $k(t_1), k(t_2) \in P_{k(\cdot)}x$ при произвольном фиксированном $x \notin k(\cdot)$, то $k(\tau) \in P_{k(\cdot)}x$ при всех $\tau \in [t_1, t_2]$. Как следствие, $P_{k(\cdot)}x$ — простая замкнутая монотонная кривая. Вспоминая, что такая кривая всегда ациклична, имеем, что $k(\cdot)$ — P-ацикличное множество (причём его пересечение с любым замкнутым шаром тоже ациклично). По известной теореме Власова [11, теорема 4.4] в банаховом пространстве ограниченно компактное P-ацикличное множество всегда является солнцем. По упомянутой теореме Кощеева—Брауна солнце в X_n всегда линейно связно. Итак, если множество Π не является брусом, то всегда можно найти такое компактное солнце, пересечение которого с Π не является солнцем. □

В заключение сформулируем следующую проблему.

Проблема. Известно, что пространство $\ell^1(3)$ не лежит в классе (*BM*). Как следствие [18], в нём существует не монотонно линейно связное солнце. Верно ли что в $\ell^1(3)$ все чебышёвские множества монотонно линейно связны?

Автор благодарит И. Г. Царькова, А. А. Васильеву, Л. Веселы, Я.-Д. Хардтке и Х. П. Морено за обсуждения и ценные замечания, а также А. В. Михалёва за внимание к работе.

Литература

[1] Алимов А. Р. Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ // Функц. анализ и его прил. — 2005. — Т. 39, № 1. — С. 1—10.

[2] Алимов А. Р. Связность солнц в пространстве c_0 // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 4. — С. 3—18.

[3] Алимов А. Р. Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышёвских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$ // Изв. РАН. Сер. мат. — 2006. — Т. 70, № 5. — С. 3—12.

[4] Алимов А. Р. Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Мат. сб. — 2006. — Т. 197, № 9. — С. 3—18.

[5] Алимов А. Р. Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств и солнц на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — № 4. — С. 46—49.

[6] Алимов А. Р. Монотонно линейно связное чебышёвское множество является солнцем // Мат. заметки. — 2012. — Т. 91, № 2. — С. 305—307.

[7] Алимов А. Р. Ограниченная строгая солнечность строгих солнц в пространстве $C(Q)$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — № 6.

[8] Алимов А. Р., Протасов В. Ю. Отделимость выпуклых множеств экстремальными гиперплоскостями // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 3—12.

[9] Болтянский В. Г., Солтан П. С. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. — Кишинёв: Штиинца, 1978.

[10] Васильева А. А. Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — Т. 68, № 4. — С. 75—116.

[11] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, № 6 (174). — С. 3—66.

[12] Кощеев В. А. Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Мат. заметки. — 1976. — Т. 19, № 2. — С. 267—278.

[13] Царьков И. Г. Ограниченные чебышёвские множества в конечномерных банаховых пространствах // Мат. заметки — 1984. — Т. 36, № 1. — С. 73—87.

[14] Brosowski B., Deutsch F. On some geometric properties of suns // J. Approx. Theory. — 1974. — Vol. 10, no. 3. — P. 245—267.

[15] Brosowski B., Deutsch F., Lambert J., Morris P. D. Chebyshev sets which are not suns // Math. Ann. — 1974. — Vol. 212, no. 1. — P. 89—101.

[16] Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional // Math. Ann. — 1987. — Vol. 279. — P. 87—101.

[17] Brown A. L. On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces // Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. — 1988. — Vol. 20. — P. 1—15.

[18] Brown A. L. Suns in polyhedral spaces // Seminar of Math. Analysis. Univ. Malaga and Seville (Spain), Sept. 2002—Feb. 2003. Proceedings / D. G. Álvarez, G. Lopez Acedo, R. V. Caro, eds. — Sevilla: Univ. Sevilla, 2003. — P. 139—146.

[19] Dancer E., Sims B. Weak star separability // Bull. Austral. Math. Soc. — 1979. — Vol. 20, no. 2. — P. 253—257.

[20] Franchetti C., Roversi S. Suns, M-connected sets and P-acyclic sets in Banach spaces: Preprint No. 50139. — Inst. Matematica Applicata «G. Sansone», 1988.

[21] Giles J. R. The Mazur intersection problem // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13, no. 3-4. — P. 739—750.

[22] Giles J. R., Gregory D. A., Sims B. Characterisation of normed linear spaces with Mazur's intersection property // Bull. Austral. Math. Soc. — 1978. — Vol. 18. — P. 105—123.

[23] Granero A. S., Jiménez-Sevilla M., Moreno J. P. Intersections of closed balls and geometry of Banach spaces // Extracta Math. — 2004. — Vol. 19, no. 1. — P. 55—92.

[24] Moreno J. P., Schneider R. Continuity properties of the ball hull mapping // Nonlinear Anal. — 2007. — Vol. 66. — P. 914—925.

[25] Phelps R. R. A representation theorem for bounded convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 11. — P. 976—983.