Ортогональное градуированное пополнение градуированно полупервичных колец

А. Л. КАНУННИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

УДК 512.54

Ключевые слова: градуированные кольца частных, ортогональная полнота.

Аннотация

Для градуированного по группе ассоциативного gr-полупервичного кольца R с единицей построено и исследовано ортогональное градуированное пополнение $O^{\mathrm{gr}}(R)$. Доказан критерий ортогональной полноты полного правого градуированного кольца частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$, которое, в отличие от неградуированного случая, может оказаться не ортогонально полным.

Abstract

A. L. Kanunnikov, Orthogonal graded completion of graded semiprime rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 117—150.

For an associative gr-semiprime ring R with identity graded by a group, the orthogonal graded completion $O^{\mathrm{gr}}(R)$ is constructed. A criterion for the orthogonal completeness of the maximal right graded quotient ring $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ is proved. The ring $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ need not be orthogonally complete, as opposed to the ungraded case.

Введение

Теория ортогональной полноты, разработанная К. И. Бейдаром и А. В. Михалёвым, является мощным средством исследования в теории колец (см. [4—7, 11, 13, 14] и др.). Её основная идея состоит в рассмотрении полупервичных колец как булевых произведений первичных, что позволяет «поднимать» теоремы с определённой логической структурой о первичных кольцах до теорем об ортогонально полных полупервичных кольцах. Основные объекты теории строятся последовательно по заданному полупервичному кольцу R: рассматривается полное правое кольцо частных $Q(R)$ кольца R, его центр C, который называется расширенным центроидом кольца R, и булево кольцо идемпотентов B кольца C. С помощью кольца B вводится понятие ортогональной полноты и строится ортогональное пополнение $O(R)$ кольца R, являющееся полупервичным вместе с R. На кольцо $O(R)$ удаётся перенести теоремы, справедливые в классе первичных колец, если их условия и заключения имеют определённую логическую

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 7, с. 117—150.
© 2011/2012 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

структуру. Необходимые сведения о булевых кольцах и ортогональной полноте приведены в разделе 1.

В последнее время активно развивается теория градуированных колец (см. [2,3,15] и указанную там литературу). Понятия классической теории колец имеют градуированные аналоги, обозначаемые приставкой «gr-». Например, gr-полупервичное кольцо — это градуированное кольцо без ненулевых нильпотентных градуированных идеалов.

Цель данной статьи — построить и исследовать основные объекты теории ортогональной полноты для градуированных по группе колец. Для данного gr-полупервичного кольца R вместо колец $Q(R)$ и $C(R)$ рассматриваются их градуированные аналоги: полное правое градуированное кольцо частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и градуированный расширенный центроид $C^{\mathrm{gr}}(R)$ кольца R (раздел 2). Среди идемпотентов кольца $C^{\mathrm{gr}}(R)$ используются только однородные для согласования построений с градуировкой. Однородные идемпотенты, очевидно, имеют степень e (нейтральный элемент градуирующей группы G), и образуемое ими булево кольцо далее обозначается через B_e. В разделе 3 дано описание кольца B_e и установлена его ортогональная полнота (теорема 5, предложение 3).

На следующем этапе в неградуированном случае устанавливается ортогональная полнота кольца $Q(R)$ [5]. В градуированном случае это оказывается верным не всегда (пример 3). В разделе 4 доказан основной результат работы — критерий ортогональной полноты кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ (теорема 7). Отметим, что в случае точной градуировки кольца R (определение 3) критерий приобретает следующую форму: или кольцо B_e конечно, или группа G конечна (теорема 8). Чтобы каждое (а не только удовлетворяющее условиям критерия) gr-полупервичное кольцо имело ортогональное градуированное пополнение, вводится понятие ортогональной gr-полноты — ортогональной полноты однородных компонент. Таким образом, ортогональная полнота для градуированных колец разветвляется в двух направлениях: по компонентам и в целом. Заметим, что кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ ортогонально gr-полно всегда.

В разделах 5 и 6 построено ортогональное градуированное пополнение $O^{\mathrm{gr}}(R)$, аналогично неградуированному случаю [5] описано его строение (предложение 7) и исследованы свойства его локализаций (предложения 13, теорема 13). При этом свойства, не требующие ортогональной полноты кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$, выделены отдельно.

В разделе 7 градуированные кольца рассматриваются как алгебраические системы, в сигнатуру которых входят операции взятия однородных компонент и предикаты однородности. В лемме 7 установлена B_e-допустимость указанных операций и предикатов, что позволяет рассматривать ортогонально полное gr-полупервичное кольцо как ортогонально полную над B_e алгебраическую систему соответствующей сигнатуры (теорема 14) и применять логические методы теории ортогональной полноты [6] (примеры 6, 7, предложение 15).

