Автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой

Е. И. БУНИНА, П. А. ВЕРЁВКИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: HelenBunina@yandex.ru

УДК 512.54

Ключевые слова: группа Шевалле, автоморфизм, локальное кольцо.

Аннотация

В данной работе мы доказываем, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа G_2 над коммутативным локальным кольцом с необратимой двойкой является композицией кольцевого автоморфизма и сопряжения с помощью некоторой матрицы.

Abstract

E. I. Bunina, P. A. Veryovkin, Automorphisms of Chevalley groups of type G_2 over local rings without $1/2$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 49—66.

In this paper, we prove that every automorphism of a Chevalley group of type G_2 over a commutative local ring without $1/2$ is the composition of a ring automorphism and a conjugation by some matrix.

Введение

Цель работы — доказать, что каждый автоморфизм групп Шевалле типа G_2 над коммутативным локальным кольцом с необратимой двойкой есть композиция кольцевого автоморфизма и сопряжения некоторой матрицей. Сразу отметим, что в работе мы следуем статьям Е. И. Буниной, в первую очередь статье [3], в которых доказан такой же результат для групп Шевалле других типов.

Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал (совпадающий с радикалом этого кольца). Это равносильно тому, что необратимые элементы кольца R образуют идеал.

Мы будем описывать автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой и будем пользоваться тем, что тройка обратима, потому что иначе (так как необратимые элементы образуют идеал и $3-2=1$) единица была бы необратима, что, конечно, неверно. Обратимостью тройки мы будем активно пользоваться, но упоминать это уже не будем. Заметим, что для

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 7, с. 49—66.

системы корней типа G_2 существует лишь одна решётка весов, которая одновременно является односвязной и присоединённой, поэтому для каждого кольца R существует лишь одна группа Шевалле типа $G_2 - G(R) = G_{\mathrm{ad}}(G_2, R)$. Над локальными кольцами односвязные группы Шевалле совпадают со своими элементарными подгруппами, поэтому рассматриваемая группа Шевалле одновременно является элементарной (т. е. мы знаем образующие и соотношения в ней).

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Р. Стейнбергом [27] для конечного случая и Дж. Хамфри [24] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы А. Бореля и Дж. Титса [12], Р. Картера и Ю Чена [17], Ю Чена [18—22], Э. Абе [11], А. Клячко [25].

Аналог теоремы 1 для систем корней типов A_l, D_l и E_l был получен Е. И. Буниной в [5], в работе [4] полностью описаны автоморфизмы групп Шевалле данных типов над локальными кольцами с $1/2$. Подобная теорема для локальных колец без $1/2$ была доказана в [3]. Теорема 1 для систем корней типов B_2 и G_2 получена в [1], однако в этой работе для системы корней G_2 предполагаются обратимыми двойка и тройка в кольце. В [14] Е. И. Буниной были доказаны аналогичные теоремы для системы корней F_4, а в [15] все предыдущие результаты с помощью метода локализации обобщены для случая присоединённых групп на произвольные коммутативные кольца (с соответствующими условиями обратимости двойки или тройки).

Пока неясно, каким образом можно избавиться от требования обратимости тройки для системы корней G_2, потому что даже над полями характеристики 3 существует нестандартный автоморфизм для системы корней G_2 (см. [28, § 10]). С другой стороны, от требования обратимости двойки удаётся отказаться, этому и посвящена данная работа.

1. Определения и формулировка основной теоремы

Мы фиксируем систему корней Φ, имеющую тип G_2 (подробные сведения о системах корней и их свойствах можно найти в [13, 23]). Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. Пронумеруем корни системы G_2 следующим образом (рис. 1):

$$\alpha_{\pm 1} = \pm(e_1 - e_2),\quad \alpha_{\pm 2} = \pm(2e_2 - e_1 - e_3),\quad \alpha_{\pm 3} = \pm(e_2 - e_3),$$
$$\alpha_{\pm 4} = \pm(e_1 - e_3),\quad \alpha_{\pm 5} = \pm(2e_1 - e_2 - e_3),\quad \alpha_{\pm 6} = \pm(-2e_3 + e_1 + e_2).$$

Предположим теперь, что у нас имеется полупростая комплексная алгебра Ли $\mathcal{L}$ типа G_2 с картановской подалгеброй $\mathcal{H}$ (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли можно найти в [23]). Тогда в алгебре $\mathcal{L}$ можно выбрать базис Шевалле

$$\{h_i \mid i = 1, 2;\ x_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$$

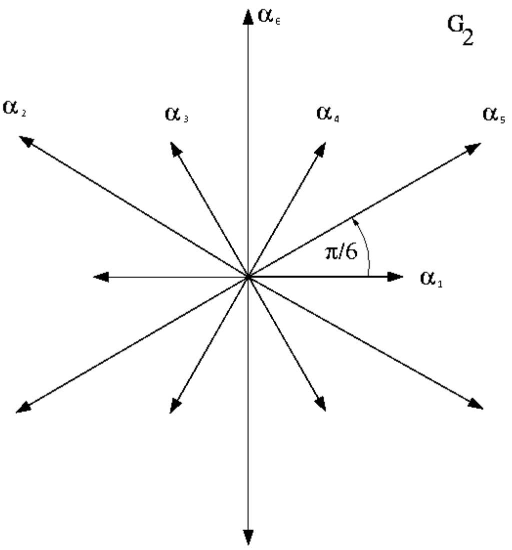

Рис. 1

так, что для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов того же базиса, а именно

