# Автоморфизмы стабильных линейных групп над коммутативными локальными кольцами с 1/2

**А. С. АТКАРСКАЯ**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: atkarskaya.agatha@gmail.com

УДК 512.55+512.54

**Ключевые слова:** автоморфизм, стабильная линейная группа, локальное кольцо.

**Аннотация**

В работе дано описание автоморфизмов стабильных линейных групп $\mathrm{E}(R)$ и $\mathrm{GL}(R)$ над коммутативным локальным кольцом $R$ с $1/2$.

**Abstract**

*Automorphisms of stable linear groups over commutative local rings with* 1/2*, A. S. Atkarskaya*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 15—30.

In the paper, we describe automorphisms of stable linear groups $\mathrm{E}(R)$ and $\mathrm{GL}(R)$ over commutative local rings $R$ with $1/2$.

Описание автоморфизмов линейных групп началось с работы О. Шрайера и Б. Л. ван дер Вардена [12], в которой были описаны автоморфизмы группы $\mathrm{PSL}_n$, $n \geqslant 3$, над произвольным полем. Затем Ж. Дьёдонне и Ч. Риккартом был введён метод инволюций, с помощью которого в [6, 11] были описаны автоморфизмы группы $\mathrm{GL}_n$, $n \geqslant 3$, над телом.

Затем Л. Хуа и И. Райнером [8] было получено описание автоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. В [9,13] их результат был обобщён на некоммутативные области главных идеалов.

О. О'Мирой [10] при помощи разработанного им метода вычетных пространств были описаны автоморфизмы $\mathrm{GL}_n$, $n \geqslant 3$, над областями целостности. Независимо с помощью метода инволюций Янь Шицзянь [15] также описал автоморфизмы группы $\mathrm{E}_n(R)$, $n \geqslant 3$, где $R$ — область целостности характеристики, отличной от 2.

В [5] было получено описание автоморфизмов $\mathrm{GL}_n$, $n \geqslant 3$, над коммутативным локальным кольцом с $1/2$. В. Уотерхаусом [14] было получено описание автоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n$, $n \geqslant 3$, над произвольными коммутативными кольцами с $1/2$, а вскоре после этого В. М. Петечук [4] описал автоморфизмы $\mathrm{GL}_n$, $n \geqslant 4$, над произвольным коммутативным кольцом.

И. З. Голубчиком и А. В. Михалёвым [2] было дано описание изоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(R)$ в случае ассоциативного кольца $R$ с $1/2$ (без предположения о коммутативности) при $n \geqslant 3$, и независимо в то же время подобные результаты (другими методами) были получены Е. И. Зельмановым [3]. В 1997 г. И. З. Голубчик [1] продолжил описание изоморфизмов $\mathrm{GL}_n(R)$ на случай произвольного ассоциативного кольца при $n \geqslant 4$.

Таким образом, в перечисленных работах рассматривались линейные группы, которые являются группами автоморфизмов свободных модулей конечного ранга. Мы перешли к изучению групп автоморфизмов свободных модулей бесконечно ранга, в представленной статье рассматриваются модули счётного ранга. В данной работе дано описание автоморфизмов стабильных линейных групп $\mathrm{E}(R)$ и $\mathrm{GL}(R)$ над коммутативным локальным кольцом $R$ с $1/2$.

## 1. Основные определения

Пусть $R$ — ассоциативное кольцо с единицей. Следующие определения взяты из [7].

**Определение 1.** Обозначим через $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ множество матриц со счётным числом строк и столбцов, у которых вне главной диагонали есть лишь конечное число ненулевых элементов, а также существует такой номер $n$, что для любого $i \geqslant n$ элементы матрицы $r_{ii}$ равны $a$, $a \in R$.

Ясно, что $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ — кольцо.

Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. Мы отождествим $A$ с элементом из $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ по следующему правилу: матрицу $A$ запишем в левый верхний угол, начиная с позиции $(n, n)$ на диагонали запишем 1, а на всех остальных местах запишем 0.

Сохраним обозначение $\mathrm{GL}_n(R)$ для получившихся подмножеств $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Ясно, что $\mathrm{GL}_n(R)$ — подгруппы группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, а также что для $m \geqslant n$ мы имеем $\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{GL}_m(R)$.

**Определение 2.** Положим $\mathrm{GL}(R) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{GL}_n(R)$ $(\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R))$. Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Назовём её *стабильной линейной группой*.

Аналогично можно вложить в $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ подгруппы элементарных матриц $\mathrm{E}_n(R)$.

**Определение 3.** Положим $\mathrm{E}(R) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{E}_n(R)$ $(\mathrm{E}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R))$. Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Назовём её *стабильной элементарной группой*.

Обозначим через $\mathrm{Mat}(R)$ матрицы со счётным числом строк и столбцов, такие что в каждом столбце содержится лишь конечное число ненулевых элементов (кольцо эндоморфизмов свободного модуля счётного ранга при фиксации базиса).

Обозначим через $\mathrm{D}$ группу диагональных матриц из $\mathrm{Mat}_\infty(R)$.

Пусть $\sigma\colon R \to R$, $B \in \mathrm{GL}(R)$. Обозначим через $B^\sigma$ поэлементное применение отображения $\sigma$ к матрице $B$.

Через $R^*$ обозначим группу обратимых элементов кольца $R$, через $E$ — единичную матрицу счётного размера, через $E_n$ — единичную матрицу размера $n \times n$. При записи блочных матриц будем писать только сами блоки, на пустых местах предполагаются нулевые элементы.