Все кольца в работе ассоциативные с ненулевой единицей, все модули правые унитальные. Если M — правый R-модуль, N и K — подмножества в M, то обозначаем $(N : K)_R := \{r \in R \mid Kr \subseteq N\}$. В частности, при $N = 0$ получаем аннулятор $\operatorname{Ann} K = (0 : K)$ подмножества K. Если R — кольцо, K — подмножество в R, то определяются правый аннулятор $\mathrm{r}_R(K) = \{r \in R \mid Kr = 0\}$ и левый аннулятор $\mathrm{l}_R(K) = \{r \in R \mid rK = 0\}$ множества K.

Всюду G — группа с нейтральным элементом e. Фраза «R — градуированное кольцо» означает, что R — ассоциативное кольцо с единицей, градуированное по группе G. Все необходимые сведения из теории градуированных колец можно найти в [3, 15].

1. Булевы кольца и ортогональная полнота

В этом разделе собраны необходимые факты о булевых кольцах и ортогональной полноте (см. также [6, 13]).

Определение 1. Пусть B — булево кольцо.

1. Подмножество $T \subseteq B$ называется *ортогональным*, если $uv = 0$ для всех различных $u, v \in T$.
2. Подмножество $T \subseteq B$ называется *плотным*, если $\operatorname{Ann}_B(T) = 0$.
3. Булево кольцо B называется *ортогонально полным*, если для любого плотного ортогонального подмножества $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любого подмножества $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в B существует такой элемент $t \in B$, что $tu_\gamma = t_\gamma u_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$.

Из плотности системы $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ следует, что элемент t определяется однозначно; он обозначается через $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} t_\gamma u_\gamma$.

Лемма 1 [6, лемма 1.17]. *Пусть B — ортогональное полное булево кольцо, $B^* = B \setminus \{0\}$, $\varnothing \neq T \subseteq B^*$. Предположим, что для всех $v \in T$ и всех $0 \neq u \leqslant v$ верно, что $u \in T$. Пусть L — максимальное ортогональное подмножество в T. Тогда $\sum\limits_{u\in L}^{\perp} u = \sup T$.*

Лемма 2. *Во всяком бесконечном булевом кольце найдётся бесконечная ортогональная система элементов.*

Доказательство. Пусть B — бесконечное булево кольцо. Найдём элемент $u_1 \in B$, $u_1 \neq 0, 1$. Хотя бы одно из булевых колец u_1B, $(1 - u_1)B$ бесконечно. Если u_1B бесконечно, то положим $v_1 := u_1$, иначе положим $v_1 := 1 - u_1$. Тогда $1 - v_1 \neq 0, 1$ и в бесконечном булевом кольце v_1B найдётся элемент $u_2 \neq 0, v_1$. Ясно, что $u_2 = u_2v_1$ и хотя бы одно из булевых колец $u_2v_1B = u_2B$, $(1-u_2)v_1B = (v_1-u_2)B$ бесконечно. Если u_2B бесконечно, то положим $v_2 := u_2$, иначе положим $v_2 := v_1 - u_2$. Продолжая этот процесс, получим бесконечную ортогональную систему элементов в B:

$$1 - v_1,\ v_1(1 - v_2),\ v_1v_2(1 - v_3),\ v_1v_2v_3(1 - v_4), \ldots . \qquad \square$$

Теорема 1 [3, следствие 8.5; 13, теорема 2.3.9, с. 98]. *Пусть C — коммутативное регулярное самоинъективное кольцо, B — булево кольцо его идемпотентов со сложением*

$$u \oplus v = u + v - 2uv \tag{1}$$

и порядком

$$u \leqslant v \iff uv = u. \tag{2}$$

Тогда

1) $Q(C) = C$;
2) *идеал* $\mathrm{Ann}_C(T)$ *главный для любого подмножества* $T \subseteq C$, *причём порождающий этого идеала можно выбрать в* B;
3) B — *ортогонально полное булево кольцо.*

Определение 2. Сохраним предположения теоремы 1. Подмножество X несингулярного C-модуля M называется *ортогонально полным относительно булева кольца* B, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий [5, с. 36; 13, с. 100]:

1) для любой плотной ортогональной системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любой системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в X существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий равенствам $x_\gamma u_\gamma = x u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$;
2) для любой ортогональной системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любой системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в X существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий равенствам $x_\gamma u_\gamma = x u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и $vx = 0$, где элемент $v \in B$ однозначно определён условием $\mathrm{Ann}_C\Big(\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma C\Big) = vC$ (второе утверждение теоремы 1).

