Кольца эндоморфизмов жёстких почти вполне разложимых абелевых групп

Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
e-mail: kblag2002@yahoo.com

УДК 512.54

Ключевые слова: абелевы группы без кручения конечного ранга, почти вполне разложимые группы, кольцо эндоморфизмов, группа автоморфизмов.

Аннотация

Найдено необходимое и достаточное условие того, что жёсткая почти вполне разложимая абелева группа с p-примарным регуляторным фактором имеет кольцо эндоморфизмов, изоморфное кольцу эндоморфизмов соответствующей группы с циклическим регуляторным фактором.

Abstract

E. A. Blagoveshchenskaya, Endomorphism rings of rigid almost completely decomposable Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 31—47.

A necessary and sufficient condition is found for rigid almost completely decomposable Abelian groups with p-primary regulator quotients to have endomorphism rings isomorphic to those of the corresponding groups with cyclic regulator quotients.

Посвящается Александру Васильевичу Михалёву,
вдохновившему на выполнение данного исследования

1. Введение

Для некоторого класса модулей $\mathcal{M}$ верна *теорема Бэра—Капланского*, если для любых $M, N \in \mathcal{M}$ из изоморфизма колец эндоморфизмов модулей, $\mathrm{End}(M) \cong \mathrm{End}(N)$, следует изоморфизм самих модулей, $M \cong N$. Будем называть такой класс модулей *BK-классом*. В [6] показано, что класс $\mathcal{A}_O$ жёстких (и даже блочно-жёстких) почти вполне разложимых групп кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором, рассматриваемых как $\mathbb{Z}$-модули, удовлетворяет теореме Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма (т. е. является $\mathrm{BK}_{(\text{пг})}$-*классом*), поскольку верна следующая теорема.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 7, с. 31—47.
© 2011/2012 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Теорема (Е. Благовещенская, Г. Иванов, Ф. Шульц [6], 2001). *Пусть $X, Y \in \mathcal{A}_O$. Тогда группы X и Y почти изоморфны (обозначение $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$), если и только если их кольца эндоморфизмов изоморфны* $(\mathrm{End}(X) \cong \mathrm{End}(Y))$.

Покажем, что отмена требования цикличности регуляторного фактора приводит к потере $BK_{(\mathrm{nr})}$-*свойства*, т. е. расширенный класс групп, класс почти вполне разложимых групп, уже не удовлетворяет теореме Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма, так как в нём существуют группы, названные здесь *строго неразложимыми*, у которых кольца эндоморфизмов имеют такую же структуру, как и у подходящих почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором из этого же класса.

Исследование абелевых групп без кручения совместно с их кольцами эндоморфизмов может рассматриваться в контексте монографии [2].

Основные определения и обозначения содержатся в [3, 9].

Напомним некоторые понятия и факты, используемые далее. Прямая сумма групп без кручения ранга 1 является вполне разложимой группой. *Почти вполне разложимая группа* X — это группа без кручения конечного ранга, содержащая вполне разложимую группу A, такую что X/A — конечная группа. Если при этом X/A — циклическая группа, то X называется почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором. Почти вполне разложимая группа X содержит особую вполне характеристическую подгруппу $R(X)$, изоморфную A. Эта группа $R(X)$ называется *регулятором* в X, а $X/R(X)$ естественно называть *регуляторным фактором* группы X. *Регуляторной экспонентой* называется экспонента $e := \exp X/R(X)$ регуляторного фактора $X/R(X)$. В частности, регуляторный фактор может быть гомоциклической группой, т. е. конечной прямой суммой циклических групп одного и того же порядка. Заметим, что прямые разложения вполне разложимых групп с гомоциклическим регуляторным фактором экспоненты p (p — простое число) исследованы в [5] с использованием матричного подхода, подобного тому, который описан в [9, разд. 12.4, 12.5], и развит здесь.

Для группы, порождённой некоторым множеством элементов, мы используем обозначение $\langle \ldots \rangle$; ранг группы X обозначается $\mathrm{rk}\, X$. Порядок элемента $c \in C$ в группе обозначается $|c|$. Если C является p-группой, её *цоколь* совпадает с $C[p] = \{c \in C \colon pc = 0\}$. Традиционно любая групповая характеристика, применённая к кольцу E, относится к его аддитивной структуре, обозначаемой E^{+}.

Поскольку для любого элемента a абелевой группы X без кручения и любого натурального числа q существует не более одного элемента $b \in X$, для которого $qb = a$, мы можем рассматривать b как $\frac{a}{q}$. Если такой элемент $\frac{a}{q}$ существует, мы говорим, что a делится на q в X.

Мы распространяем это обозначение на всю группу X, погружая её в делимую оболочку $\mathbb{Q}X = X \otimes \mathbb{Q}$ и записывая группу Y в виде $\frac{X}{q}$, если $qY = X$. Заметим, что размерность векторного пространства $\mathbb{Q}X$ совпадает с рангом группы X. *Ранг* произвольной группы X (не обязательно без кручения), обозначаемый $\mathrm{rk}\, X$, равен мощности её максимальной линейно независимой системы (см. [3, том 1, разд. 16]).

Как обычно, $V \subset X$ означает, что V — подгруппа X (возможно, $V = X$), а

$$V_*^X = \{g \in X\colon \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$$

обозначает сервантную оболочку V в X. Подгруппа V называется *сервантной* подгруппой X, если $V_*^X = V$.

В отличие от случая абелевой группой без кручения, если X — конечная группа, то элемент b со свойством $qb = a$ при фиксированных $a \in X$ и $q \in \mathbb{N}$ определяется неоднозначно. В специальном случае нам понадобится определение *строгой сервантной оболочки* V_*^X — однозначно определённой (по отношению к некоторому базису V) сервантной гомоциклической подгруппы в X, содержащей V. Напомним, что *базисом* конечной группы V, прямой суммы её циклических подгрупп $V = \bigoplus\limits_{i \leqslant t} \langle a_i \rangle$, является множество $\{a_i\colon i \leqslant t\}$. Мы говорим, что V — сервантная подгруппа в X, если из того, что $n \mid g$ в X (делимости g на n), следует, что $n \mid g$ в V для любого натурального n (см. [3, том 1, разд. 26]).

Тип элемента $g \neq 0$ группы без кручения X (обозначение $\mathrm{tp}_X\, g$) можно определить как класс изоморфизма рациональной группы τ, которая изоморфна $\langle g \rangle_*$ в X и содержит $\mathbb{Z}$. Можно также сказать, что элемент g имеет тип τ, где $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$. Правомерно рассматривать $\mathrm{tp}_X\, g$ как тип группы, $\mathrm{tp}\, X$, если X — однородная группа. Следуя стандартным определениям, имеем, что $X(\tau) = \{g \in X\colon \mathrm{tp}_X\, g \geqslant \tau\}$, $X^*(\tau) = \sum\limits_{\sigma > \tau} X(\sigma)$ и $X^\sharp(\tau)$ — сервантная оболочка $X^*(\tau)$ в X. Тип τ называется *критическим* для группы без кручения X и является элементом множества $T_{\mathrm{cr}}(X)$, если $X(\tau)/X^\sharp(\tau) \neq 0$ (см. [9, с. 37, определение 2.4.6]).