1) $[h_i, h_j] = 0$;
2) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha_i, \alpha \rangle x_\alpha$;
3) если $\alpha = n_1\alpha_1 + \ldots + n_4\alpha_4$, то $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = n_1 h_1 + \ldots + n_4 h_4$;
4) если $\alpha + \beta \notin \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = 0$;
5) если $\alpha + \beta \in \Phi$, α, β — длинные корни, то $[x_\alpha, x_\beta] = c x_{\alpha+\beta}$;
6) если $\alpha + \beta \in \Phi$, α — длинный корень, β — короткий корень или α, β — короткие корни, то $[x_\alpha, x_\beta] = a x_{\alpha+\beta} + b x_{\alpha+2\beta} + \ldots$.

Возьмём теперь произвольное локальное кольцо и построим элементарную присоединённую группу Шевалле типа G_2 над этим кольцом (см., например, [28]). Для удобства кратко воспроизведём построение здесь, а подробно опишем в приложении.

В базисе Шевалле алгебры $\mathcal{L}$ все операторы $(x_\alpha)^k/k!$ для $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленная матрица также может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом с единицей. Пусть R — такое кольцо. Рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R, матрицы $(x_\alpha)^k/k!$ при $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $\mathrm{M}_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$\exp(tx_\alpha) = x_\alpha(t) = 1 + tx_\alpha + \frac{t^2(x_\alpha)^2}{2} + \ldots + \frac{t^k(x_\alpha)^k}{k!} + \ldots .$$

Так как все матрицы x_α нильпотентны, этот ряд конечен. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами*. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(R^n)$, порождённая всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной присоединённой группой Шевалле* (обозначение $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$).

В элементарной группе Шевалле введём следующие важные элементы:

— $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$;
— $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$.

Действие элементов $x_\alpha(t)$ на базисе Шевалле описано в [16, 29] и будет явно выписано ниже.

Над локальными кольцами для системы корней типа G_2 группа Шевалле $G(R) = G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ совпадает со своей элементарной подгруппой, поэтому в данной работе мы не будем вводить группы Шевалле.

Нам понадобятся стандартные автоморфизмы (элементарной) группы Шевалле $G(R)$ и один не совсем обычный «временный» тип автоморфизмов.

Кольцевые автоморфизмы. Пусть $\rho\colon R \to R$ — автоморфизм кольца R. Отображение $(a_{ij}) \mapsto \big(\rho(a_{ij})\big)$ — автоморфизм группы $G(R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G(R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$ и $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha\big(\rho(t)\big)$.

Внутренние автоморфизмы. Пусть $g \in G(R)$ — элемент рассматриваемой группы Шевалле. Сопряжение группы $G(R)$ с помощью элемента g — автоморфизм группы $G(R)$, который обозначается i_g и называется *внутренним автоморфизмом* группы $G(R)$.

Эти два автоморфизма называются *стандартными*. К стандартным также относятся центральный и диаграммный автоморфизмы, однако в рассматриваемом случае нетривиальных таких нет, поэтому будем говорить, что автоморфизм группы $G(R)$ стандартен, если он является композицией введённых двух типов автоморфизмов.

Кроме того, нам понадобится ещё один вид автоморфизмов.

Автоморфизмы-сопряжения. Пусть V — пространство представления группы $G(R)$, $C \in \mathrm{GL}(V)$ — матрица, оставляющая группу Шевалле на месте:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Тогда отображение $x \mapsto CxC^{-1}$ из $G(R)$ в себя — автоморфизм группы Шевалле, который обозначается i_C и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы $G(R)$, *индуцированным элементом* C группы $\mathrm{GL}(V)$.

Сформулируем главную теорему данной работы.

Теорема 1. *Пусть $G(R) = G(\Phi, R)$ — группа Шевалле с системой корней типа G_2, R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм группы $G(R)$ является композицией кольцевого автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Разделы 2—7 посвящены доказательству теоремы 1.

2. Замена исходного автоморфизма изоморфизмом специального вида

В этом разделе мы используем некоторые соображения из работы [6].

Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R, k — поле вычетов R/J. Тогда $E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ — наибольшая нормальная собственная подгруппа в $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ (см. [10]). Таким образом, подгруппа E_J инвариантна относительно действия автоморфизма φ.

Значит, автоморфизм

$$\varphi\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\bar{\varphi}\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)/E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k).$$

Группа $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)$ является присоединённой группой Шевалле над полем, значит, автоморфизм $\bar{\varphi}$ стандартен (см. [28]), т. е. имеет вид

$$\bar{\varphi} = i_{\bar{g}}\bar{\rho}, \quad \bar{g} \in N\bigl(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)\bigr),$$

где $\bar{\rho}$ — кольцевой автоморфизм, индуцированный некоторым автоморфизмом поля k.