Мы будем рассматривать автоморфизмы групп $\mathrm{E}(R)$ и $\mathrm{GL}(R)$. Следующие автоморфизмы групп $\mathrm{E}(R)$ и $\mathrm{GL}(R)$ назовём *стандартными*:

1) $i_A$ — сопряжение обратимой матрицей $A$ из $\mathrm{Mat}(R)$, которое является автоморфизмом группы $\mathrm{E}(R)$ или $\mathrm{GL}(R)$ соответственно,
2) кольцевой автоморфизм $i_\sigma$, $i_\sigma(B) = B^\sigma$, $\sigma$ — автоморфизм кольца $R$,
3) контрградиентный автоморфизм $\Lambda$, $\Lambda(B) = (B^t)^{-1}$.

## 2. Вспомогательные утверждения

Далее всюду будем предполагать, что $R$ — коммутативное локальное кольцо с $1/2$. Элемент $A$ из $\mathrm{GL}(R)$ будем называть *инволюцией*, если $A^2 = E$. Пусть $M$ — свободный модуль счётного ранга. Каждой инволюции $A$ можно поставить в соответствие два подмодуля модуля $M$:

$$N(A) = \{x \in M \mid A(x) = -x\},$$
$$P(A) = \{x \in M \mid A(x) = x\}.$$

Очевидно, что $N(A) \cap P(A) = 0$ и

$$x = \frac{1}{2}\bigl(x - A(x)\bigr) + \frac{1}{2}\bigl(x + A(x)\bigr),$$

т. е. мы получаем, что $M = N(A) \oplus P(A)$. Таким образом, $N(A)$ и $P(A)$ — проективные модули. Но всякий проективный модуль над локальным кольцом является свободным, значит, $N(A)$ и $P(A)$ — свободные модули. Следовательно, в $M$ существует базис, в котором инволюция $A$ является диагональной матрицей с $\pm 1$ на диагонали, причём элементов $-1$ лишь конечное число, а матрица перехода к этому базису принадлежит $\mathrm{GL}(R)$, так как под действием $A$ преобразовывалось только конечное число элементов в исходном базисе. Будем называть такой вид инволюции *каноническим*. Количество элементов $-1$ будем называть *рангом* инволюции. Очевидно, что ранг корректно определён, т. е. не зависит от базиса, в котором записана инволюция. Также любые две инволюции одного ранга из $\mathrm{GL}(R)$ сопряжены матрицей из $\mathrm{GL}(R)$.

Следующие три утверждения взяты из [5].

**Предложение 1.** *Пусть $R$ — локальное кольцо с $1/2$. Если $\{A_i\}_{i=1}^k$ — множество попарно перестановочных инволюций, то существует матрица $P \in \mathrm{GL}_n(R)$, такая что инволюции $P^{-1}A_iP$ имеют канонический вид для всех $i = 1, \ldots, k$.*

**Следствие 1.** *В любом коммутативном множестве инволюций из* $\mathrm{GL}_n(R)$ *содержится не более* $2^n$ *элементов.*

**Предложение 2.** *Пусть* $R$ *— локальное кольцо. Тогда* $\mathrm{SL}_n(R) = \mathrm{E}_n(R)$, $\mathrm{GL}(R) = \mathrm{DE}_n(R)$, *где* $\mathrm{D}$ *— группа диагональных матриц.*

Пусть нам дано не более чем счётное множество коммутирующих инволюций из $\mathrm{GL}(R)$. Тогда они все приводятся с помощью некоторой замены базиса к диагональному виду с $\pm 1$ на диагонали, причём элементов $-1$ лишь конечное число. Если инволюций конечное число, то из предложения 1 следует, что сопрягающую матрицу можно выбрать из $\mathrm{GL}(R)$. Как показывает следующая лемма, на самом деле в последнем случае сопрягающую матрицу можно выбрать из $\mathrm{E}(R)$.

**Лемма 1.** *Если* $A = C^{-1}BC$, *где* $A, B, C \in \mathrm{GL}(R)$, *то существует такая матрица* $C' \in \mathrm{E}(R)$, *что* $A = C'^{-1}BC'$.

**Доказательство.** Найдётся такое $n$, что $A$, $B$ и $C$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \hat{A} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \hat{B} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \hat{C} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \in \mathrm{GL}_n(R)$. Так как $\hat{C}$ обратима, то её определитель $\det \hat{C}$ также обратим. Значит, матрица

$$\hat{C}' = \begin{pmatrix} \hat{C} & \\ & \dfrac{1}{\det \hat{C}} \end{pmatrix}$$

имеет определитель 1, т. е. принадлежит $\mathrm{SL}_{n+1}(R)$, а значит, также принадлежит $\mathrm{E}_{n+1}(R)$ (так как для локального кольца $\mathrm{SL}_m(R) = \mathrm{E}_m(R)$). Получаем, что

$$C' = A = \begin{pmatrix} \hat{C}' & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \in E(R).$$

Но так как $\hat{A} = \hat{C}^{-1}\hat{B}\hat{C}$, то выполнено равенство $A = C'^{-1}BC'$, следовательно, построенная матрица $C'$ — это как раз та матрица, существование которой требовалось доказать. $\square$

Очевидно, что имеют место следующие две леммы.

**Лемма 2.** *Всякая инволюция из* $\mathrm{GL}(R)$ *может быть приведена к каноническому виду при помощи сопряжения матрицей из* $\mathrm{GL}(R)$. *Более того, сопрягающую матрицу можно выбрать из* $\mathrm{E}(R)$.

**Лемма 3.** *Любые две инволюции из* $\mathrm{GL}(R)$ *сопряжены при помощи матрицы из* $\mathrm{E}(R)$ *тогда и только тогда, когда они имеют один ранг.*

Обозначим через $V_s$ множество инволюций канонического вида ранга $s$ (множество диагональных матриц из $\mathrm{GL}(R)$ с $\pm 1$ на диагонали, причём элементов $-1$ ровно $s$ штук).