Мы называем группу X группой *кольцевого* типа, если $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит из идемпотентных типов (т. е. тех типов, которые представляются характеристиками, состоящими только из символов 0 и ∞, см. [9, с. 13]). Мы пишем $\tau(p) = \infty$ или $p\tau = \tau$, если $1/p^n$ принадлежит τ для любого натурального n (p — простое число), иначе тип τ не делится на p, что обозначается $\tau(p) = 0$.

Почти вполне разложимая группа X является *блочно-жёсткой*, если $T_{\mathrm{cr}}(X)$ представляет собой антицепь. В этом случае регулятор $R(X)$ также является блочно-жёсткой группой, поскольку $T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$. Если при этом $\mathrm{rk}\, A_\tau = 1$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, то A и X называются *жёсткими* группами.

Как обычно, $\mathbb{Z}$ — это группа всех целых чисел, и мы можем использовать обозначение $\bar{\mathbb{Z}}$ для группы $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Эта запись удобна в различных ситуациях, когда речь идёт об естественном эпиморфизме $\mathbb{Z} \to \bar{\mathbb{Z}}$ и $\mathrm{M}_n \to \bar{\mathrm{M}}_n$, где $D \in \mathrm{M}_n$ представляет собой матрицу с элементами $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ и $\bar{D} \in \bar{\mathrm{M}}_n$ — матрица с элементами $\bar{d}_{ij} \in \bar{\mathbb{Z}}$. Индекс указывает на число строк (столбцов) квадратной матрицы.

Мы пишем $f \in \mathrm{Mon}(G, F)$, если $f\colon G \to F$ — инъективный гомоморфизм. Будет также использоваться обозначение $f = (f_1, f_2) \in \mathrm{Mon}(G, F)$, если $G = G_1 \oplus G_2$, $F = F_1 \oplus F_2$ и $f_1 \in \mathrm{Mon}(G_1, F_1)$, $f_2 \in \mathrm{Mon}(G_2, F_2)$.

Автор выражает искреннюю благодарность Филиппу Шульцу за его внимание к данным результатам и полезные дискуссии в сравнительно долгом периоде работы над этой статьей.

2. Предварительные сведения

Мы приводим здесь некоторые определения, факты и комментарии из теории почти вполне разложимых групп.

Рассматривается жёсткая группа X ранга n ($n \geqslant 3$), которая содержит вполне разложимую группу A, такую что X/A — p-группа ранга $t < n$ с экспонентой $e = p^{\alpha}$. Точнее,

$$A = A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_2} \oplus \ldots \oplus A_{\tau_n} \text{ —} \tag{1}$$

разложение группы A на τ_j-однородные компоненты, где

$$T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A) = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \tag{2}$$

является множеством попарно несравнимых идемпотентных типов, не делящихся на p. Не ограничивая общности, примем, что

$$A_{\tau_j} = \tau_j v_j, \tag{3}$$

где $\mathbb{Z} \subset \tau_j \subset \mathbb{Q}$ и $v_j \in A_{\tau_j}$.

Из [8, теорема 3.5] следует, что в силу примарности X/A группа X обладает единственным разложением на неразложимые прямые слагаемые с точностью до почти изоморфизма.

Пусть

$$\rho\colon A \to A/p^{\alpha}A = \bar{A} = \bar{A}_{\tau_1} \oplus \ldots \oplus \bar{A}_{\tau_n}$$

обозначает канонический эпиморфизм. Тогда $a\rho = \bar{a}$ for all $a \in A$, и при естественном предположении, что $\tau_j(p) = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$, имеем

$$A/p^{\alpha}A = \langle \bar{v}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \bar{v}_n \rangle, \quad |\bar{v}_j| = p^{\alpha}. \tag{4}$$

Для жёсткой группы X справедливо следующее представление кольца эндоморфизмов в виде прямого произведения однородных компонент:

$$\mathrm{End}\, A = \prod_{j=1,\ldots,n} \mathrm{End}(A_{\tau_j}) \cong \prod_{j=1,\ldots,n} \mathrm{End}({\tau_j}^{+}) \cong \prod_{j=1,\ldots,n} \tau_j. \tag{5}$$

Тогда ρ может также использоваться для обозначения индуцированных сюръекций

$$\rho\colon\ \mathrm{End}\, A \to \overline{\mathrm{End}\, A}, \quad \rho\colon\ \mathrm{Aut}\, A \to \overline{\mathrm{Aut}\, A}, \tag{6}$$

где

$$\overline{\operatorname{End} A} = \{\xi \in \operatorname{End} \bar{A} \colon \bar{A}_{\tau_j}\xi \subset \bar{A}_{\tau_j},\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Мы рассматриваем группу X как расширение почти вполне разложимой группы A с помощью конечной группы

$$C = \langle s_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle s_t \rangle, \tag{7}$$

которая является примарной p-группой ранга t с экспонентой p^α. Точнее, вводится группа $X_f \cong X$, $f \in \operatorname{Mon}(C, \bar{A})$, которая определяется при естественном предположении $C = X/A$ следующим образом:

$$X_f = \{(a, c) \colon cf = \bar{a}\} \subset A \oplus C,$$

где

$$f \colon X/A \to A/p^\alpha A = \bar{A}, \quad (x + A)f = \overline{p^\alpha x}. \tag{8}$$

Ясно, что X_f содержит подгруппу

$$A\varepsilon = \{(p^\alpha a, 0) \colon a \in A\} \cong A$$

для всех $f \in \operatorname{Mon}(C, \bar{A})$, где $\varepsilon \colon A \to X_f$ — отображение, определённое по правилу $a\varepsilon = (p^\alpha a, 0)$. Теперь вместо группы X будем рассматривать X_f. Поскольку $s_i f$ — линейная комбинация элементов $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$, имеем

$$s_i f = \beta_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \beta_{in}\bar{v}_n \tag{9}$$

для любого отображения $f \in \operatorname{Mon}(C, \bar{A})$, и следовательно, X_f представляется матрицей коэффициентов

$$B^f = \{\beta_{ij} \colon \beta_{ij} \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}\ (1 \leqslant i \leqslant t,\ 1 \leqslant j \leqslant n)\}. \tag{10}$$

Она содержит n столбцов и t линейно независимых строк над полем $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, $t \leqslant n$. Не ограничивая общности, считаем, что $\beta_{ij} \neq 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$ (иначе $A \supset A'$ для жёсткой вполне разложимой группы $A' \neq A$ и $Cf \subset \bar{A}'$).