Ясно, что существует матрица $g \in \mathrm{GL}_n(R)$, такая что её образ при факторизации R по J совпадает с $\bar{g}$. Мы не можем быть уверены, что $g \in N\bigl(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)\bigr)$.

Рассмотрим отображение $\varphi' = i_{g^{-1}}\varphi$. Это изоморфизм группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \subset \mathrm{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$, причём её образ при факторизации R по J совпадает с автоморфизмом $\bar{\rho}$.

Проведённые рассуждения доказывают следующее утверждение.

Предложение 1. *Любая матрица $A \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R' в R, порождённого единицей, отображается при изоморфизме φ' в матрицу из множества*

$$A \cdot \mathrm{GL}_n(R, J) = \{B \in \mathrm{GL}_n(R) \mid A - B \in M_n(J)\}.$$

Пусть $a \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $a^3 = 1$. Тогда элемент

$$e = \frac{1}{3}(1 + a + a^2)$$

является идемпотентом в кольце $\mathrm{M}_n(R)$. Этот идемпотент e определяет разложение свободного R-модуля $V \cong R^n$:

$$V = eV \oplus (1 - e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [26]). Пусть $\bar{V} = \bar{V_0} \oplus \bar{V_1}$ — разложение k-модуля (линейного пространства) $\bar{V} \cong k^n$ относительно $\bar{a}$ и

$$\bar{e} = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2).$$

Предложение 2. *Модули (подпространства) $\bar{V_0}$, $\bar{V_1}$ являются образами модулей V_0, V_1 при факторизации по J.*

Доказательство. Обозначим образы модулей V_0, V_1 при факторизации по J через $\tilde{V_0}$, $\tilde{V_1}$ соответственно. Так как $V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}$, $V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\}$, то

$$\bar{e}(\bar{x}) = \frac{1}{3}(1 + \bar{a} + \bar{a}^2)(\bar{x}) = \frac{1}{3}\big(1 + \bar{a}(\bar{x}) + \bar{a}^2(\bar{x})\big) = \frac{1}{3}(1 + \overline{a(x)} + \overline{a(x)^2}) = \overline{e(x)}.$$

Тогда $\tilde{V_0} \subseteq \bar{V_0}$, $\tilde{V_1} \subseteq \bar{V_1}$.

Пусть $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in V_0$, $x_1 \in V_1$. Тогда $\bar{e}(\bar{x}) = \bar{e}(\bar{x}_0) + \bar{e}(\bar{x}_1) = \bar{x}_0$. Если $\bar{x} \in \tilde{V_0}$, то $\bar{x} = \bar{x}_0$. □

Пусть теперь для матрицы a с целыми коэффициентами $b = \varphi'(a)$. Тогда $b^3 = 1$ и b сравнима с a по модулю радикала J.

Предложение 3. *Предположим, что $a, b \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $a^3 = b^3 = 1$, a — матрица с элементами из подкольца $R' \subset R$, порождённого единицей, b и a сравнимы по модулю радикала J, $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение V по отношению к a, $V = V_0' \oplus V_1'$ — разложение V по отношению к b. Тогда $\dim V_0' = \dim V_0$, $\dim V_1' = \dim V_1$.*

Доказательство. Мы имеем R-базис модуля V $\{e_1, \ldots, e_n\}$, такой что $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset V_0$, $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\} \subset V_1$. Ясно, что

$$\bar{a}\bar{e}_i = \overline{ae_i} = \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j\right)} = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} \bar{e}_j.$$

Пусть $\bar{V} = \bar{V_0} \oplus \bar{V_1}$, $\bar{V} = \bar{V_0}' \oplus \bar{V_1}'$ — разложения k-модуля (пространства) $\bar{V}$ по отношению к $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Ясно, что $\bar{V_0} = \bar{V}_0'$, $\bar{V_1} = \bar{V_1}'$. Таким образом, по предложению 2 образы модулей V_0 и V_0', V_1 и V_1' при факторизации по радикалу J совпадают. Возьмём такие $\{f_1, \ldots, f_k\} \subset V_0'$, $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\} \subset V_1'$, что $\bar{f_i} = \bar{e_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Так как матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{f_1, \ldots, f_n\}$ обратима (сравнима с единичной матрицей по модулю радикала J), то $\{f_1, \ldots, f_n\}$ — это R-базис в V. Ясно, что $\{f_1, \ldots, f_k\}$ является R-базисом в V_0', $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$ — R-базисом в V_1'. □

Из этого предложения, замечания выше и сравнимости матриц a и b по модулю радикала очевидно следует, что для b существует некоторый базис модуля V, в котором b имеет тот же вид, что и a в исходном базисе. Таким образом, a и b сопряжены.

3. Метод линеаризации для локальных колец

Опишем метод линеаризации для локальных колец. Этот метод позволяет доказывать, что некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в локальном кольце R имеет лишь нулевое решение в радикале кольца.