Замечание 1. Из несингулярности C-модуля M следует, что элемент x в определении 2 определён однозначно [13, с. 100]. Он обозначается через $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma$.

Теорема 2 [5, лемма 1; 13, теорема 2.3.9]. *Пусть A — полупервичное кольцо, $Q = Q(A)$ — его полное правое кольцо частных* [10, § 4.3], *C — центр кольца Q. Тогда верны следующие утверждения*:

1) C — *регулярное самоинъективное кольцо*;
2) Q — *несингулярный ортогонально полный C-модуль.*

2. Полное градуированное кольцо частных

Всюду далее $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ — полное правое градуированное кольцо частных градуированного кольца R (см., например, [3, раздел 6]):

$$Q^{\mathrm{gr}} = \Big(\bigcup_{D\in\mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}} \mathrm{HOM}_R(D, R)\Big) \,/\, \theta,$$

где $\mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}$ — совокупность плотных правых градуированных идеалов в R, θ — отношение эквивалентности на множестве $\bigcup\limits_{D\in\mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}} \mathrm{HOM}_R(D,R)$, которое вводится следующим образом.

Пусть $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}$, $D = D_1 \cap D_2$, $f_1\colon D_1 \to R$, $f_2\colon D_2 \to R$ — градуированные гомоморфизмы R-модулей. Тогда

$$f_1\ \theta\ f_2 \iff f_1|_D = f_2|_D.$$

Операции в $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ корректно определяются равенствами

$$[f_1]_\theta * [f_2]_\theta = [f_1 * f_2]_\theta, \quad * \in \{+,\cdot\},$$

при этом $f_1 + f_2 \in \mathrm{HOM}_R(D_1 \cap D_2, R)$, $f_1 f_2 \in \mathrm{HOM}_R(f_2^{-1}D_1, R)$, а градуировка наследуется с кольца R:

$$Q_g^{\mathrm{gr}} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}} (\mathrm{HOM}_R(D,R)_g)/\theta.$$

В следующем предложении собраны основные свойства кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем без ссылок.

Предложение 1 [3, предложение 39]. *Пусть R — градуированное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Верны следующие утверждения.*

1. *Q^{gr} — градуированное правое кольцо частных кольца R.*
2. *Для всякого градуированного правого кольца частных S кольца R тождественное отображение кольца R может быть продолжено, и притом однозначно, до гомоморфизма R-модулей S_R в Q^{gr}_R, являющегося мономорфизмом градуированных колец.*
3. *Для каждого gr-плотного правого идеала D кольца R и каждого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ правый градуированный идеал $q^{-1}D := (D : q)_R = \{r \in R \mid qr \in D\}$ является gr-плотным.*
4. *$Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}$.*

Определение 3. Градуировка на кольце R по группе G называется

— g-точной справа (слева), где $g \in G$, если для всех $r \in h(R) \setminus 0$ найдётся такой элемент $r' \in h(R)$, что $rr' \in R_g \setminus 0$ ($r'r \in R_g \setminus 0$);

— точной справа (слева), если она g-точна справа (слева) для всех $g \in G$;

— точной, если она точна слева и справа (g-точной, если она g-точна слева и справа, $g \in G$).

Теорема 3. *Пусть R — точное градуированное кольцо. Тогда кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$ и $Q(R_e)$ изоморфны ($Q(R_e)$ — полное правое кольцо частных кольца R_e).*

Доказательство. 1. Если I — gr-плотный правый идеал в R, то I_e — плотный правый идеал в R_e. Действительно, пусть $r_1, r_2 \in R_e$, $r_1 \neq 0$. Так как правый идеал I gr-плотный, то найдётся такое $r \in h(R)$, что $r_1 r \neq 0$, $r_2 r \in I$. Так как кольцо R точное, найдётся такое $r' \in h(R)$, что $0 \neq r_1 r r' \in R_e$, при этом $rr' \in R_e$. Поскольку к тому же $r_2 r r' \in IR = I$, то правый идеал I_e в R_e плотный.

2. Если K — плотный правый идеал в R_e, то KR — gr-плотный правый идеал в R. Действительно, пусть $r_1 \in h(R) \setminus 0$ и $r_2 \in R_g$ $(g \in G)$. Так как R точное слева, то $tr_1 \in R_g \setminus 0$ для некоторого $t \in h(R)$. Так как R e-точное справа, то $tr_1 r' \in R_e \setminus 0$ для некоторого $r' \in h(R)$. Ясно, что тогда $r_2 r' \in R_e$. Так как правый идеал K является плотным в R_e, то $tr_1 r' r \in R_e \setminus 0$ и $r_2 r' r \in K$ для некоторого $r \in R_e$. В частности, $r_1 r' r \in h(R) \setminus 0$, и мы нашли для элементов r_1 и r_2 элемент $r'r$, для которого $r_1(r'r) \neq 0$ и $r_2(r'r) \in KR$. Значит, KR — gr-плотный правый идеал в R_e.