Предложение 2.1 [10, 3.2.6; 12, предложение 2.9]. *Пусть $X \cong X_f$ и $X' \cong X_{f'}$, где $f, f' \in \operatorname{Mon}(C, \bar{A})$. Если $\eta \in \operatorname{End} A$ и $\xi \in \operatorname{End} C$ удовлетворяют условию $f\bar{\eta} = \xi f'$, то $(a, c)\Psi = (a\eta, c\xi)$ определяет гомоморфизм из X_f в $X_{f'}$, причём $A\varepsilon\Psi \subset A\varepsilon$. Обратно, если $\Psi \in \operatorname{Hom}(X_f, X_{f'})$ и $A\varepsilon\Psi \subset A\varepsilon$, то существуют единственные отображения $\eta \in \operatorname{End} A$ и $\xi \in \operatorname{End} C$, такие что $f\bar{\eta} = \xi f'$ и $(a, c)\Psi = (a\eta, c\xi)$ для всех $(a, c) \in X_f$.*

Замечание 2.2. Пусть $\xi \in \operatorname{Aut} C$. Тогда существует отображение $\gamma \in \operatorname{Aut} C$, такое что $\gamma = \xi^{-1}$, и условие предложения 2.1 эквивалентно условию $\gamma f \bar{\eta} = f'$, где $\bar{\eta} \in \overline{\operatorname{End} A}$. Если к тому же $\eta \in \operatorname{Aut} A$, то $\Psi \colon X_f \to X_{f'}$ является изоморфизмом со свойством $A\varepsilon\Psi = A\varepsilon$.

Будут использоваться следующие определения.

Определение 2.3 [9, определение 9.1.2, теорема 9.1.4]. Пусть X и X' — абелевы группы без кручения конечного ранга. Группы X и X' называются *почти изоморфными* (обозначение $X \cong_{\mathrm{nr}} X'$), если и только если для любого простого q существуют мономорфизмы $\eta_q\colon X \to X'$ и $\xi_q\colon X' \to X$, такие что $X'/\eta_q(X)$ и $X/\xi_q(X')$ конечны и при этом $|X'/\eta_q(X)|$ и q, а также $|X/\xi_q(X')|$ и q взаимно просты.

Очевидно, почти изоморфные почти вполне разложимые группы имеют изоморфные регуляторы, что позволяет свести их рассмотрение к группам с одним и тем же регулятором A.

Определение 2.4 [9, определение 2.5.9]. Пусть A — вполне разложимая группа и $e \neq 1$ — целое положительное число. Кольцо $\mathrm{TypEnd}\,\bar{A}$ состоит из всех эндоморфизмов ψ на $\bar{A} = A/eA$, удовлетворяющих условию $\overline{A(\tau)}\psi \subset \overline{A(\tau)}$ для любого критического типа $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)$. Обратимые ψ из $\mathrm{TypEnd}\,\bar{A}$ составляют мультипликативную группу $\mathrm{TypAut}\,\bar{A}$.

Определение 2.5 [1, определение 1.2.8; 9, определения 8.1.14, 9.2.3]. Пусть X и X' — почти вполне разложимые группы, имеющие один и тот же регулятор A. Тогда X и X' называются *слабо изоморфными* группами (обозначение $X \cong_{\mathrm{tp}} X'$), если и только если существует отображение $\rho \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$, такое что $\overline{eX}\rho = \overline{eX'}$ в $\bar{A} = A/eA$ для некоторого e с условием $eX, eX' \subset A$.

Почти изоморфизм совпадает со слабым изоморфизмом для почти вполне разложимых групп, что утверждает следующая теорема.

Теорема 2.6 [9, теорема 9.2.4]. *Пусть X и X' — почти вполне разложимые группы, имеющие один и тот же регулятор A. Тогда $X \cong_{\mathrm{tp}} X'$, если и только если $X \cong_{\mathrm{nr}} X'$. Условие $X/A \cong X'/A$ является необходимым для того, чтобы группы X и X' были слабо (почти) изоморфными.*

Почти вполне разложимые группы традиционно исследуются с точностью до почти изоморфизма, эквивалентности, которая слабее изоморфизма, но отражает свойства разложений достаточно точно (см. [4, теорема 7.16]). В частности, если две группы почти изоморфны, то либо они обе неразложимы, либо обладают одинаковыми прямыми разложениями с точностью до почти изоморфизма их неразложимых слагаемых.

С этого момента считаем, что группа A является регулятором для X, что означает сервантность каждой однородной компоненты A_{τ_i} в X (см. (1)). В этом случае для группы $X \cong X_f$ будем писать $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$.

Предложение 2.7 (А. Мадер [9, предложение 12.4.1 (2); 10, 3.3.2]). *Пусть $f, f' \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$. Тогда группы X_f и $X_{f'}$, определённые с помощью f и f' соответственно, почти изоморфны, если и только если существуют $\bar{\eta} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\gamma \in \mathrm{Aut}\,C$, удовлетворяющие условию $\gamma f \bar{\eta} = f'$ (или $f\bar{\eta} = \xi f'$, где $\xi = \gamma^{-1}$).*

Доказательство очевидно. Возьмём отображение ρ из определения 2.5, совпадающее с $\bar{\eta}$ из условия, и затем применим теорему 2.6. □

3. Построение некоторых сервантных гомоциклических подгрупп конечных групп $\bar{A}$ и End $\bar{A}$

Вернёмся к группе X_f, определённой с помощью $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$ и представленной матрицей B^f, где $p^\alpha = \exp C$, $t = \mathrm{rk}\, C$ и A — жёсткая группа ранга n.

Введём подгруппу $(Cf)_*^{\bar{A}}$ в $\bar{A}$, содержащую Cf, которая однозначно определяется следующим образом.

Определение 3.1. Пусть X_f определяется отображением $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, где $C = \langle s_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle s_t \rangle$ и $s_i f = \beta_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \beta_{in}\bar{v}_n$. Пусть p^{r_i} — наивысшая степень p, делящая $s_i f$ в $\bar{A}$ ($0 \leqslant r_i \leqslant \alpha - 1$), т. е. $\beta_{ij} = \gamma_{ij} p^{t_{ij}}$ с обратимыми или нулевыми $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z}/p^\alpha Z$ и $r_i = \min\{t_{ij} \colon \beta_{ij} \neq 0\}$, $i = 1 \ldots, n$. Обозначим $(Cf)_*^{\bar{A}}$ подгруппу в $\bar{A} = A/p^\alpha A$, порождённую элементами $\tilde{s}_i$, $i = 1, \ldots, t$, такими что

$$\tilde{s}_i = \beta'_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \beta'_{in}\bar{v}_n \in \bar{A}, \quad \text{где} \quad \beta'_{ij} = \gamma_{ij} p^{t_{ij} - r_i} \quad \text{для всех} \quad j = 1, \ldots, n$$

($\beta'_{ij} = 0$, если и только если $\beta_{ij} = 0$). Назовём $(Cf)_*^{\bar{A}}$ *строгой сервантной оболочкой* группы Cf в $\bar{A}$.

Заметим, что в частном случае возможно равенство $(Cf)_*^{\bar{A}} = Cf$.