Теорема 2. *Пусть R — локальное кольцо, дана система полиномиальных уравнений вида $P_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где все полиномы $P_i \in R[x_1, \ldots, x_n]$ с коэффициентами в кольце R, кроме того, для всякого i $P_i(0, \ldots, 0) = 0$ (т. е. это полиномы без свободного члена). Пусть $\bar{P}_i$ — приведённые по модулю радикала $J = \mathrm{Rad}(R)$ линеаризации P_i, т. е. $\bar{P}_i$ содержит лишь мономы первой степени соответствующего полинома, приведённые по модулю радикала. Тогда если система $\bar{P}_i = 0$ имеет единственное нулевое решение $x_j = 0$, то исходная система в радикале J имеет единственное решение $x_j = 0$ $(x_j \in J)$.*

Доказательство. Система $P_i = 0$ может быть представлена в виде $A(x_1, \ldots, x_n)x = 0$, где A — матрица, зависящая от переменных x_j. Тогда если определитель матрицы A сравним по модулю радикала с обратимым элементом кольца R (который не зависит от переменных x_j, так как они лежат в радикале), то по формуле Крамера мы можем выразить $x = \big(A(x)\big)^{-1}0 = 0$ и получим, что $x = 0$ (так как в локальном кольце любой элемент, сравнимый с обратимым по модулю радикала обратим). Но определитель матрицы $A(x)$ сравним по модулю радикала с определителем матрицы линеаризованной системы, значит, достаточным условием единственности нулевого решения полиномиальной системы является обратимость матрицы линеаризованной системы, т. е. единственность нулевого решения для линеаризованной системы. □

Разберём один пример, иллюстрирующий применение описанного метода. Заметим, что способ получения матрицы $A(x)$ неоднозначен, но её линеаризация однозначна.

Пример. Пусть наше кольцо R локальное с необратимой двойкой. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x + 2y - xy = 0, \\ x - y + xy = 0. \end{cases}$$

Её приведённая линеаризация имеет вид

$$\begin{cases} x = 0, \\ x - y = 0 \end{cases}$$

и имеет определитель, равный -1, который обратим. Значит, по теореме исходная система тоже имеет единственное нулевое решение. С другой стороны, система имеет вид

$$\begin{cases} x + (2 - x)y = 0, \\ (1 + y)x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем, что $x = (1 + y)^{-1}y$, подставляем это выражение в первое уравнение и получаем после приведения подобных членов

$$[(1 + y)^{-1} + (2 - x)]y = 0.$$

Так как коэффициент при y обратим, получаем, что $y = 0$, значит, $x = 0$.

4. Образы элементов $w_{\alpha_i}(1)$, $x_{\alpha_i}(1)$

Рассмотрим матрицу $Q_2 = w_{\alpha_2}(1)x_{\alpha_2}(1)$ в нашем базисе (см. приложение) и заметим, что $Q_2^3 = E$ и что она (и не только она, а также все остальные $Q_i = w_{\alpha_i}(1)x_{\alpha_i}(1)$) имеет только целые коэффициенты, поэтому её образ при изоморфизме ей сопряжён.

Покажем, что образы коммутирующих между собой Q_2 и Q_4 можно одновременно привести к первоначальному виду. Если бы в нашем кольце был элемент ξ, такой что $\xi^3 = 1$, то для матриц Q_2 и Q_4 существовал бы базис, в котором они обе были бы диагональны. Добавим временно такой элемент. Поскольку образы Q_2 и Q_4 также коммутируют, то их можно привести к диагональному виду. При изоморфизме у матриц Q_2 и Q_4 не меняются собственные значения и их кратность, значит, диагональный вид останется таким же с точностью до перестановки элементов на диагонали. Следовательно, можно выполнить сопряжение (заменой базиса) и привести образы Q_2 и Q_4 к диагональному виду. Потом сопрягаем матрицей перестановки, чтобы на диагонали элементы стояли так же, как у Q_2 и Q_4 в диагональном виде. Далее обратным сопряжением получим из образов Q_2 и Q_4 сами Q_2 и Q_4. Теперь заменим исходный изоморфизм новым, сохраняющим Q_2 и Q_4.

Рассмотрим теперь матрицы $x_{\alpha_i}(1)$, $w_{\alpha_i}(1)$. Так как α_1, α_2 — простые корни, все эти матрицы выражаются через $w_{\alpha_1}(1)$, $w_{\alpha_2}(1)$, Q_2, Q_4. Поэтому если произвести сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}(R, J)$, которое сохранит Q_2, Q_4 и переведёт образы $w_{\alpha_1}(1)$, $w_{\alpha_2}(1)$ в исходные матрицы (т. е. в $w_{\alpha_1}(1)$, $w_{\alpha_2}(1)$), то композиция изоморфизма с этим сопряжением будет оставлять на месте все $x_{\alpha_i}(1)$, $w_{\alpha_i}(1)$, причём по-прежнему образ этого изоморфизма при естественном отображении $R \to R/J$ кольцевой.