**Предложение 3.** *Пусть $\varphi$ — автоморфизм группы $\mathrm{E}(R)$. Тогда если $A \in V_2$, то $\varphi(A)$ также имеет ранг 2.*

**Доказательство.** Пусть $W_2 = \varphi(V_2)$. Множество $V_2$ — это максимальное множество коммутирующих между собой сопряжённых при помощи матриц из $\mathrm{E}(R)$ инволюций. Так как $\varphi$ — автоморфизм, то $W_2$ — это также максимальное множество коммутирующих между собой сопряжённых при помощи матриц из $\mathrm{E}(R)$ инволюций. Так как все инволюции из $W_2$ сопряжены между собой, то все они имеют один ранг $k$. Покажем, что $k = 2$. Заметим, что если $\varphi$ — автоморфизм $\mathrm{E}(R)$, то нам достаточно показать только, что $k$ не может быть больше 2 (так как инволюции ранга 1 не принадлежат группе $\mathrm{E}(R)$).

Покажем, что $k$ не может быть больше 2. Предположим противное. Пусть $A$ — некоторый элемент из $W_2$. При помощи сопряжения некоторой матрицей $C_1 \in \mathrm{E}(R)$ он приводится к каноническому виду

$$C_1^{-1} A C_1 = \mathrm{diag}[-1, \ldots, -1, 1, \ldots],$$

где элементов $-1$ на диагонали ровно $k$ штук. Пусть теперь $W_2$ — множество $\varphi(V_2)$ после сопряжения матрицей $C_1$. Так как все матрицы из $W_2$ коммутируют с $A$, то после сопряжения они будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} A_i & & & \\ & B_i & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $A_i \in \mathrm{GL}_k(R)$ и $A_i^2 = E$. Значит, по лемме 1 существует такая матрица $\hat{C}_2 \in \mathrm{GL}_k(R)$, при помощи сопряжения которой все инволюции $A_i$ приводятся к каноническому виду. Сопрягая $W_2$ соответствующей матрицей из $\mathrm{GL}(R)$, получаем, что все элементы из преобразованного $W_2$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_i & & & \\ & B_i & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i$ — диагональные матрицы размера $k \times k$ с $\pm 1$ на диагонали. Заметим, что вид $A$ при этом не меняется. Все инволюции $\varepsilon_i$ не могут быть ранга $k$, так как все элементы $W_2$ имеют ранг $k$. Действительно, если $\varepsilon_i$ имеет ранг $k$, то соответствующая $B_i$ имеет ранг 0, т. е. является единичной матрицей. Значит, если все $\varepsilon_i$ имеют ранг $k$, то $W_2$ содержит всего одну матрицу, что противоречит бесконечности этого множества. Таким образом, найдётся инволюция $\varepsilon_l$ ранга не больше $k-1$. Так как матрица $B_l$ является инволюцией, то её можно привести к каноническому виду $\mathrm{diag}[-1,\dots,-1,1,\dots 1]$ сопряжением некоторой матрицей $C_3 \in \mathrm{GL}_m(R)$. Дальше делаем ход, аналогичный предыдущему, и получаем, что все матрицы из $W_2$ после сопряжения некоторым элементом из $\mathrm{E}(R)$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_i' & & & \\ & B_i' & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i'$ имеют размер не меньше $k+1$. Снова все $\varepsilon_i'$ не могут иметь ранг $k$, так как иначе в $W_2$ после сопряжения осталось бы только конечное число различных матриц. Сделаем описанное выше преобразование ещё два раза. В итоге приведём все элементы $W_2$ при помощи сопряжения к виду

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_i'' & & & \\ & B_i'' & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_i''$ имеют размер не меньше $k+3$.

Теперь рассмотрим три инволюции:

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{diag}[1,-1,\dots,-1,1],\\ A_2 &= \mathrm{diag}[1,1,-1,\dots,-1,1],\\ A_3 &= \mathrm{diag}[1,1,1,-1,\dots,-1,1], \end{aligned}$$

элементов $-1$ у каждой из них на диагонали ровно $k$ штук. Все они коммутируют с $W_2$ и сопряжены с матрицами оттуда (так как все они сопряжены, например, с $A$). В силу максимальности множества $W_2$ получаем, что эти матрицы ему принадлежат. Следовательно, у них (точнее у тех матриц, из которых эти получились путём последовательного сопряжения, описанным выше) есть прообразы, принадлежащие $V_2$. Заметим, что с помощью попарных произведений матриц $A$, $A_1$, $A_2$ и $A_3$ можно получить инволюции трёх разных рангов: 2, 4, 6. Но среди попарных произведений их прообразов из $V_2$ можно получить только инволюции ранга 2 и 4, т. е. только двух различных рангов. Так как свойство иметь одинаковый ранг очевидным образом сохраняется при автоморфизме, то мы получаем противоречие, и предложение доказано. □

**Предложение 4.** *Пусть $\varphi$ — автоморфизм группы $\mathrm{GL}(R)$. Тогда если $A \in V_1$, то $\varphi(A)$ также имеет ранг* 1.

**Доказательство** полностью аналогично доказательству предложения 3. □

Ясно, что также имеют место следующие утверждения.