Лемма 3.2. *Пусть $(Cf)_*^{\bar{A}}$ — строгая сервантная оболочка группы Cf в $\bar{A}$. Тогда $\mathrm{rk}\, Cf = \mathrm{rk}(Cf)_*^{\bar{A}}$ и $(Cf)_*^{\bar{A}}$ является гомоциклической группой с экспонентой p^α, сервантной в $\bar{A}$.*

Доказательство. Элементы $\tilde{s}_i$, для которых $p^{r_i}\tilde{s}_i = s_i f$, линейно независимы, так как это верно для $s_i f$, $i = 1, \ldots, t$. Тогда $t = \mathrm{rk}\, Cf = \mathrm{rk}(Cf)_*^{\bar{A}}$ и группа $(Cf)_*^{\bar{A}} = \langle \tilde{s}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \tilde{s}_t \rangle$, для которой $|\tilde{s}_1| = \ldots = |\tilde{s}_t| = p^\alpha$, является гомоциклической по построению. Она сервантна в $\bar{A}$, поскольку $(Cf)_*^{\bar{A}} \cap p^\alpha \bar{A} = 0$ (см. [3, том 1, предложение 27.1]). □

Напомним, что $\bar{A} = A/p^\alpha A = \langle \bar{v}_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle \bar{v}_n \rangle$, $C = \langle s_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle s_t \rangle$ и строка i матрицы B^f состоит из коэффициентов β_{ij} разложения $s_i f = \beta_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \beta_{in}\bar{v}_n$ (см. (1)—(4), (7)—(10)).

В соответствии с определением 3.1 введём группу $C' \cong (Cf)_*^{\bar{A}}$, такую что

$$C' = \langle s'_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle s'_t \rangle, \quad \text{где} \quad |s'_1| = \ldots = |s'_t| = p^\alpha \tag{11}$$

и для элементов s'_i выполняется $p^{r_i} s'_i = s_i$, $i = 1, \ldots, t$. Очевидно, $C' \supset C$, и мы можем однозначно продолжить f до отображения g, действующего на всей группе C' следующим образом:

$$s'_i g = \beta'_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \beta'_{in}\bar{v}_n. \tag{12}$$

Эквивалентно, $g \in \mathrm{Mon}(C', \bar{A})$ представляется матрицей

$$B^g = \{\beta'_{ij} \colon \beta'_{ij} \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \ (1 \leqslant i \leqslant t, \ 1 \leqslant j \leqslant n)\}. \tag{13}$$

Отметим, что

$$C' \cong C'g = (Cf)_*^{\bar{A}} \supset Cf \quad \text{при сужении} \quad g|_C = f. \tag{14}$$

Определение 3.3. Пусть X_f определяется отображением $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$. Пусть X' — некоторая группа, содержащая A, при этом $X'/A \cong C' \supset C$ и $X' \cong X'_g$, где $g \in \mathrm{Mon}(C', \bar{A})$ удовлетворяет условию

$$C'g = (Cf)_*^{\bar{A}} \quad \text{при сужении} \quad g|_C = f$$

(см. (8)). Назовём группу X'_g *обёрткой* группы X_f.

Как мы видим, строгая сервантная оболочка зависит от выбора порождающих элементов в Cf по определению 3.1. Однако это не создаёт никаких проблем, поскольку, как показано ниже, группа X'_g единственна с точностью до почти изоморфизма.

Предложение 3.4. *Пусть X'_g — обёртка группы X_f, $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, и $X' \cong X'_g$ содержит A. Тогда A является регулятором в X' и X' однозначно определяется с точностью до почти изоморфизма.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из равенства $Cf[p] = C'g[p]$.

Что касается второго утверждения, мы намерены доказать нечто большее, а именно то, что почти изоморфные группы обладают почти изоморфными оболочками.

Действительно, если группы X_f и $X_{f'}$, где $f, f' \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, почти изоморфны, то

$$C\gamma f\bar{\eta} = Cf'$$

для некоторых $\bar{\eta} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\gamma \in \mathrm{Aut}\,C$ по предложению 2.7. По (7) имеем $C = \langle s_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle s_t \rangle$, значит, $Cf = \langle s_1 f \rangle \oplus \ldots \oplus \langle s_t f \rangle$ и $Cf' = \langle s_1 f' \rangle \oplus \ldots \oplus \langle s_t f' \rangle$. По определению 3.1

$$(Cf)_*^{\bar{A}} = \left\langle \frac{s_1 f}{p^{r_1}} \right\rangle \oplus \ldots \oplus \left\langle \frac{s_t f}{p^{r_t}} \right\rangle$$

и

$$(Cf')_*^{\bar{A}} = \left\langle \frac{s_1 f'}{p^{r_1}} \right\rangle \oplus \ldots \oplus \left\langle \frac{s_t f'}{p^{r_t}} \right\rangle,$$

следовательно, $(C\gamma f\bar{\eta})_*^{\bar{A}} = (Cf')_*^{\bar{A}}$.

Рассмотрим обёртки групп X_f и X'_f X'_g и $X'_{g'}$, где g и g' принадлежат $\mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$, причём $C' \cong (C\gamma f\bar{\eta})_*^{\bar{A}} = (Cf')_*^{\bar{A}}$. По (14) немедленно получаем, что $\gamma g\bar{\eta} = g'$, и $X'_g \cong_{\mathrm{nr}} X'_{g'}$ по предложению 2.7. □

С этого момента мы пишем $g \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$, так как доказано, что A является регулятором в $X' \cong X'_g$ (см. определение 3.3). Как и раньше, C не обязана быть гомоциклической в определении группы $X \cong X_f$, где $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$ и $p^\alpha = \exp C$. Известно, что

$$p^\alpha \,\mathrm{End}\, A \subset \mathrm{End}\, X \subset \mathrm{End}\, A$$

(см. [1, 4.1]). Тогда $\overline{\operatorname{End} X} \subset \overline{\operatorname{End} A} = \operatorname{End} A/p^\alpha \operatorname{End} A$ и цепь

$$\overline{\operatorname{End} X} \subset \overline{\operatorname{End} A} \subset \operatorname{End} \bar{A}$$

содержит кольцо, введённое в [9, 10.1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{TypEnd}_X \bar{A} &= \overline{\operatorname{End} X} = \\ &= \{\bar\eta \in \operatorname{End} \bar{A} \colon \overline{A_{\tau_j}}\bar\eta \subset \overline{A_{\tau_j}} \text{ для } j = 1, \ldots, n \text{ и } Cf\bar\eta \subset Cf\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Обратимые $\bar\eta \in \operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$ образуют мультипликативную группу $\operatorname{TypAut}_X \bar{A}$.

Лемма 3.5. *Пусть $f \in \operatorname{ReMon}(C, \bar{A})$ и $X \cong X_f$. Тогда $\bar\eta \in \operatorname{End} \bar{A}$ принадлежит кольцу $\operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$, если и только если существует $\xi \in \operatorname{End} C$, удовлетворяющее условию $\xi f = f\bar\eta$. В частности, $\bar\eta \in \operatorname{Aut} \bar{A}$ принадлежит кольцу $\operatorname{TypAut}_X \bar{A}$, если и только если существует $\xi \in \operatorname{Aut} C$, удовлетворяющее условию $\xi f = f\bar\eta$.*

Доказательство. Положим $f' = f$ в предложении 2.1. Пусть $\bar\eta \in \operatorname{TypEnd} \bar{A}$ (см. определение 2.4). Напомним, что $\bar\eta$ поднимается до отображения $\Psi \in \operatorname{End} X$, если и только если $f\bar\eta = \xi f$ для некоторого $\xi \in \operatorname{End} C$. При этом условии $\bar\eta = \overline{\Psi|_A} \in \overline{\operatorname{End} X} = \operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$, как и требуется.