3. Сохраним обозначение θ для отношения эквивалентности, введённого выше при определении кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$, и обозначим через θ_e аналогичное отношение для кольца $Q(R_e)$.

Если $f_i \in \mathrm{HOM}_R(I_i, R)_e$, $i = 1, 2$, и $f_1 \theta f_2$, то $f_1|_{I_e}\ \theta_e\ f_2|_{I_e}$. Поэтому каждому элементу $q \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$ можно поставить в соответствие такой элемент $\bar{q} \in Q(R_e)$, что $\bar{q} = [f|_{I_e}]_{\theta_e}$, где $q = [f]_\theta$, $f\colon I \to R$, I — gr-плотный правый идеал в R.

Обратно, пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{R_e}(K, R_e)$, где K — плотный правый идеал в R_e. Определим $\tilde{\varphi} \in \mathrm{HOM}_R(KR, R)_e$ по правилу

$$\tilde{\varphi}\biggl(\sum_m k_m r_m\biggr) = \sum_m \varphi(k_m) r_m, \quad \text{где} \quad k_m \in K, \quad r_m \in R.$$

Докажем корректность этого отображения. Пусть

$$\sum_m k_m r_m = 0.$$

Тогда все r_m можно считать однородными одной степени и

$$\sum_m \varphi(k_m) r_m \in h(R).$$

Если

$$\sum_m \varphi(k_m) r_m \neq 0,$$

то, поскольку кольцо R e-точное справа, найдётся такое $r' \in h(R)$, что

$$\biggl(\sum_m \varphi(k_m) r_m\biggr) r' \in R_e \setminus 0.$$

Но тогда $r_m r' \in R_e$ (поскольку $\varphi(k_m) \in R_e$), так что

$$\biggl(\sum_m \varphi(k_m) r_m\biggr) r' = \varphi\biggl(\sum_m (k_m r_m) r'\biggr) = \varphi(0r') = 0 \,—$$

противоречие.

4. Если $\varphi_i \in \mathrm{HOM}_{R_e}(K_i, R_e)$, $i = 1, 2$, и $\varphi_1\ \theta_e\ \varphi_2$, то $\tilde{\varphi}_1\ \theta\ \tilde{\varphi}_2$. Поэтому каждому элементу $t \in Q(R_e)$ можно поставить в соответствие такой элемент $\tilde{t} \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, что $\tilde{t} = [\tilde{\varphi}]_\theta$, где $t = [\varphi]_{\theta_e}$, $\varphi\colon K \to R_e$, K — плотный правый идеал в R_e. Ясно, что $\bar{\tilde{t}} = t$ для каждого $t \in Q(R_e)$ и $\tilde{\bar{q}} = q$ для каждого $q \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, а также что $\bar{\ }$ и $\tilde{\ }$ — гомоморфизмы градуированных колец, тождественные на R_e. $\square$

Пример 1. Пусть A — кольцо, G — группа, AG — групповое кольцо с канонической G-градуировкой $(AG)_g = Ag$. Тогда

$$Q^{\mathrm{gr}}(AG) \cong Q(A)G,$$

где $Q(A)$ — полное правое кольцо частных кольца A. Действительно, между правыми идеалами кольца A и градуированными правыми идеалами кольца AG имеется естественная биекция $K \mapsto KG$, при которой плотным правым идеалам в A соответствуют gr-плотные правые идеалы в AG. Каждому элементу $qg \in Q(A)G$, где $q = [f]_{\theta_e} \in Q(A)$, $f\colon \mathcal{D}(A) \ni D \to A$, $g \in G$, ставится в соответствие элемент $q'_g = [f']_\theta \in Q^{\mathrm{gr}}_g$, где $f' \in \mathrm{HOM}(DG, AG)_g$, $f'\Bigl(\sum\limits_i d_i h_i\Bigr) = \sum d_i g h_i$, $d_i \in D$, $h_i \in G$ (это соответствие оказывается взаимно-однозначным). Поскольку каноническая градуировка группового кольца является точной, то так же, как и в теореме 3, получаем, что данная биекция является изоморфизмом колец.