**Предложение 5.** *Пусть $\varphi$ — автоморфизм группы $\mathrm{E}(R)$. Тогда $A$ — инволюция ранга 2 тогда и только тогда, когда $\varphi(A)$ — инволюция ранга 2.*

**Предложение 6.** *Пусть $\varphi$ — автоморфизм группы* $\mathrm{E}(R)$. *Тогда $A$ — инволюция ранга 1 тогда и только тогда, когда $\varphi(A)$ — инволюция ранга 1.*

**Предложение 7.** *Пусть $\varphi$ — автоморфизм группы* $\mathrm{E}(R)$. *Тогда найдётся такая обратимая матрица $H \in \mathrm{Mat}(R)$, что для всякой матрицы $A \in V_2$ справедливо $i_H \circ \varphi(A) = A$.*

**Доказательство.** Мы уже показали, что множество $W_2 = \varphi(V_2)$ состоит из инволюций ранга 2. Значит, найдётся такая обратимая матрица $H' \in \mathrm{Mat}(R)$, что ${H'}^{-1} W_2 H'$ будет состоять из инволюций канонического вида. Поскольку инволюции ранга 2 переходят при автоморфизме $\varphi$ в инволюции ранга 2, то позиции, на которых стоят элементы $-1$ у $V_2$, пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются позиции элементов $-1$ у соответствующих ${H'}^{-1} W_2 H'$. Следовательно, существует такая матрица перестановки базисных элементов $S$, что $(H'S)^{-1}\varphi(A)(H'S) = A$ для любой $A \in V_2$. Значит, нужно взять $H = H'S$. □

**Предложение 8.** *Пусть $\varphi$ — автоморфизм группы* $\mathrm{GL}(R)$. *Тогда найдётся такая обратимая матрица $H \in \mathrm{Mat}(R)$, что для всякой матрицы $A \in V_1$ справедливо $i_H \circ \varphi(A) = A$.*

**Доказательство** полностью аналогично доказательству предложения 7. □

**Следствие 2.** *Пусть $\varphi$ — автоморфизм группы* $\mathrm{GL}(R)$. *Тогда найдётся такая обратимая матрица $H \in \mathrm{Mat}(R)$, что для всякой матрицы $A \in V_2$ справедливо $i_H \circ \varphi(A) = A$.*

Обозначим отображение $i_H \circ \varphi$ через $\psi$. Мы показали, что $\psi(A) = A$ для всех из $A \in V_2$.

Обозначим канонические инволюции с $-1$ на местах $i$ и $j$ через $J_{ij}$. Через $S_{i,i+1}$ обозначим матрицу

$$\begin{pmatrix} E_{i-1} & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

**Предложение 9.** *Пусть отображение $\psi$ таково, как мы определили выше. Тогда существует такая матрица $Q \in \mathrm{Mat}(R)$, что*

$$Q^{-1}\psi(S_{i,i+1})Q = \begin{pmatrix} eE_{i-1} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & -1 & 0 & \\ & & & eE \end{pmatrix},$$

*где $e = \pm 1$.*

**Доказательство.** Мы знаем, что $\psi(J_{i,i+1}) = J_{i,i+1}$. Так как $J_{i,i+1}$ коммутирует с $S_{12}$ при $i = 1$ и при $i \geqslant 3$, то $J_{i,i+1} = \psi(J_{i,i+1})$ коммутирует с $\psi(S_{12})$.

Следовательно,

$$\psi(S_{12}) = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & d & & \\ & & a_1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Справедливы равенства

$$\big(\psi(S_{12})\big)^2 = \psi(J_{12}) = J_{12}, \quad \big(\psi(S_{12})\psi\big(J_{23}\big)\big)^2 = E.$$

Отсюда следует, что $c = b^{-1}$, $a = d = 0$, $a_i = \pm 1$. Аналогично получаем, что для любого $i$

$$\psi(S_{i,i+1}) = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_{i-1}^{(i)} & & & & \\ & & & 0 & b_i & & \\ & & & -b_i^{-1} & 0 & & \\ & & & & & a_{i+2}^{(i)} & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где $a_j^{(i)} = \pm 1$.

Положим

$$Q = \operatorname{diag}[1, b_1^{-1}, b_1^{-1}b_2^{-1}, \ldots].$$

Тогда

$$QJ_{i,i+1} = J_{i,i+1},$$

$$Q\psi(S_{i,i+1})Q^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_{i-1}^{(i)} & & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & & a_{i+2}^{(i)} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & a_l^{(i)} & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Имеем, что $S_{i,i+1}$ перестановочна с $S_{j,j+1}$ при $1 \leqslant j \leqslant i-2$, $j \geqslant i+2$, поэтому $Q\psi(S_{i,i+1})Q^{-1}$ перестановочна с $Q\psi(S_{j,j+1})Q^{-1}$ при $1 \leqslant j \leqslant i-2$, $j \geqslant i+2$. Следовательно, $a_1^{(i)} = \ldots = a_{i-1}^{(i)}$ и $a_{i+2}^{(i)} = \ldots = a_{l_i}^{(i)}$. Также выполнено равенство $(S_{i-1,i}S_{i,i+1})^3 = E$, значит, $(Q\psi(S_{i-1,i})\psi(S_{i,i+1})Q^{-1})^3 = E$. Простые вычисления показывают, что тогда $a_{i-1}^{(i)} = a_{i+2}^{(i)}$, что нам и требовалось. Предложение доказано. $\square$

Теперь пусть $\psi = i_{QH} \circ \varphi$. Заметим, что пока нам не известно, сохраняет ли $\psi$ группу, которую мы рассматриваем.

Введём обозначение $B_{ij}(r) = E + re_{ij}$.

**Предложение 10.** *Пусть $\psi$ — определённое выше отображение. Тогда либо $\psi\big(B_{ij}(1)\big) = B_{ij}(1)$, либо $\psi\big(B_{ij}(1)\big) = B_{ji}(-1)$ для всех $i$, $j$.*

**Доказательство.** Матрица $B_{12}(1)$ перестановочна с $J_{12}$ и $J_{i,i+1}$ при $i \geqslant 3$, следовательно,

$$\psi\big(B_{12}(1)\big) = \begin{pmatrix} a & b & & \\ c & d & & \\ & & a_1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Так как $B_{12}$ коммутирует с $S_{i,i+1}$ при $i \geqslant 3$, то $a_1 = a_2 = \ldots$. Значит,

$$\psi(B_{12}) = \begin{pmatrix} a & b & \\ c & d & \\ & & fE \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $f = e$.