Необходимое и достаточное условие того, чтобы отображение $\bar\eta \in \operatorname{TypEnd} \bar{A}$ принадлежало $\operatorname{TypAut}_X \bar{A}$, очевидно, так как это частный случай доказанного утверждения. □

В следующем предложении конечные кольца будут рассматриваться как конечные абелевы группы.

Предложение 3.6. *Пусть $X \cong X_f$, $X' \cong X_g$ — жёсткие почти вполне разложимые группы кольцевого типа, где $f \in \operatorname{ReMon}(C, \bar{A})$, $g \in \operatorname{ReMon}(C', \bar{A})$, и пусть $C'g = (Cf)_*^{\bar{A}}$ при $p^\alpha = \exp C$. Тогда $\operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A}$ является сервантной подгруппой в $\operatorname{End} \bar{A}$, содержащей $\operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$, и для любого $\bar\eta \in \operatorname{TypEnd}_{X'}$ существует $r < \alpha$, такое что $p^r\bar\eta \in \operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$.*

Доказательство. Любое отображение $\bar\eta \in \operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A}$ как элемент из $\operatorname{End} \bar{A}$ определяет $a\bar\eta$ для всех $a \in Cf$. Если $(Cf)\bar\eta \subset Cf$, то $\bar\eta \in \operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$. Иначе существует наименьшее натуральное $r \leqslant r' = \max\{r_1, \ldots, r_t\} < \alpha$, такое что $p^r(Cf)\bar\eta \subset Cf$ по определению 3.1, поскольку $Cf \subset C'g$, $p^{r'}(C'g) \subset Cf$ и $(C'g)\bar\eta \subset C'g$. Это означает, что $p^r\bar\eta \in \operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$.

Обратно, любое отображение $\bar\eta \in \operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$ является элементом из $\operatorname{End} \bar{A}$ и может естественно рассматриваться как эндоморфизм на Cf с учётом (15). Фиксируем произвольное $i \leqslant t$. Тогда имеем

$$s_i f\bar\eta = \sum_{j \leqslant t} \gamma_{ij} s_i f = \gamma_{ii} s_i f + \sum_{j \leqslant t,\, j \neq i} \gamma_{ij} s_j f,$$

где $\gamma_{ij} \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Для каждого $j \neq i$ возьмём разбиение на неотрицательные слагаемые $r_i = q_j + q_j'$, где $q_j = r_i$, если $r_i \leqslant r_j$, и $q_j = r_j$ в противном случае.

Мы можем однозначно продолжить $\bar{\eta}$ на $C'g$ следующим образом:

$$\tilde{s}_i\bar{\eta} = \frac{s_i f\bar{\eta}}{p^{r_i}} = \gamma_{ii}\tilde{s}_i + \sum_{j\leqslant t,\, j\neq i} \frac{\gamma_{ij}}{p^{q'_j}} \left(\frac{s_j f}{p^{q_j}}\right),$$

поскольку элементы $\frac{s_j f}{p^{q_j}}$ однозначно определены в $C'g$ по определению 3.1 (см. также (14)). Мы получили, что $\bar{\eta} \in \operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A}$, откуда следует, что $\operatorname{TypEnd}_X \bar{A} \subset \operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A}$.

Наконец, если $\bar{\eta} \in \operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$ делится на p^k в $\operatorname{End} \bar{A}$, то все элементы из $(C'g)\bar{\eta}$ делятся на p^k в $\bar{A}$. Они также делимы на p^k в $C'g$ по лемме 3.2. Это означает, что $\bar{\eta}$ делится на p^k как элемент кольца $\operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A}$. Тогда группа $\operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A}$ сервантна в $\operatorname{End} \bar{A}$. □

4. Матричные представления жёстких почти вполне разложимых групп с примарным регуляторным фактором

Некоторые приложения используемого матричного подхода могут быть найдены в [9, разд. 12.4, 12.5]. Однако его полное описание с доказательствами приводится здесь для удобства чтения.

Как и выше, пусть $f \in \operatorname{ReMon}(C, \bar{A})$ представляется матрицей B^f, где $p^\alpha = \exp C$ и $\bar{A} = A/p^\alpha A$. Напомним, что для любого $f \in \operatorname{ReMon}(C, \bar{A})$ вводится $g \in \operatorname{ReMon}(C', \bar{A})$ с гомоциклической группой C', которая определяется единственным образом (см. (11)—(13)). Заметим, что возможно, что $C' = C$.

Пусть M_t обозначает мультипликативную группу матриц

$$\Gamma = \{\gamma_{ij} \colon \gamma_{ij} \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}\ (1 \leqslant i, j \leqslant t),\ \det\Gamma \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \text{ обратим}\}$$

и M_n обозначает мультипликативную группу диагональных матриц

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{с обратимыми} \quad d_{ii} \in \tau_i,\ i = 1, \dots, n. \tag{16}$$

Хорошо известно, что $\mathrm{M}_t \cong \operatorname{Aut} C'$ и $\mathrm{M}_n \cong \operatorname{Aut} A$.

Если k обратимо в $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, то для рационального числа $\frac{l}{k}$ выполняется $\overline{(\frac{l}{k})} = \bar{l}\,(\bar{k})^{-1}$. Используя это и тот факт, что $\tau_i(p) = 0$ при всех $i = 1, \dots, n$, в соответствии с (6) введём мультипликативную группу $\bar{\mathrm{M}}_n = \mathrm{M}_n\rho$ диагональных матриц, записываемых как $\operatorname{diag}\{\bar{d}_{11}, \bar{d}_{22}, \dots, \bar{d}_{nn}\}$:

$$\bar{D} = \{\text{обратимые } \bar{d}_{ii} \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}\ (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ и } \bar{d}_{ij} = \bar{0}\ (i \neq j)\}, \tag{17}$$

которая изоморфна группе $\overline{\operatorname{Aut} A} \subset \operatorname{Aut} \bar{A}$, обозначаемой $\operatorname{TypAut} \bar{A}$.

Теперь будем записывать матрицы следующим образом:

$$\bar{D} = \{\bar{d}_{ij} \in \mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}\}, \quad \Gamma = \{\gamma_{ij} \in \mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}\}, \quad B^g = \{\beta'_{ij} \in \mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}\}$$

(см. (12), (13)).

Для группы $X \cong X_f$, представленной отображением $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$ с матрицей B^f, группа C не является гомоциклической в общем случае (см. (9)). Для любого $j \leqslant n$ введём число, соответствующее типу $\tau_j \in T_{\mathrm{cr}}(X_f)$:

$$m_{\tau_j}(B^f) = \max\{|\beta_{1j}|, \ldots, |\beta_{tj}|\}, \quad \beta_{ij} \in \mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}, \tag{18}$$

которое равно максимальному порядку элементов в столбце j матрицы B^f.