Теорема 4 [3, теорема 14]. *Пусть R — gr-несингулярное e-точное справа кольцо. Тогда кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$ и $Q(R_e)$ изоморфны.*

Условие точности в теоремах 3 и 4 существенно, как показывает следующий пример коммутативного полупервичного (а значит, и несингулярного) кольца.

Пример 2 [3, пример 14; 9, пример 3.4; 15, пример 8.4.7]. Пусть k — поле, кольцо $R = k[X,Y]/(XY)$ градуировано группой $\mathbb{Z}$ (обозначаем $x = X + (XY)$ и $y = Y + (XY)$):

$$R_n = \begin{cases} kx^n, & n > 0,\\ k, & n = 0,\\ ky^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Тогда $Q^{\mathrm{gr}}_0(R) \cong k \oplus k \ncong k \cong R_0 \cong Q(R_0)$.

Одним из основных объектов теории ортогональной полноты является центр полного правого кольца частных данного полупервичного кольца A, который называется расширенным центроидом кольца A. Его градуированный аналог — максимальное градуированное подкольцо центра полного правого градуированного кольца частных gr-полупервичного кольца R — градуированный расширенный центроид $C^{\mathrm{gr}}(R)$ кольца R (см. [3]). Нас часто будут интересовать свойства не только самого кольца C^{gr}, но и его единичной компоненты $C_e := C^{\mathrm{gr}}_e(R)$. Приведём основные свойства колец C^{gr} и C_e.

Предложение 2. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда*

1) *$h(C^{\mathrm{gr}}) = \{q \in h(Q^{\mathrm{gr}}) \mid qr = rq$ для всех $r \in R\}$, в частности $C_e = \{q \in Q^{\mathrm{gr}}_e \mid qr = rq$ для всех $r \in R\}$;*
2) *кольцо C^{gr} gr-регулярно и gr-самоинъективно;*
3) *кольцо C_e регулярно и самоинъективно;*
4) *кольцо R gr-первично тогда и только тогда, когда кольцо C^{gr} — градуированное поле, что эквивалентно тому, что кольцо C_e — поле.*

Доказательство. Пункты 1), 2) и 4) доказаны в [3, теоремы 15 и 16, предложение 59]. Докажем пункт 3). Из gr-регулярности кольца C^{gr} следует, что оно e-точно, а также что кольцо C_e регулярно. Пусть теперь I — идеал в C_e, $f\colon I \to C_e$ — гомоморфизм C_e-модулей. Тогда IC^{gr} — градуированный идеал в C^{gr} и правило

$$\tilde{f}\colon \begin{cases} IC^{\mathrm{gr}} \to C^{\mathrm{gr}}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} i_k c_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} f(i_k)c_k, \quad i_k \in I, \quad c_k \in C^{\mathrm{gr}}, \quad k = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

корректно задаёт однородный степени e гомоморфизм градуированных C^{gr}-модулей (это следует из e-точности кольца C^{gr} и доказывается так же, как в теореме 3). Так как кольцо C^{gr} gr-самоинъективно, то существует такой элемент $a \in IC^{\mathrm{gr}}$, что $\tilde{f}(x) = ax$ для всех $x \in IC^{\mathrm{gr}}$. Так как $\deg \tilde{f} = e$, то $a \in (IC^{\mathrm{gr}})_e = IC_e = I$. Поскольку $\tilde{f}$ продолжает f, то $f(x) = ax$ для всех $x \in I$. Значит, кольцо C_e самоинъективно. □

Следствие 1. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда $Q^{\mathrm{gr}}(C^{\mathrm{gr}}) = C^{\mathrm{gr}}$ и $Q(C_e) = C_e$.*

3. Булево кольцо однородных идемпотентов градуированного расширенного центроида

В этом разделе R — gr-полупервичное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ — его полное правое градуированное кольцо частных, $C^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}(R)$ — градуированный расширенный центроид кольца R, $C_e = C_e^{\mathrm{gr}}$, $B_e = B_e(R) = \{x \in h(C^{\mathrm{gr}}) \mid x = x^2\}$ — булево кольцо однородных идемпотентов кольца C^{gr} со сложением (1) и порядком (2). Ясно, что $B_e \subseteq C_e$, так как однородные идемпотенты имеют степень e. Отметим, что при сложении (1) это свойство сохраняется.

Соберём в таблице основные объекты теории ортогональной полноты и их градуированные аналоги.