Найдём необходимое сопряжение. Обозначим образы $w_{\alpha_1}(1)$, $w_{\alpha_2}(1)$ через $w_{\alpha_1}(1)+A$, $w_{\alpha_2}(1)+B$, где $A, B \in \mathrm{GL}(J)$. Есть набор (нелинейных) соотношений на A, B. Решая систему методом линеаризации, можно попытаться доказать, что $A = B = 0$. Вычисления показывают, что это не так, линеаризованная система может иметь ненулевое решение (её определитель лежит в радикале). Это означает, что нужно нетривиальное сопряжение. Положим

$$g_1 = \mathrm{diag}\{1 - A_{8,6},\ 1 - A_{8,6},\ 1,\ 1,\ 1 - A_{8,6},\ 1 - A_{8,6},\ 1,\ 1,\\ 1 - A_{8,6},\ 1 - A_{8,6},\ 1 - A_{8,6},\ 1 - A_{8,6},\ 1,\ 1\}.$$

Тогда g_1 централизует Q_2, Q_4, при этом после сопряжения матрицей g_1 элемент $(8,6)$ образа w_{α_1} будет совпадать с исходным. Поэтому после сопряжения можно считать, что $A_{8,6} = 0$.

Рассмотрим следующие соотношения:

$$[x_{\alpha_2}, w_{\alpha_3}] = E, \quad [x_{\alpha_2}, x_{\alpha_5}] = x_{\alpha_6}, \quad [w_{\alpha_1}, w_{\alpha_6}] = E, \quad [x_{\alpha_1}, x_{\alpha_5}] = E.$$

Компьютерное вычисление показывает, что линеаризованная система имеет лишь нулевое решение. Отсюда по теореме о линеаризации заключаем, что $A = B = 0$, значит, $w_{\alpha_1}(1)$, $w_{\alpha_2}(1)$ и все $x_{\alpha_i}(1)$, $w_{\alpha_i}(1)$ при изоморфизме переходят в себя.

5. Образы $x_\alpha(t)$. Исследование линейных соотношений

На этом этапе изоморфизм оставляет на месте все элементы $x_\alpha(1)$. Изучим образы $x_\alpha(t)$, а именно докажем, что эти матрицы переходят в $x_\alpha(t_1)$, где $t \to t_1$ — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [28]). Значит, в нашем случае они переходят в $x_\alpha(t_1)+T$, $T \in \mathrm{GL}(J)$. Нужно доказать, что во всех случаях $T = 0$. Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать t_1 и, соответственно, T. Правильный выбор описан ниже.

Замечание. На этом этапе мы ничего не говорим об отображении $t \to t_1$. Утверждается лишь, что существует такой элемент t_1, что матрицы отображаются указанным образом.

Рассмотрим следующие четыре матрицы:

$$x_{\alpha_1}(t), \quad x_{\alpha_1}(t^{-1}), \quad x_{\alpha_2}(t), \quad x_{\alpha_2}(t^{-1}).$$

Обозначим через A, B, C, D матрицы сдвига (т. е. эти матрицы прибавляются к исходным при изоморфизме, причём $A, B, C, D \in \mathrm{GL}(J)$). Выберем A, B, C, D так, чтобы $B_{9,3} = 0$. Это даст (как выяснится при компьютерном вычислении) правильный выбор представителя. Рассматриваются четыре матрицы, а не две, так как в рассматриваемых соотношениях будут участвовать они все. Через эти матрицы (и $x_\alpha(1)$, $w_\alpha(1)$) выражаются все остальные $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(t^{-1})$, поэтому достаточно доказать, что $A = B = C = D = 0$.

Изучим коммутаторы $[x_{\alpha_i}(t), x_{\alpha_j}(1)]$ и $[x_{\alpha_i}(t), w_{\alpha_j}(1)]$. Коммутаторы с главными корневыми элементами выражаются формулой (см [28])

$$[x_\alpha(t), x_\beta(u)] = \prod_{i,j\geqslant 1} x_{i\alpha+j\beta}(c_{i,j}t^i u^j).$$

Для системы корней G_2 многие коммутаторы тривиальны. А именно, корневые элементы коммутируют, если сумма корней не являются корнем. Кроме того, заметим, что $c_{1,1} = \pm 3$ для системы корней типа G_2 (легко проверить, что при нашем выборе матриц $c_{1,1} = 3$). Далее, сопряжение при помощи матрицы $w_\alpha(1)$ соответствует действию группы Вейля, поэтому корневой элемент коммутирует с отражением, если соответствующие корни ортогональны. Выпишем все эти наблюдения для длинного и короткого базисных корней (α_2 и α_1 соответственно) в виде системы соотношений.

Короткий корень:

$$
\begin{aligned}
&[x_{\alpha_1}(t), Q_6] = E,\\
&[x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_1}(1)] = E,\\
&[x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_6}(1)] = E,\\
&[x_{\alpha_1}(t), x_{\alpha_5}(1)] = E,\\
&[x_{\alpha_1}(t), w_{\alpha_6}(1)] = E.
\end{aligned}
$$

Длинный корень:

$$
\begin{aligned}
&[x_{\alpha_2}(t), x_{\alpha_2}(1)] = E,\\
&[x_{\alpha_2}(t), x_{\alpha_3}(1)] = E,\\
&[x_{\alpha_2}(t), x_{\alpha_6}(1)] = E,\\
&[x_{\alpha_2}(t), x_{\alpha_4}(1)] = E,\\
&[x_{\alpha_2}(t), w_{\alpha_4}(1)] = E.
\end{aligned}
$$

В первую систему добавлен коммутатор с $Q_6 = w_{\alpha_6}(1)x_{\alpha_6}(1)$, который следует из остальных коммутаторов, для удобства компьютерных вычислений. Заметим, что соотношение коммутирования можно записать линейным образом, поэтому для их решения не нужно прибегать к теореме о линеаризации. Решив с помощью компьютера эти две системы, получим общий вид матриц сдвига A, B, C, D (заметим, что эти соотношения дают в точности условия коммутирования матрицы сдвига с соответствующими матрицами).