Предложение 2.7 утверждает, что если группы X_f и $X_{f'}$, определённые при помощи $f, f' \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, почти изоморфны, то существуют $\bar{\eta} \in \mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ и $\xi \in \mathrm{Aut}\,C$, такие что $f\bar{\eta} = \xi f'$. Матричное представление для $f\bar{\eta}$ может быть получено как произведение $B^f \bar{D}$ с некоторой обратимой диагональной матрицей $\bar{D} \in \bar{\mathrm{M}}_n$, что означает, что $m_{\tau_j}(B^f) = m_{\tau_j}(B^{f\bar{\eta}})$ для всех $j = 1, \ldots, t$ (см. (16), (17)).

Пусть $\bar{C}_{\tau_j}$ — образ Cf в $\bar{A}_{\tau_j}$ при естественной проекции $\bar{A} \to \bar{A}_{\tau_j}$. Очевидно, $m_{\tau_j}(B^f) = \exp \bar{C}_{\tau_j}$, и из

$$Cf\bar{\eta} = C\xi f' = Cf' \tag{19}$$

мы выводим, что числа, определённые в (18) для группы X_f, являются её инвариантами почти изоморфизма.

Определение 4.1. Пусть B^f — матричное представление отображения $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, где A — жёсткая вполне разложимая группа и $p^{\alpha} = \exp C$ (см. (9), (10)).

Числа

$$m_{\tau_j}(B^f) = \max\{|\beta_{1j}|, \ldots, |\beta_{tj}|\}, \quad \beta_{ij} \in \mathbb{Z}/p^{\alpha}\mathbb{Z}, \tag{20}$$

будут называться *инвариантами критических типов* группы X_f, $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$. Они будут обозначаться $m_{\tau_j}(X_f)$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Заметим, что если $t = 1$, то группа X_f является почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором и числа $m_{\tau_j}(X_f)$ совпадают с инвариантами почти изоморфизма, введёнными в [7; 9, определение 12.6.2].

Теорема 4.2. *Пусть $g, g' \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$ представляются матрицами B^g и $B^{g'}$ соответственно и C' — гомоциклическая p-группа. Тогда $X_g \cong_{\mathrm{nr}} X_{g'}$, если и только если существуют матрицы $\Gamma \in \mathrm{M}_t$ и $D \in \mathrm{M}_n$, такие что $B^{g'} = \Gamma B^g \bar{D}$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 2.1 и замечания 2.2. □

Определение 4.3. Матрицы B^{f_1} и B^{f_2}, $f_1, f_2 \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, назовём *почти равными* (обозначение $B^{f_1} \approx B^{f_2}$), если B^{f_1} может быть получена из B^{f_2} изменением порядка следования столбцов и/или строк.

Пусть группа $X \cong X_f$, $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, представляется матрицей B^f, где C — примарная p-группа. Если $B^f \approx B^{f'}$ для некоторого отображения $f' \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, то $B^{f'}$ также может рассматриваться как матричное представление той же группы, поскольку изменение порядка следования строк и столбцов означает перенумерацию порождающих элементов группы C и элементов множества $T_{\mathrm{cr}}(X_f)$ соответственно (см. (2) и (7)).

Предположим, что $X = Y_1 \oplus Y_2$. Тогда $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_1 = Y_1 \cap A$ и $A_2 = Y_2 \cap A$, так как A — вполне характеристическая подгруппа в X. Отсюда следует, что $C \cong X/A \cong Y_1/A_1 \oplus Y_2/A_2$ и $Y_1 \cong Y_{f_1}$, $Y_2 \cong Y_{f_2}$, где $f = (f_1, f_2)$, $f_1 \in \mathrm{ReMon}(C_1, \bar{A}_1)$, $f_2 \in \mathrm{ReMon}(C_2, \bar{A}_2)$, $C_1 = Y_1/A_1$, $C_2 = Y_2/A_2$.

Обозначим $B' = B^{f_1}$ и $B'' = B^{f_2}$.

Лемма 4.4. *Пусть $X \cong X_g$, $g \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$, представляется матрицей B^g, где C' — гомоциклическая p-группа. Тогда X разложима, если и только если существует матрица $\Gamma \in \mathrm{M}_t$, такая что ΓB^g почти равна матрице блочно-диагонального вида*

$$\Gamma B^g \approx \left(\begin{array}{c|c} B' & 0 \\ \hline 0 & B'' \end{array}\right). \tag{21}$$

Доказательство. Из матричного представления (17) для $\mathrm{TypAut}\,\bar{A}$ жёсткой группы X мы получаем, что умножение справа на диагональную матрицу $\bar{D}$ сводится к умножению столбцов в B^g на обратимые элементы из $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Применяя теорему 4.2, мы получаем, что группа $X \cong X_g$ разложима, если и только если существует матрица $\Gamma \in \mathrm{M}_t$, такая что $X \cong_{\mathrm{nr}} X_{g'}$ при условии, что $g' \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$ представляется матрицей ΓB^g блочно-диагонального вида с точностью до почти равенства. $\square$

Основываясь на лемме 4.4, сосредоточимся на матрице ΓB^g, $\Gamma \in \mathrm{M}_t$, определённой с точностью до почти равенства, которая получается из B^g с помощью конечного множества следующих операций:

1) умножение любой строки на обратимое число $\alpha \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$;
2) прибавление любой строки, умноженной на $\alpha' \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, к другой строке;
3) изменение порядка следования строк и столбцов.

Определение 4.5. Операции 1)—3) будут называться *допустимыми преобразованиями* матрицы B^g, представляющей $g \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$, где C' — гомоциклическая группа.

Пусть $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$ и $\{1, \ldots, n\} = I_1 \cup I_2$ — произвольное разбиение. Пусть $B^f(I_1)$, $B^f(I_2)$ — подматрицы в B^f, состоящие из её столбцов с номерами $i \in I_1$ и $i \in I_2$ соответственно. Мы рассматриваем матрицу B^f как множество её столбцов, тогда $B^f = B^f(I_1) \cup B^f(I_2)$, причём $I_1 \cap I_2 = \varnothing$.

Определение 4.6. Матрица B^f называется *связной*, если ни для какого разбиения $\{1, \ldots, n\} = I_1 \cup I_2$ на непустые подмножества не существует такого разбиения $\{1, \ldots, t\} = J_1 \cup J_2$ ($J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $J_1 \neq \varnothing$, $J_2 \neq \varnothing$), что все строки матрицы $B^f(I_1)$ с номерами $j \in J_1$ и все строки матрицы $B^f(I_2)$ с номерами $j \in J_2$ нулевые.

Другими словами, связная матрица не может быть почти равна никакой матрице блочно-диагонального вида (см. (21)).

Лемма 4.7. *Пусть жёсткая неразложимая почти вполне разложимая группа $X \cong X_f$ кольцевого типа представляется матрицей B^f, $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, где $A = R(X)$. Тогда B^f — связная матрица.*

Доказательство тривиально. □

Определение 4.8. Жёсткая почти вполне разложимая группа $X \cong X_f$, $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, кольцевого типа называется *строго неразложимой группой*, если группа $X' \cong X_g$, определённая с помощью $g \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$ и $C'g = (Cf)^{\bar{A}}_*$, является неразложимой.

Лемма 4.9. *Строго неразложимая группа X неразложима* (*в обычном смысле*).