Неградуированный случай	Градуированный случай
A — полупервичное кольцо	R — gr-полупервичное кольцо
$Q(A)$ — полное правое кольцо частных кольца A	$Q^{\mathrm{gr}}(R)$ — полное правое градуированное кольцо частных кольца R
$C(A)$ — центр кольца $Q(A)$ (расширенный центроид кольца A)	1) $C^{\mathrm{gr}}(R)$ — максимальное градуированное подкольцо центра кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ (градуированный расширенный центроид кольца R); 2) $C_e^{\mathrm{gr}}(R)$ — единичная компонента кольца $C^{\mathrm{gr}}(R)$
$B(A) = \{u \in C(A) \mid u^2 = u\}$	$B_e(R) = \{u \in C_e(R) \mid u^2 = u\}$

Пусть T — градуированное подмножество в R. Тогда идеал $I = \langle T \rangle := RTR$, порождённый множеством T, является градуированным. Обозначим через I^* его аннулятор. Тогда по [3, лемма 3] $I \cap I^* = 0$ и $I \oplus I^*$ — gr-плотный правый идеал в R. Поэтому отображение

$$E[T]\colon \begin{cases} I \oplus I^* \to R, \\ a + b \mapsto a, \quad a \in I, \quad b \in I^*, \end{cases}$$

корректно задаёт однородный степени e гомоморфизм градуированных R-модулей и тем самым определяет некоторый элемент кольца Q_e^{gr}, который мы также обозначаем $E[T]$. Для $a \in h(R)$ вместо $E[\{a\}]$ пишем $E[a]$.

Градуированный идеал I вида J^*, где J — некоторый градуированный идеал в R, назовём аннуляторным градуированным идеалом. Ясно, что всегда $I \subseteq I^{**}$, $E[I] = E[I^{**}]$, $I^* = I^{***}$ и аннуляторные градуированные идеалы — в точности те, для которых $I^{**} = I$.

Для градуированного подмножества $T \subseteq R$ аннуляторный градуированный идеал, порождённый T, будем называть *замыканием* множества T и обозначать через $\bar{T}$.

Лемма 3. *Для любого gr-полупервичного кольца R верны следующие утверждения.*

1. *$E[T] \in B_e$ для любого градуированного подмножества T в R.*
2. *$E[T_1] \leqslant E[T_2]$ тогда и только тогда, когда $\bar{T}_1 \subseteq \bar{T}_2$ для любых градуированных подмножеств T_1 и T_2 в R, следовательно, $E[T_1] = E[T_2]$ тогда и только тогда, когда $\bar{T}_1 = \bar{T}_2$.*
3. *$1 - E[T] = E[(RTR)^*]$ для любого градуированного подмножества T в R.*

Доказательство. 1. Пусть $u := E[T]$. Так как $u^2 = u$, то достаточно показать, что $u \in C_e$, а для этого — что $uq = qu$ для всех $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$. Поскольку $I^{**} \cap I^* = 0$, то $u = E[I^{**}]$ и можно считать, что $T = I = I^{**}$. Пусть $[f]_\theta = q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, $f \in h\bigl(\mathrm{HOM}_R(D, R)\bigr)$, где D — gr-плотный правый идеал в R. Тогда

$$K := D \cap f^{-1}(I \oplus I^*) \cap (I \oplus I^*) \cap u^{-1}(D) -$$

gr-плотный правый идеал в R. Пусть $x \in I$, $y \in I^*$, $x + y \in K$. Тогда $D \ni u(x + y) = x$, поэтому $x, y \in D$. Так как $y \in I^*$, то $f(y)i = f(yi) = f(0) = 0$ для всех $i \in I$, так что $f(y) \in I^*$, аналогично $f(x) \in I$. Значит,

$$(qu - uq)(x + y) = f(x) - uf(x) - uf(y) = 0$$

и $u \in C_e$.

2. Если $I = RTR$, то $E[T] = E[I]$. Кроме того, $(I^{**})^* = I^*$, $I \oplus I^* \subseteq I^{**} \oplus I^*$ и гомоморфизмы $E[I]$ и $E[I^{**}]$ совпадают на плотном правом градуированном идеале $I \oplus I^*$. Пусть теперь I и J — аннуляторные градуированные идеалы в R. Если $I \subseteq J$, то $E[J]E[I] = E[I]$, т. е. $E[I] \leqslant E[J]$. Обратно, если $E[J]E[I] = E[I]$, то $E[J]x = x$ для всех $x \in I$, поэтому $I \subseteq J$.

3. Третье утверждение следует из того, что $E[T] = E[(RTR)^*]$. $\square$

Определение 4. Система градуированных идеалов $(I_\gamma)_\gamma$ gr-полупервичного кольца R называется

— *ортогональной*, если выполнено любое из эквивалентных условий

1) $I_\gamma \cap I_\delta = 0$ при всех $\gamma \neq \delta$;
2) $I_\gamma I_\delta = 0$ при всех $\gamma \neq \delta$

(импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) выполнена в любом градуированном кольце, а импликация 1) $\Longleftarrow$ 2) — в gr-полупервичном);

— *плотной*, если идеал $\sum\limits_\gamma I_\gamma$ gr-плотный в R.