6. Образы $x_\alpha(t)$. Исследование нелинейных соотношений

Имеем 4 неизвестных матрицы, всего 22 радикальных переменных. Докажем методом линеаризации, что они все равны нулю. Для этого рассмотрим соотношение

$$h_\alpha(v)x_\beta(u)h_\alpha(v)^{-1} = x_\beta(v^{\langle\beta,\alpha\rangle}u).$$

Подставляя в качестве α, β длинный и короткий корни в различных сочетаниях и подбирая $u, v = t, t^{-1}$ таким образом, чтобы в соотношении участвовали только t, t^{-1}, получим следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&h_{\alpha_1}(t)x_{\alpha_1}(t^{-1})h_{\alpha_1}(t)^{-1} = x_{\alpha_1}(t),\\
&h_{\alpha_2}(t)x_{\alpha_2}(t^{-1})h_{\alpha_2}(t)^{-1} = x_{\alpha_2}(t),\\
&h_{\alpha_1}(t^{-1})x_{\alpha_1}(t)h_{\alpha_1}(t^{-1})^{-1} = x_{\alpha_1}(t^{-1}),\\
&h_{\alpha_2}(t^{-1})x_{\alpha_2}(t)h_{\alpha_2}(t^{-1})^{-1} = x_{\alpha_2}(t^{-1}),\\
&h_{\alpha_2}(t)x_{\alpha_1}(t)h_{\alpha_2}(t)^{-1} = x_{\alpha_1}(1),\\
&h_{\alpha_2}(t^{-1})x_{\alpha_1}(t^{-1})h_{\alpha_2}(t^{-1})^{-1} = x_{\alpha_1}(1).
\end{aligned}
$$

Решая эту систему методом линеаризации, получаем, что все неизвестные равны нулю.

7. Доказательство теоремы 1

Ясно, что $\varphi_2\big(h_{\alpha_k}(t)\big) = h_{\alpha_k}(s)$, $k = 1,\dots,n$. Обозначим отображение $t \mapsto s$ через $\rho\colon R^x \to R^x$. Заметим, что для $t \in R^x$ выполнено

$$\varphi_2\big(x_1(t)\big) = \varphi_2\big(h_{\alpha_2}(t^{-1})x_1(1)h_{\alpha_2}(t)\big) = h_{\alpha_2}(s^{-1})x_1(1)h_{\alpha_2}(s) = x_1(s).$$

Если $t \notin R^x$, то $t \in J$, т. е. $t = 1 + t_1$, где $t_1 \in R^x$. Тогда

$$\varphi_2\big(x_1(t)\big) = \varphi_2\big(x_1(1)x_1(t_1)\big) = x_1(1)x_1\big(\rho(t_1)\big) = x_1\big(1+\rho(t_1)\big).$$

Таким образом, если мы продолжим отображение ρ на всё кольцо R (по формуле $\rho(t) := 1 + \rho(t-1)$, $t \in R$), то получим $\varphi_2\big(x_1(t)\big) = x_1\big(\rho(t)\big)$ для всех $t \in R$. Ясно, что ρ инъективно, аддитивно, а также мультипликативно на всех обратимых элементах. Так как каждый элемент кольца R есть сумма двух обратимых, получаем, что ρ является изоморфизмом из кольца R на некоторое его подкольцо R'. Заметим, что в данной ситуации $CE(\Phi,R)C^{-1} = E(\Phi,R')$ для некоторой матрицы $C \in \mathrm{GL}(V)$. Покажем, что $R' = R$.

Обозначим матричные единицы через E_{ij}.

Лемма 1. *Если для некоторого $C \in \mathrm{GL}(V)$ имеет место равенство $CE(\Phi,R)C^{-1} = E(\Phi,R')$, где R' — подкольцо в R, то $R' = R$.*

Доказательство. Покажем, что с помощью группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi,R)$ в нашем случае сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу $tE_{11,11}$, $t \in R$. Действительно,

$$\begin{aligned}&\big((x_{\alpha_2}(1)-1)(x_{\alpha_5}-1)\big)^2 = E_{11,12},\\ &w_{\alpha_6}\big((x_{\alpha_2}(1)-1)(x_{\alpha_5}-1)\big)^2 w_{\alpha_6}^{-1} = -E_{12,11}.\end{aligned}$$

Значит, порождается $E_{11,11}$, а в матрице $h_{\alpha_2}(t)$ в позиции $(11,11)$ стоит t, поэтому получаем

$$E_{11,11}h_{\alpha_2}(t)E_{11,11}^{-1} = tE_{11,11}.$$

Предположим теперь, что R' — собственное подкольцо в R. Так как $CE(\Phi,R)C^{-1} = E(\Phi,R')$, то подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$, порождённое всеми элементами группы $E(\Phi,R)$, должно переходить в подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R')$, порождённое всеми элементами группы $E(\Phi,R')$. Значит, все коэффициенты матриц $G_t = C(tE_{11,11})C^{-1}$ должны лежать в подкольце R'.