Доказательство. Из (15) следует, что $\mathrm{TypEnd}_{X'} \bar{A}$ не имеет нетривиальных идемпотентов, поскольку X' неразложима. По предложению 3.6 $\mathrm{TypEnd}_X \bar{A}$ обладает тем же свойством. □

Следующий результат согласуется с [9, лемма 12.5.2] и даёт каноническое матричное представление для $g \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$ в случае гомоциклического регуляторного фактора рассматриваемой почти вполне разложимой группы.

Теорема 4.10 (каноническая форма представляющей матрицы B^g). *Пусть $X' \cong X_g$ является жёсткой неразложимой почти вполне разложимой группой кольцевого типа, для которой $p^\alpha = \exp C'$, $g \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$ и $C'g$ — гомоциклическая подгруппа в $\bar{A}$. Тогда существует матрица $\Gamma \in \mathrm{M}_t$, при умножении на которую получается матрица ΓB^g, почти равная матрице*

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{1\ t+1} & b_{1\ t+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{2\ t+1} & b_{2\ t+2} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{n\ t+1} & b_{n\ t+2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right) \tag{22}$$

с элементами $b_{il} = b'_{il} p^{k_{il}}$, где числа $b'_{il} \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ являются обратимыми или нулями и $0 \leqslant k_{il} < \alpha$ $(t+1 \leqslant l \leqslant n)$.

Доказательство. Требуемая форма матрицы получается с помощью допустимых преобразований при условии сервантности $C'g$ в $\bar{A}$, что означает наличие в каждой строке представляющей матрицы B^g обратимых элементов из $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. □

По построению переход к полученной канонической форме осуществляется переходом к специально выбранной системе образующих элементов группы C'.

5. Кольца эндоморфизмов строго неразложимых жёстких почти вполне разложимых групп с примарным регуляторным фактором

Теорема 5.1. *Пусть* $X \cong X_f$ — *жёсткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа, где* $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$ *и* $p^\alpha = \exp C$. *Тогда* $\mathrm{TypEnd}_X \bar{A} \cong \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, *если и только если* X *строго неразложима.*

Доказательство. Пусть I — единичный автоморфизм на $\bar{A}$. Как и раньше, $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, $g \in \mathrm{ReMon}(C', \bar{A})$, где $C' \cong C'g = (Cf)_*^{\bar{A}}$.

Докажем необходимость. Не ограничивая общности, примем, что матрица B^g, представляющая неразложимую группу $X' \cong X_g$, имеет каноническую форму (22). Из её структуры следует, что $(s_i'g)\bar{\eta} \in \langle s_i'g\rangle$ и $(s_i'g)\bar{\eta} \neq 0$ для любого $0 \neq \bar{\eta} \in \overline{\mathrm{End}\, X}$, $i = 1, \ldots, t$. Поскольку B^g — связная матрица по условию, произвольное отображение $\bar{\eta}$ действует как умножение на $l \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, т. е. $(\bar{v}_j)\bar{\eta} = l\bar{v}_j$ для любого $j = 1, \ldots, n$. Тогда $\mathrm{TypEnd}_{X'} \bar{A} \cong \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, и по предложению 3.6 $\mathrm{TypEnd}_X \bar{A}$ также изоморфно $\langle I\rangle \cong \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, что и требуется доказать.

Докажем достаточность. Если $X' = Y_1' \oplus Y_2'$, то существуют соответствующие разложения $A = A_1 \oplus A_2$, где $A_1 = Y_1' \cap A$, $A_2 = Y_2' \cap A$, и $C' \cong X'/A \cong Y_1'/A_1 \oplus Y_2'/A_2$. Не ограничивая общности, примем, что $A_1 = \bigoplus\limits_{j=1,\ldots,k} A_{\tau_j}$ и $A_2 = \bigoplus\limits_{j=k+1,\ldots,n} A_{\tau_j}$ для некоторого $k < n$ и $C' = C_1' \oplus C_2'$, где $C_1' \cong Y_1'/A_1$, $C_2' \cong Y_2'/A_2$. Тогда B^g имеет блочно-диагональный вид (21),

$$B^g = \left(\begin{array}{c|c} B' & 0 \\ \hline 0 & B'' \end{array}\right),$$

откуда следует, что $g = (g_1, g_2)$, где $g_1 \in \mathrm{ReMon}(C_1', \bar{A}_1)$ и $g_2 \in \mathrm{ReMon}(C_2', \bar{A}_2)$, причём $\bar{A}_1 = \langle \bar{v}_1\rangle \oplus \ldots \oplus \langle \bar{v}_k\rangle$ и $\bar{A}_2 = \langle \bar{v}_{k+1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle \bar{v}_n\rangle$. По теореме 4.10 существует матрица $\Gamma \in \mathrm{M}_t$, соответствующая некоторому $\gamma \in \mathrm{Aut}\, C$, такая что

$$\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma' & 0 \\ \hline 0 & \Gamma'' \end{array}\right)$$

и матрица

$$\Gamma B^g \approx \left(\begin{array}{c|c} \Gamma' B' & 0 \\ \hline 0 & \Gamma'' B'' \end{array}\right)$$

имеет каноническую форму (22) своих блоков $\Gamma' B'$ и $\Gamma'' B''$, которые представляют $\gamma_1 g_1 \in \mathrm{ReMon}(C_1', \bar{A}_1)$ и $\gamma_2 g_2 \in \mathrm{ReMon}(C_2', \bar{A}_2)$ из $\gamma g = (\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2)$, где $\gamma_1 = \gamma|_{C_1'}$ и $\gamma_2 = \gamma|_{C_2'}$.

Пусть I_i — единичный автоморфизм на $\bar{A}_i$, $i = 1, 2$. Тогда $I_1' = (I_1, 0)$ и $I_2' = (0, I_2)$ являются идемпотентами в $\mathrm{TypEnd}\, \bar{A}$ и $I = I_1' + I_2'$ — единичный автоморфизм на $\bar{A} = \bar{A}_1 \oplus \bar{A}_2$.

Пусть $\bar{\eta} \in \mathrm{TypEnd}_{X'} \bar{A}$. Для определённости считаем, что группа Y_1' неразложима. Тогда $(\bar{v}_j)\bar{\eta} = l\bar{v}_j$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, где $j \leqslant k$, как это было показано в начале доказательства для неразложимой группы X', к тому же $(\bar{v}_j)\bar{\eta} \in \langle \bar{v}_j \rangle$, если $j > k$. Отсюда следует, что

$$\mathrm{TypEnd}_{X'} \bar{A} = \langle I, I_1' \rangle = \langle I_1' \rangle \oplus \langle I_2' \rangle \cong \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}.$$

По предложению 3.6 $\mathrm{TypEnd}_X \bar{A}$ содержит $p^r I_1'$ для некоторого натурального r. Следовательно, $\mathrm{TypEnd}_X \bar{A}$ имеет подкольцо $\langle I \rangle \cong \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, но не совпадает с ним. □

Замечание 5.2. Теорема 5.1 верна, в частности, для жёсткой почти вполне разложимой группы $X \cong X_f$, $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, где Cf — сервантная гомоциклическая подгруппа в $\bar{A}$. В этом случае строгая неразложимость совпадает с неразложимостью в классическом смысле.