Теорема 5. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда в принятых выше обозначениях верны следующие утверждения.*

1. *$B_e = \{E[T] \mid T$ — градуированное подмножество в $R\}$.*
2. *Для каждого градуированного подмножества T кольца R существует единственный элемент $u \in B_e$, такой что*
$$\mathrm{r}_{C^{\mathrm{gr}}}(T) = (1-u)C^{\mathrm{gr}},$$
и этим элементом u является элемент $E[T]$. При этом
$$\mathrm{r}_{C_e}(T) = (1-E[T])C_e.$$
3. *Булева алгебра*
$$(B_e;\, \leqslant,\, 0,\, 1,\, \wedge,\, '), \quad \text{где} \ \ u \wedge v = uv, \quad u' = 1-u,$$
изоморфна булевой алгебре аннуляторных градуированных идеалов кольца R
$$(\mathfrak{Ann}(R);\, \subseteq,\, 0,\, R,\, \cap,\, ^*),$$
причём изоморфизм доставляют взаимно-обратные отображения
$$\begin{cases} B_e \to \mathfrak{Ann}(R), \\ u \mapsto uR \cap R = \{r \in R \mid r = ur\} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \mathfrak{Ann}(R) \to B_e, \\ I \mapsto E[I]. \end{cases}$$
4. *Для любого семейства аннуляторных идеалов $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ кольца R верны следующие утверждения:*
   а) *$I_\gamma I_\delta = 0$ тогда и только тогда, когда $E[I_\gamma]E[I_\delta] = 0$;*
   б) *система $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ плотна в $\mathfrak{Ann}(R)$ тогда и только тогда, когда система $\{E[I_\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\}$ плотна в B_e.*

Доказательство. 1. Включение $\supseteq$ доказано в пункте 1 леммы 3. Обратно, пусть $u \in B_e$. Положим
$$I := \{x \in R \mid ux = x\}.$$
Тогда I — градуированный идеал в R, для которого
$$I^* = \{y \in R \mid uy = 0\}, \quad I \oplus I^* = \{z \in R \mid uz \in R\}.$$
Поэтому $E[I] = u$.

2. Поскольку $(1-u)C^{\mathrm{gr}}$ — кольцо с единицей $1-u$ для любого $u \in B_e$, то может существовать не более одного такого элемента u. Докажем, что при $u = E[T]$ указанное равенство верно. Пусть $I = Q^{\mathrm{gr}}TQ^{\mathrm{gr}}$ — градуированный идеал в Q^{gr}, порождённый множеством T. Ясно, что $\mathrm{r}_{C^{\mathrm{gr}}}(T) = \mathrm{r}_{C^{\mathrm{gr}}}(I)$. Если $x \in \mathrm{r}_{C^{\mathrm{gr}}}(T)$, то $x(1-u)(a+b) = xb = x(a+b)$ для всех $a \in I$, $b \in I^*$, так что $x(1-u) = x$ и $C^{\mathrm{gr}}(1-u) \supseteq \mathrm{r}_{C^{\mathrm{gr}}}(T)$. Обратное включение очевидно.

Второе равенство следует из первого и того, что $1 - E[T] \in C_e$.

3. Указанные отображения взаимно-обратны, так как для всех $r \in h(R)$ из $E[uR \cap R](r) = ur$ следует $E[uR \cap R] = u$ и

$$r \in E[I]R \cap R \iff r = E[I]r \iff r \in \big((1 - E[I])R\big)^* \iff r \in I^{**} = I.$$

Кроме того,

1) $u \leqslant v \iff uv = u \iff uR \cap R = uvR \cap R (\subseteq vR) \iff uR \cap R \subseteq vR \cap R$;
2) $0^* = R$; $R^* = 0$;
3) $uvR = uR \cap vR$, так как $ur = vs$, следовательно, $vur = v^2 s = vs \in uvR$;
4) $\big((1-u)R \cap R\big)^* = uR \cap R$.

4. Пункт а) следует из пункта 1 и равносильности 1) $\iff$ 2) в определении 4.