Заметим, что имеют место равенства

$$\psi(B_{12}(1)J_{23})^2 = E, \tag{1}$$

$$\psi\big(S_{12}B_{12}(1)\big)^3 = E, \tag{2}$$

$$\psi(S_{23}^{-1}B_{12}S_{23}) = \psi\big(B_{13}(1)\big). \tag{3}$$

Из (1) мы получаем, что $f^2 = 1$, а из (2) — что $(ef)^3 = 1$. Следовательно, $ef = 1$ и $e = f$, так как $e = \pm 1$ и $f = \pm 1$.

Теперь выясним, какой вид имеет матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Из (1) следует, что

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}^2 = E. \tag{4}$$

Из (3) получаем, что

$$\psi\big(B_{12}(1)\big)\psi(S_{23}^{-1}B_{12}(1)S_{23}) = \psi(S_{23}^{-1}B_{12}(1)S_{23})\psi\big(B_{12}(1)\big).$$

Вычисляя верхние клетки порядка 3, имеем

$$\begin{pmatrix} a^2 & be & aeb \\ ac & de & bec \\ c & 0 & ed \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b \\ ec & ed & 0 \\ aec & bec & ed \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $bc = 0$. Применяя (4), получаем также $a^2 = d^2 = 1$. Из (2) следует, что

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & -b \end{pmatrix}^3 = E_2. \tag{5}$$

Значит, $(ad - bc)^3 = 1$ и $(ad)^3 = 1$, т. е. $ad = 1$. С другой стороны, возведя в куб матрицу

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & -b \end{pmatrix}$$

и воспользовавшись соотношением (5), мы получим $c^2 + b^2 = 1$. Следовательно, так как кольцо $R$ локально, получаем, что один из элементов $b$, $c$ обратим, а другой равен 0, так как $bc = 0$.

Если $c = 0$, то в силу (5) $bad = 1$, значит, $b = 1$. Аналогично если $b = 0$, то $c = -1$. Итак, либо $\psi\bigl(B_{12}(1)\bigr) = eE + e_{12}$, либо $\psi\bigl(B_{12}(1)\bigr) = eE - e_{21}$. Тогда из (3) выводим, что либо $\psi\bigl(B_{13}(1)\bigr) = eE + e_{13}$, либо $\psi\bigl(B_{13}(1)\bigr) = eE - e_{31}$.

Теперь покажем, что $e = 1$. Заметим, что $S_{12}^{-1} B_{13}(1) S_{12} = B_{23}(1)$, поэтому либо $\psi\bigl(B_{23}(1)\bigr) = eE + e_{23}$, либо $\psi\bigl(B_{23}(1)\bigr) = eE - e_{32}$. Так как $\bigl[\psi\bigl(B_{12}(1)\bigr), \psi\bigl(B_{23}(1)\bigr)\bigr] = \psi\bigl(B_{13}(1)\bigr)$, то $e^4 = e$, следовательно, $e = 1$.

Предположим, что $\psi\bigl(B_{12}(1)\bigr) = B_{12}(1)$. Заметим, что $\psi\bigl(B_{21}(1)\bigr) = \psi(S_{12}^{-1} B_{12}(-1) S_{12}) = B_{21}(1)$. Примем предположение индукции, что

$$\psi\bigl(B_{1i}(1)\bigr) = B_{1i}(1) \quad \text{и} \quad \psi\bigl(B_{i1}(1)\bigr) = B_{i1}(1).$$

Из равенств

$$S_{i,i+1}^{-1} B_{1i}(1) S_{i,i+1} = B_{1,i+1}(1), \quad S_{i,i+1}^{-1} B_{i1}(1) S_{i,i+1} = B_{i+1,1}(1)$$

получаем, что $\psi\bigl(B_{1,i+1}(1)\bigr) = B_{1,i+1}(1)$ и $\psi\bigl(B_{i+1,1}(1)\bigr) = B_{i+1,1}(1)$. Следовательно, $\psi\bigl(B_{1,i}(1)\bigr) = B_{1,i}(1)$ и $\psi\bigl(B_{i,1}(1)\bigr) = B_{i,1}(1)$ для всех натуральных $i \geqslant 2$. Используя соотношение $[B_{ij}(1), B_{jk}(1)] = B_{ik}(1)$, при $k \neq j$, $i \neq j$, $j \neq k$ получаем, что $\psi\bigl(B_{ij}(1)\bigr) = B_{ij}(1)$ для всех $i \neq j$. Предложение доказано. □

## 3. Доказательство основных теорем

**Предложение 11.** *Определённое выше отображение $\psi$ удовлетворяет условию*

$$\psi(B) = B^\sigma \quad \text{для всех} \quad B \in E(R)$$

*или*

$$\psi(B) = \Lambda(B^\sigma) \quad \text{для всех} \quad B \in E(R),$$

*где $\sigma\colon R \to R$ — кольцевой автоморфизм.*

**Доказательство.** Если $\psi(B_{ij}) = B_{ji}(-1)$, то вместо $\psi$ будем при доказательстве этого предложения рассматривать отображение $\Lambda \circ \psi$. Матрица $B_{12}(r)$,