Тогда $(CtE_{11,11}C^{-1})_{i,j} \in R'$, т. е. $C_{i,11}tE_{11,11}{C^{-1}}_{11,j} \in R'$, однако в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, целиком состоящего из необратимых элементов. Поэтому есть такие i, j, что $C_{i,11}$ и ${C^{-1}}_{11,j}$ обратимы, значит, $C_{i,11}{C^{-1}}_{11,j}R \subseteq R'$ и, поскольку элемент слева обратим, левая часть просто совпадает с R. Таким образом, $R' = R$. $\square$

Мы доказали, что ρ — это автоморфизм кольца R. Следовательно, композиция исходного автоморфизма φ и некоторой замены базиса с помощью матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ (переводящей $E(\Phi, R)$ в себя) — это кольцевой автоморфизм ρ. Это доказывает теорему 1.

8. Приложение. Построение представления

Мы взяли корни α_1 и α_2 в качестве базисных, значит, для построения всей группы нужно знать, как X_{α_1} и X_{α_2} действуют на базисе, т. е. вычислить все коммутаторы $[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_n}]$, $[X_{\alpha_2}, X_{\alpha_n}]$, $[X_{\alpha_1}, h_1]$, $[X_{\alpha_1}, h_2]$, $[X_{\alpha_2}, h_1]$, $[X_{\alpha_2}, h_2]$.

Всё считается по формулам, выписанным в начале статьи. Здесь приведём только результат.

$$
\begin{array}{ll}
[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_1}] = 0, & [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}] = \pm X_{\alpha_3}, \\
[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_3}] = \pm 2X_{\alpha_4}, & [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_4}] = \pm 3X_{\alpha_5}, \\
[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_5}] = 0, & [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_6}] = 0, \\
[X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_1}] = h_1, & [X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_2}] = 0, \\
[X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_3}] = \pm 3X_{-\alpha_2}, & [X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_4}] = \pm 2X_{-\alpha_3}, \\
[X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_5}] = \pm X_{-\alpha_4}, & [X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_6}] = 0, \\
[X_{\alpha_1}, h_1] = -2X_{\alpha_1}, & [X_{\alpha_1}, h_2] = X_{\alpha_1}, \\
[X_{-\alpha_1}, X_{\alpha_1}] = -h1, & [X_{-\alpha_1}, X_{\alpha_2}] = 0, \\
[X_{-\alpha_1}, X_{\alpha_3}] = \pm 3X_{\alpha_2}, & [X_{-\alpha_1}, X_{\alpha_4}] = \pm 2X_{\alpha_3}, \\
[X_{-\alpha_1}, X_{\alpha_5}] = \pm X_{\alpha_4}, & [X_{-\alpha_1}, X_{\alpha_6}] = 0, \\
[X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_1}] = 0, & [X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_2}] = \pm X_{-\alpha_3}, \\
[X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_3}] = \pm 2X_{-\alpha_4}, & [X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_4}] = \pm 3X_{-\alpha_5}, \\
[X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_5}] = 0, & [X_{-\alpha_1}, X_{-\alpha_6}] = 0, \\
[X_{-\alpha_1}, h_1] = 2X_{-\alpha_1}, & [X_{-\alpha_1}, h_2] = -X_{-\alpha_1}, \\
[X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1}] = \mp X_{\alpha_3}, & [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_2}] = 0, \\
[X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}] = 0, & [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_4}] = 0, \\
[X_{\alpha_2}, X_{\alpha_5}] = \pm X_{\alpha_6}, & [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_6}] = 0, \\
[X_{\alpha_2}, X_{-\alpha_1}] = 0, & [X_{\alpha_2}, X_{-\alpha_2}] = h_2, \\
[X_{\alpha_2}, X_{-\alpha_3}] = \pm X_{-\alpha_1}, & [X_{\alpha_2}, X_{-\alpha_4}] = 0, \\
[X_{\alpha_2}, X_{-\alpha_5}] = 0, & [X_{\alpha_2}, X_{-\alpha_6}] = \pm X_{-\alpha_5}, \\
[X_{\alpha_2}, h_1] = 3X_{\alpha_2}, & [X_{\alpha_2}, h_2] = -X_{\alpha_2}, \\
[X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_1}] = 0, & [X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_2}] = -h2, \\
[X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_3}] = \pm X_{\alpha_1}, & [X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_4}] = 0, \\
[X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_5}] = 0, & [X_{-\alpha_2}, X_{\alpha_6}] = \pm X_{\alpha_5}, \\
[X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_1}] = \pm X_{-\alpha_3}, & [X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_2}] = 0,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&[X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_3}] = 0, && [X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_4}] = 0,\\
&[X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_5}] = \pm X_{-\alpha_6}, && [X_{-\alpha_2}, X_{-\alpha_6}] = 0,\\
&[X_{-\alpha_2}, h_1] = -3X_{-\alpha_2}, && [X_{-\alpha_2}, h_2] = X_{-\alpha_2}.
\end{aligned}
$$

Некоторые знаки не определены, мы будем их подбирать так, чтобы выполнялись все соотношения в группе, в частности, $w_{\alpha_i}^4 = E$ и $h_i(-1)$ — диагональная матрица с ± 1 на диагонали.