Теорема 5.3 (главная теорема). *Пусть жёсткая почти вполне разложимая группа кольцевого типа $X \cong X_f$ определена отображением $f \in \mathrm{ReMon}(C, \bar{A})$, где C — конечная p-группа. Тогда существует жёсткая почти вполне разложимая с циклическим регуляторным фактором группа Y, такая что $\mathrm{End}\, X \cong \mathrm{End}\, Y$, если и только если X строго неразложима.*

Доказательство. Хорошо известно, что $\mathrm{TypEnd}_Y \bar{A} \cong \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ для любой почти вполне разложимой с циклическим регуляторным фактором группы с регулятором A и $p^\alpha = \exp Y/A$ (см. [11, предложение 6.2]). Тогда по теореме 5.1 и предложению 3.6 строгая неразложимость группы X является необходимым условием существования почти вполне разложимой с циклическим регуляторным фактором группы Y с требуемым свойством.

Обратно, из (7)—(10) следует, что строки матрицы B^f, представляющей X_f, отождествляются с образующими s_i группы $C = X/A$, для которых $(s_i f)\bar{\eta} = l s_i f$ с некоторым $l \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, если $\bar{\eta} \in \mathrm{TypEnd}_X \bar{A}$ (см. теорему 5.1). Рутинная проверка показывает, что прообразами в X любого элемента $l s_i f = l(\beta_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \beta_{in}\bar{v}_n)$ при композиции отображений

$$X \to X/A \to A/p^\alpha A = \bar{A}$$

могут быть только элементы

$$(l\beta_{i1}v_1 + \beta_{i1}m_{\tau_1}\varkappa_1 v_1) + \ldots + (l\beta_{in}v_n + \beta_{in}m_{\tau_n}\varkappa_n v_n), \quad \text{где} \quad \varkappa_j \in \tau_j \cong \mathrm{End}(A_{\tau_j}),$$

поскольку $\beta_{ij}m_{\tau_j} = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$ и $i = 1, \ldots, t$. Тогда гомоморфизм $\bar{\eta} \in \mathrm{TypEnd}_X \bar{A}$, действующий как умножение на число $l \in \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$, поднимается до $\eta \in \mathrm{End}\, X$, определённого на $A = A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_2} \oplus \ldots \oplus A_{\tau_n}$, следующим образом:

$$\eta = lI + (m_{\tau_1}\varkappa_1, \ldots, m_{\tau_n}\varkappa_n),$$

где I — единичное отображение на A и $m_{\tau_j} = m_{\tau_j}(X_f)$, $j = 1, \ldots, n$ (см. (20)). В [11] и [6, теоремы 3.4, 3.6] показано, что такие отображения $\eta \in \mathrm{End}\, A$ составляют кольцо эндоморфизмов некоторой почти вполне разложимой с циклическим регуляторным фактором группы Y с регулятором A и инвариантами m_{τ_j} (определяющими Y с точностью до почти изоморфизма). □

Следствие 5.4. *Пусть X — жёсткая почти вполне разложимая группа с гомоциклическим p-примарным регуляторным фактором. Тогда существует почти вполне разложимая с циклическим регуляторным фактором группа Y, для которой $\operatorname{End} X \cong \operatorname{End} Y$, если и только если X неразложима.*

В [6] доказано, что жёсткие почти вполне разложимые с циклическим регуляторным фактором группы X и Y кольцевого типа почти изоморфны, если и только если их кольца эндоморфизмов изоморфны. Теорема 5.3 убеждает нас в том, что условие на регуляторные факторы групп быть циклическими не может быть снято в этом утверждении. Таким образом, показано, что класс почти вполне разложимых абелевых групп содержит подкласс, удовлетворяющий теореме Бэра—Капланского с точностью до почти изоморфизма, но сам таковым не является.

Пример 1. Пусть жёсткая неразложимая почти вполне разложимая группа $X \cong X_f$ кольцевого типа и ранга 4 представляется матрицей B^f, $f \in \operatorname{ReMon}(C, \bar{A})$, где $p^2 = \exp C$. Пусть буква r над стрелками обозначает допустимые преобразования, которые эквивалентны левому умножению B^f на подходящую матрицу из M_t (см. определение 4.5). Введём группу X'_g (обёртку для X_f), определяемую отображением $g \in \operatorname{ReMon}(C', \bar{A})$ с гомоциклической группой $C' \cong (Cf)_*^{\bar{A}} = C'g$. Пусть

$$B^f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & p & 0 \end{pmatrix}, \quad B^g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{r}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma B^g \text{ —}$$

матричные представления рассматриваемых групп. Заметим, что матрица ΓB^g имеет каноническую форму (22). Очевидно, что $X' \cong X'_g$ разложима, значит, $X \cong X_f$ не является строго неразложимой группой. Мы увидим, что X неразложима в обычном смысле, так как $\operatorname{TypEnd}_X \bar{A}$ не содержит нетривиальных идемпотентов.

Напомним, что $\operatorname{TypEnd}_{X'}$ изоморфно подкольцу диагональных матриц (см. (17)). Записывая диагональные матрицы $\operatorname{diag}\{\bar{d}_{11}, \bar{d}_{22}, \bar{d}_{33}, \bar{d}_{44}\}$ из $\bar{\mathrm{M}}_4$ последовательностями их диагональных элементов, мы получаем следующие представления (см. лемму 3.5):

$$\operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A} \cong \langle (1,0,0,1) \rangle \oplus \langle (0,1,1,0) \rangle \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z},$$
$$\operatorname{TypEnd}_X \bar{A} \cong \langle (1,1,1,1),\ (0,p,p,0) \rangle \neq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}.$$

Пример 2. Пусть $\operatorname{rk} X = 3$ и $\exp(X/A) = p^2$. Сохраняя предыдущие обозначения, рассмотрим

$$B^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & p & -p \end{pmatrix}, \quad B^g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица B^g имеет каноническую форму (22). Легко убедиться, что $X \cong X_f$ сильно неразложима и

$$\operatorname{TypEnd}_{X'} \bar{A} \cong \operatorname{TypEnd}_X \bar{A} \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}.$$

Литература

[1] Благовещенская Е. Почти вполне разложимые группы и их кольца эндоморфизмов. — СПб., 2009. — (Математика в политехническом университете).

[2] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2006.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974, 1977.

[4] Arnold D. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[5] Blagoveshchenskaya E. Direct decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // Abelian Groups and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — P. 163—179.

[6] Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer–Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85—93.

[7] Blagoveshchenskaya E., Mader A. Decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // Contemp. Math. — 1994. — Vol. 171. — P. 21—36.

[8] Faticoni T., Schultz P. Direct decompositions of ACD groups with primary regulating index // Abelian Groups and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — P. 233—241.

[9] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic and Applications; Vol. 13).

[10] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Photocopied notes. — Montreal, 1992.

[11] Mader A., Schultz P. Endomorphism rings and automorphism groups of almost completely decomposable groups // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28. — P. 51—68.

[12] Mader A., Vinsonhaler C. Classifying almost completely decomposable groups // J. Algebra. — 1998. — Vol. 170, no. 3. — P. 754—780.