$r \in R$, перестановочна с $B_{12}(1)$, $J_{12}$ и $B_{ij}(1)$ при $i, j \geqslant 3$, следовательно,

$$\psi\bigl(B_{12}(r)\bigr) = \begin{pmatrix} a & b & \\ 0 & a & \\ & & fE \end{pmatrix}.$$

Так как $S_{23}^{-1} B_{12}(r) S_{23} = B_{13}(r)$, то

$$\psi\bigl(B_{13}(r)\bigr) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & \\ 0 & f & 0 & \\ 0 & 0 & a & \\ & & & fE \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Имеем $[B_{12}(r), B_{23}(1)] = B_{13}(r)$, следовательно, $\bigl[\psi\bigl(B_{12}(r)\bigr), \psi\bigl(B_{23}(1)\bigr)\bigr] = \psi\bigl(B_{13}(r)\bigr)$. Тогда

$$\psi\bigl(B_{13}(r)\bigr) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & bf^{-1} & \\ 0 & 1 & af^{-1} - 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & E \end{pmatrix}.$$

Сравнивая с (6), получаем, что $a = f = 1$.

Определим отображение $\sigma\colon R \to R$, полагая $\sigma(r) = b$, если $\psi\bigl(B_{12}(r)\bigr) = B_{12}(b)$. Имеем, что $\psi\bigl(B_{12}(-r)\bigr) = B_{12}(-b)$, так как $B_{12}(-r) = B_{12}(r)^{-1}$, т. е. $\sigma(-r) = -\sigma(r)$. Также $B_{12}(r+s) = B_{12}(r)B_{12}(s)$, откуда следует, что $\sigma(r+s) = \sigma(r) + \sigma(s)$. Если $\sigma(r) = 0$, то $\psi\bigl(B_{12}(r)\bigr) = E$, следовательно, $r = 0$. Значит, отображение $\sigma$ инъективно. Так как

$$\begin{gathered} B_{21}(r) = S_{12}^{-1} B_{12}(-r) S_{12}, \\ S_{i,i+1}^{-1} B_{1i}(r) S_{i,i+1} = B_{1,i+1}(r), \\ S_{i,i+1}^{-1} B_{i1}(r) S_{i,i+1} = B_{i+1,1}(r), \end{gathered}$$

то $\psi\bigl(B_{1i}(r)\bigr) = B_{1i}\bigl(\sigma(r)\bigr)$ и $\psi\bigl(B_{i1}(r)\bigr) = B_{i1}\bigl(\sigma(r)\bigr)$. Применяя соотношение $[B_{i1}(r), B_{1j}(1)] = B_{ij}(r)$, получаем, что $\psi\bigl(B_{ij}(r)\bigr) = B_{ij}\bigl(\sigma(r)\bigr)$ для всех $i \neq j$.

Имеем

$$\begin{aligned} B_{13}\bigl(\sigma(rs)\bigr) = \psi\bigl(B_{13}(rs)\bigr) = \bigl[\psi\bigl(B_{12}(r)\bigr), \psi\bigl(B_{23}(s)\bigr)\bigr] = \\ = \bigl[B_{12}\bigl(\sigma(r)\bigr), B_{23}\bigl(\sigma(s)\bigr)\bigr] = B_{13}\bigl(\sigma(r)\sigma(s)\bigr). \end{aligned}$$

Получаем, что $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s)$.

Таким образом, мы показали, что $\sigma$ — кольцевой мономорфизм. Осталось доказать сюръективность $\sigma$. Для этого достаточно показать, что $\psi\bigl(\mathrm{E}(R)\bigr) = \mathrm{E}(R)$. Отображение $\psi$ имеет вид $\Lambda \circ i_A \circ \varphi$ или $i_A \circ \varphi$. Так как $\Lambda$ — это автоморфизм $\mathrm{E}(R)$, то достаточно показать сюръективность $\chi = i_A \circ \varphi$. Так как $\psi\bigl(B_{ij}(r)\bigr) = B_{ij}\bigl(\sigma(r)\bigr)$, то очевидно, что $\chi\bigl(\mathrm{E}(R)\bigr) \subseteq \mathrm{E}(R)$. Отображение $\varphi$ — автоморфизм группы $\mathrm{E}(R)$ или $\mathrm{GL}(R)$. Если по условию $\varphi$ — автоморфизм $\mathrm{GL}(R)$, то он всё равно индуцирует автоморфизм $\mathrm{E}(R)$, так как $\mathrm{E}(R)$ является коммутантом $\mathrm{GL}(R)$. Имеем, что $i_A = \chi \circ \varphi^{-1}$, следовательно, сопряжение матрицей $A$ сохраняет группу $\mathrm{E}(R)$.

Покажем, что сопряжение матрицей $A^{-1}$ также сохраняет группу $\mathrm{E}(R)$. Сначала рассмотрим случай, когда $i_A \circ \varphi\big(B_{ij}(1)\big) = B_{ij}(1)$. Имеем, что $A^{-1}\varphi\big(B_{ij}(1)\big)A = B_{ij}(1) = E + e_{ij}$, следовательно, $A(E + e_{ij})A^{-1} = B \in \mathrm{E}(R)$, т. е. $Ae_{ij}A^{-1} = B - E$. Значит, $A(E + re_{ij})A^{-1} = E + rAe_{ij}A^{-1} = E + r(B - E) \in \mathrm{GL}(R)$, откуда мы получаем, что $i_{A^{-1}}\big(\mathrm{E}(R)\big) \in \mathrm{GL}(R)$. Но $[\mathrm{GL}(R), \mathrm{GL}(R)] = \mathrm{E}(R)$ и $[\mathrm{E}(R), \mathrm{E}(R)] = \mathrm{E}(R)$. Следовательно, для любой матрицы $B \in \mathrm{E}(R)$ получаем, что

$$B = [C_{11}, C_{12}]\,[C_{21}, C_{22}] \ldots [C_{k1}, C_{k2}],$$

где $C_{ij} \in \mathrm{E}(R)$. Значит,

$$i_{A^{-1}}(B) = [i_{A^{-1}}(C_{11}), i_{A^{-1}}(C_{12})]\,[i_{A^{-1}}(C_{21}), i_{A^{-1}}(C_{22})] \ldots [i_{A^{-1}}(C_{k1}), i_{A^{-1}}(C_{k2})].$$

Отсюда следует, что $i_{A^{-1}}(B) \in \mathrm{E}(R)$.