В пространстве представления возьмём базис

$$
\begin{aligned}
&v_1 = X_{\alpha_1}, && v_2 = X_{-\alpha_1}, && v_3 = X_{\alpha_2},\\
&v_4 = X_{-\alpha_2}, && v_5 = X_{\alpha_3}, && v_6 = X_{-\alpha_3},\\
&v_7 = X_{\alpha_4}, && v_8 = X_{-\alpha_4}, && v_9 = X_{\alpha_5},\\
&v_{10} = X_{-\alpha_5}, && v_{11} = X_{\alpha_6}, && v_{12} = X_{-\alpha_6},\\
&v_{13} = h_1, && v_{14} = h_2.
\end{aligned}
$$

Образы X_{α_1} и X_{α_2} обозначим через X_1 и X_2. Тогда

$$
X_1 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix},
$$

$$X_2 = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&-2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}.$$

Теперь построим $X_{\alpha_1}(t)$ и $X_{\alpha_2}(t)$ по определению:

$$\exp(tx_\alpha) = x_\alpha(t) = 1 + tx_\alpha + t^2(x_\alpha)^2/2 + \ldots + t^k(x_\alpha)^k/k! + \ldots .$$

$$x_{\alpha_1}(t) = \begin{bmatrix}
1&-t^2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-2t&t\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&-3t&0&3t^2&0&-t^3&0&0&0&0\\
0&0&-t&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&-2t&0&t^2&0&0&0&0\\
0&0&t^2&0&-2t&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&-t&0&0&0&0\\
0&0&-t^3&0&3t^2&0&-3t&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&t&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix},$$

$$x_{\alpha_2}(t)=\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&t&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&-t^2&0&0&0&0&0&0&0&0&3t&-2t\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
t&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&-t&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-t&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&t&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}.$$

Далее выпишем ещё w_{α_1}, w_{α_2}, Q_2 и Q_4:

$$w_{\alpha_1}=\begin{bmatrix}
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix},$$

$$w_{\alpha_2} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1
\end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1
\end{bmatrix},$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1
\end{bmatrix}.$$

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы присоединённых групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3—27.

[2] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа B_l над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 3—46. — `arXiv:0911.4243`.

[3] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 47—80.

[4] Бунина Е. И. Автоморфизмы и нормализаторы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35—59. — `arXiv:0907.5595`.

[5] Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 1. — С. 443—470. — `arXiv:math/0702046`.

[6] Петечук В. М. Автоморфизмы групп SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами // Мат. заметки. — 1980. — Т. 28, № 2. — С. 187—206.

[7] Петечук В. М. Автоморфизмы групп $\mathrm{SL}_3(K)$, $\mathrm{GL}_3(K)$ // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 5. — С. 657—668.

[8] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Мат. сб. — 1983. — Т. 45. — С. 527—542.

[9] Шевалле К. О некоторых простых группах // Математика: Период. сб. перев. иностр. статей. — 1958. — Т. 2, № 1. — С. 3—58.

[10] Abe E. Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474—494.

[11] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Anal. — 1993. — Vol. 5, no. 2. — P. 74—90.

[12] Borel A., Tits J. Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples // Ann. Math. — 1973. — Vol. 73. — P. 499—571.

[13] Bourbaki N. Groupes et algébres de Lie. — Hermann, 1968.

[14] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with 1/2 // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323. — P. 2270—2289. — arXiv:0907.5592.

[15] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. — 2012. — Vol. 355, no. 1. — P. 154—170.

[16] Carter R. W. Simple Groups of Lie Type. — London: Wiley, 1989.

[17] Carter R. W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac—Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. — 1993. — Vol. 155. — P. 44—94.

[18] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 92. — P. 231—237.

[19] Chen Yu. Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras // Tôhoku Math. J. — 1995. — Vol. 348. — P. 81—97.

[20] Chen Yu. On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123, no. 8. — P. 2357—2361.

[21] Chen Yu. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 1—19.

[22] Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 226. — P. 719—741.

[23] Humphreys J. E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. — New York: Springer, 1978.

[24] Humphreys J. F. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 908—911.

[25] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras. — 2007. — arXiv:math/0708.2256v3.

[26] McDonald B. R. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 215. — P. 145—159.

[27] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 121. — P. 606—615.

[28] Steinberg R. Lectures on Chevalley Groups. — Yale Univ., 1967.

[29] Vavilov N. A., Plotkin E. B. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations // Acta Appl. Math. — 1996. — Vol. 45. — P. 73—115.