Итак, отображение $\chi\colon \mathrm{E}(R) \to \mathrm{E}(R)$ обратимо, следовательно, сюръективно. Значит, $\sigma$ также сюръективно.

Случай $i_A \circ \varphi\big(B_{ij}(1)\big) = B_{ji}(-1)$ рассматривается аналогично. Предложение доказано. □

Заметим, что при доказательстве предложения 11 мы показали, что $A^{-1}\mathrm{E}(R)A = \mathrm{E}(R)$, т. е. $i_A$ — автоморфизм группы $\mathrm{E}(R)$.

Итак, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $R$ — локальное кольцо с $1/2$, $\varphi\colon \mathrm{E}(R) \to \mathrm{E}(R)$ — групповой автоморфизм. Тогда существуют такие матрица $A \in \mathrm{Mat}(R)$ и кольцевой автоморфизм $\sigma\colon R \to R$, что*

$$\varphi(C) = i_A \circ i_\sigma(C) \quad \text{для всех} \quad C \in \mathrm{E}(R)$$

*или*

$$\varphi(C) = i_A \circ \Lambda \circ i_\sigma(C) \quad \text{для всех} \quad C \in \mathrm{E}(R).$$

Теперь опишем действие автоморфизма $\varphi\colon \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(R)$. Оказывается, в отличие от аналогичной теоремы из [5] для $\mathrm{GL}_n(R)$, в стабильном случае действие автоморфизма $\varphi$ на группе $\mathrm{GL}(R)$ выглядит так же, как его действие на группе $\mathrm{E}(R)$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi\colon \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(R)$ — групповой автоморфизм. Тогда существуют такие матрица $A \in \mathrm{Mat}(R)$ и кольцевой автоморфизм $\sigma\colon R \to R$, что*

$$\varphi(C) = i_A \circ i_\sigma(C) \quad \text{для всех} \quad C \in \mathrm{GL}(R)$$

*или*

$$\varphi(C) = i_A \circ \Lambda \circ i_\sigma(C) \quad \text{для всех} \quad C \in \mathrm{GL}(R).$$

**Доказательство.** По предложению 11 на подгруппе $\mathrm{E}(R)$ автоморфизм $\varphi$ имеет вид $i_A \circ i_\sigma$ или $i_A \circ \Lambda \circ i_\sigma$. Сначала покажем, что $i_A$ является автоморфизмом группы $\mathrm{GL}(R)$. Мы знаем, что

$$A^{-1}\mathrm{E}(R)A = \mathrm{E}(R).$$

Покажем, что во всякой строке матрицы $A$ содержится лишь конечное число ненулевых элементов. Докажем это утверждение сначала для первой строки. Имеем, что

$$S = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} A \in \mathrm{E}(R).$$

Обозначим матрицу $A^{-1}$ через $B$. Будем обозначать элементы матрицы $A$ через $a_{ij}$, матрицы $A^{-1}$ — через $b_{ij}$, а матрицы $S$ — через $s_{ij}$. Имеем

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21}+a_{11} & a_{22}+a_{12} & a_{23}+a_{13} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+b_{12}a_{11} & b_{12}a_{12} & b_{12}a_{13} & \dots \\ b_{22}a_{11} & 1+b_{22}a_{12} & b_{22}a_{13} & \dots \\ b_{32}a_{11} & b_{32}a_{12} & 1+b_{32}a_{13} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Так как получившаяся матрица $S$ принадлежит $\mathrm{E}(R)$, то найдётся такое $n$, что для всех $k \geqslant n$ $s_{jk} = 0$ для $j \neq k$ и $s_{kk} = 1$, т. е. для всех $k \geqslant n$ мы получаем

$$\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} a_{1k} = 0.$$

Но так как $B$ и $A$ — взаимно обратные матрицы, то $BA = AB = E$. Следовательно, для любого $k$

$$\begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \end{pmatrix} = 1.$$

Значит, для $k \geqslant n$ имеем

$$0 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12}a_{1k} \\ b_{22}a_{1k} \\ \vdots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \end{pmatrix} a_{1k} = 1 \cdot a_{1k} = a_{1k},$$

откуда следует, что $a_{1k} = 0$ при $k \geqslant n$. Используя матрицы $E + e_{t,t+1}$, аналогично доказываем, что в любой строке $A$ есть только конечное число ненулевых элементов.

Итак, пусть

$$C = \begin{pmatrix} \hat{C} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(R),$$

где $\hat{C} \in \mathrm{GL}_n(R)$. Пусть $k$ — такое натуральное число, что для $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $a_{is} = 0$ при всех $s \geqslant k$. В силу доказанного выше свойства матрицы $A$ такое $k$ можно выбрать. Тогда

$$A^{-1}CA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots \\ b_{21} & b_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{D} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots \\ b_{21} & b_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1,\,k-1} & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ m_{n,1} & \ldots & m_{n,k-1} & 0 & 0 & \ldots \\ a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,k-1} & a_{n+1,k} & a_{n+1,k+1} & \ldots \\ a_{n+2,1} & \ldots & a_{n+2,k-1} & a_{n+2,k} & a_{n+2,k+1} & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} m'_{11} & \ldots & m'_{k-1,1} & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ m'_{k-1,1} & \ldots & m'_{k-1,k-1} & 0 & 0 & \ldots \\ m'_{k,1} & \ldots & m'_{k\,k-1} & 1 & 0 & \ldots \\ m'_{k+1,1} & \ldots & m'_{k+1,k-1} & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(R).$$

Итак, мы показали, что $A^{-1}\mathrm{GL}(R)A \subseteq \mathrm{GL}(R)$. Так как $A\mathrm{E}(R)A^{-1} = \mathrm{E}(R)$, то аналогичным способом получаем, что $A\mathrm{GL}(R)A^{-1} \subseteq \mathrm{GL}(R)$. Следовательно, $A^{-1}\mathrm{GL}(R)A = \mathrm{GL}(R)$, $i_A$ — автоморфизм группы $\mathrm{GL}(R)$.

На подгруппе $\mathrm{E}(R)$ автоморфизм $\varphi$ имеет вид $i_A \circ i_\sigma$ или $i_A \circ \Lambda \circ i_\sigma$. Пусть $\chi = (i_A \circ i_\sigma)^{-1} \circ \varphi$ в первом случае и $\chi = (i_A \circ \Lambda \circ i_\sigma)^{-1} \circ \varphi$ во втором. Тогда отображение $\chi$ оставляет неподвижными все элементы $\mathrm{E}(R)$.

Сначала рассмотрим случай $\chi = (i_A \circ i_\sigma)^{-1} \circ \varphi$. Пусть $D = \mathrm{diag}[d_1, d_2, \ldots]$ — произвольная диагональная матрица из $\mathrm{GL}(R)$. Матрица $D$ коммутирует со всеми элементами $J_{ij}$, следовательно, $\chi(D)$ тоже коммутирует с $J_{ij}$, т. е. $\chi(D)$ — это диагональная матрица из $\mathrm{Mat}(R)$. Пусть $\chi(D) = \mathrm{diag}[d_1', d_2', \ldots]$. Имеем, что

$$[D, E + e_{ij}] = E + \left(\frac{d_i}{d_j} - 1\right) e_{ij},$$

$$\chi([D, E + e_{ij}]) = [\chi(D), E + e_{ij}] = E + \left(\frac{d_i'}{d_j'} - 1\right) e_{ij}.$$

Но так как

$$\chi(E + \left(\frac{d_i}{d_j} - 1\right) e_{ij}) = E + \left(\frac{d_i}{d_j} - 1\right) e_{ij},$$

то получаем равенство

$$E + \left(\frac{d_i}{d_j} - 1\right) e_{ij} = E + \left(\frac{d_i'}{d_j'} - 1\right) e_{ij}.$$

Значит,

$$\frac{d_i}{d_j} = \frac{d_i'}{d_j'}.$$

Так как для некоторого $n$ все $d_k$ равны 1, $k \geqslant n$, то $\chi(D) = a_D D$, где $a_D \in R^*$.

Поскольку мы доказали, что $i_A$ — автоморфизм группы $\mathrm{GL}(R)$, то

$$\chi(D) = a_D D = i_\sigma^{-1} \circ i_{A^{-1}} \circ \varphi(D) \in \mathrm{GL}(R)$$

для любой диагональной матрицы $D \in \mathrm{GL}(R)$. Значит, $a_D = 1$ и $\chi(D) = D$. Всякая матрица $C \in \mathrm{GL}(R)$ представляется в виде $DU$, где $D$ — диагональная матрица из $\mathrm{GL}(R)$, $U \in \mathrm{E}(R)$. Следовательно, для всякого элемента $C \in \mathrm{GL}(R)$ получаем $\chi(C) = C$. Значит, $\chi$ является тождественным отображением и $\varphi = i_A \circ i_\sigma$.

Случай $\chi = (i_A \circ \Lambda \circ i_\sigma)^{-1} \circ \varphi$ рассматривается полностью аналогично. Теорема доказана. □

Автор выражает благодарность своим научным руководителям А. В. Михалёву и Е. И. Буниной за постановку задачи, а также постоянное внимание к работе и ценные замечания.

## Литература

[1] Голубчик И. З. Линейные группы над ассоциативными кольцами: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — Уфа, 1997.

[2] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.

[3] Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.

[4] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. сб. — 1982. — Т. 117, № 4. — С. 534—547.

[5] Помфре Ж., Макдональд Б. Автоморфизмы $\mathrm{GL}_n(R)$, $R$ — локальное кольцо // Автоморфизмы классических групп. — М.: Мир, 1976. — С. 176—187.

[6] Dieudonne J. On the automorphisms of the classical groups // Mem. Am. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — P. 1—95.

[7] Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. — Berlin: Springer, 1989.

[8] Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of the unimodular group // Trans. Am. Math. Soc. — 1951. — Vol. 71. — P. 331—338.

[9] Landin J., Reiner I. Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain // Ann. Math. — 1957. — Vol. 65, no. 3. — P. 519—526.

[10] O'Meara O. Lectures on Linear Groups. — Providence, Rhode Island, 1974.

[11] Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations. I // Am. J. Math. — 1950. — Vol. 72. — P. 451—464.

[12] Schreier O., van der Waerden B. L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — B. 6. — S. 303—322.

[13] Wan C. A. An the automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$ // Acta Math. Sinica. — 1957. — Vol. 7. — P. 533—573.

[14] Waterhouse W. C. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Proc. Am. Math. Soc. — 1980. — Vol. 79, no. 3. — P. 347—351.

[15] Shi-Jian Yan. Linear groups over a ring // Chinese Math. — 1965. — Vol. 7, no. 2. — P. 163—179.