Пункт б) следует из равносильности

$$\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma R \cap R\right)^* = 0 \iff \mathrm{Ann}_{B_e}\{u_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = 0. \qquad \square$$

Предложение 3. *Кольцо B_e ортогонально полно.*

Доказательство. По утверждению 2 теоремы 5 с учётом регулярности кольца C_e (утверждение 3) предложения 2) для каждого подмножества $S \subseteq B_e$ имеем

$$\mathrm{r}_{B_e}(S) = B_e \cap \mathrm{r}_{C_e}(S) = B_e \cap (1 - E[S])C^{\mathrm{gr}} = (1 - E[S])B_e. \qquad \square$$

Замечание 2. Булево кольцо B идемпотентов любого коммутативного регулярного самоинъективного кольца C ортогонально полно. Действительно, полное правое кольцо частных $Q(C)$ совпадает с C, так что C совпадает со своим расширенным центроидом. Тогда кольцо B ортогонально полно по [6, следствие 8.5].

Следующее важное свойство однородных идемпотентов является аналогом леммы 2 из [4].

Лемма 4. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда для любых элементов $a, b \subseteq h(Q^{\mathrm{gr}})$ следующие условия равносильны*:

1) $E[a]E[b] = 0$;
2) $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$;
3) $aRb = 0$.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из того, что $aE[a] = a$, $bE[b] = b$ и $E[a], E[b] \in C^{\mathrm{gr}}$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$. Тогда $a \in (Q^{\mathrm{gr}}bQ^{\mathrm{gr}})^*$, поэтому $aE[b] = 0$, $E[b] \in \mathrm{r}_{C^{\mathrm{gr}}}(a) = (1 - E[a])C^{\mathrm{gr}}$, $E[b] = (1 - E[a])E[b]$, $E[a]E[b] = 0$.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $aRb = 0$. Тогда $(bQ^{\mathrm{gr}}aR)^2 = 0$, так что $(bQ^{\mathrm{gr}}aR) \cap R = 0$ ввиду gr-полупервичности кольца R. Но тогда $bQ^{\mathrm{gr}}aR = 0$, $bQ^{\mathrm{gr}}a = 0$, $E[b]E[a] = 0$, $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$. $\square$

Следствие 2. *Пусть S — градуированное кольцо частных gr-полупервичного кольца R. Тогда S gr-первично в точности тогда, когда R gr-первично.*

Доказательство. Ясно, что gr-первичность кольца R влечёт gr-первичность кольца S. Пусть S gr-первично и $aRb = 0$, где $a, b \in h(A)$. Тогда кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(S) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-первично и по лемме 4 $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$, значит, $a = 0$ или $b = 0$. $\square$

4. Критерий ортогональной полноты кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$

Перейдём к вопросам ортогональной полноты градуированных колец и модулей. Начиная с этого момента, если не оговорено противное, ортогональная полнота понимается относительно булева кольца B_e однородных идемпотентов градуированного расширенного центроида данного gr-полупервичного кольца R (кольцо B_e ортогонально полно по предложению 3).

Известно, что в случае $G = \{e\}$ кольцо $Q^{\mathrm{gr}} = Q$ является несингулярным и ортогонально полным C_e-модулем [5]. В общем случае кольцо Q^{gr} может оказаться не ортогонально полным.

Пример 3. Пусть A — такое полупервичное кольцо, что булево кольцо B идемпотентов его расширенного центроида бесконечно, а значит, по лемме 2 содержит бесконечную ортогональную систему идемпотентов e_n, $n \in \mathbb{N}$, например, $A = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$. Пусть G — бесконечная группа, $g_i \in G$, $i \in \mathbb{N}$, $R = AG$ — групповое кольцо с канонической G-градуировкой, gr-полупервичное в силу полупервичности A, $Q^{\mathrm{gr}} := Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q(A)G$ (см. пример 1), $B_e = B$ и для системы $\{(e_i, g_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ не определена ортогональная сумма в R, поскольку для всякого $t \in R$ множество $\{te_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ имеет конечный носитель, в то время как множество $\{g_i e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ имеет бесконечный носитель $\{g_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Значит, в этом случае кольцо Q^{gr} не является ортогонально полным.

Введём понятие ортогональной gr-полноты.

Определение 5. Пусть X_g — несингулярные C_e-модули при всех $g \in G$. C_e-модуль $X = \bigoplus\limits_{g\in G} X_g$ назовём ортогонально gr-полным, если все модули X_g ортогонально полны.

Заметим, что прямые суммы несингулярных модулей несингулярны.

Предложение 4. *Для произвольного* gr*-полупервичного кольца* R *верны следующие утверждения.*

1. Q^{gr} *— несингулярный* C_e*-модуль.*
2. Q^{gr} *— ортогонально* gr*-полный* C_e*-модуль.*

Доказательство. 1. Достаточно доказать, что Q_g^{gr} — несингулярный C_e-модуль при всех $g \in G$. Пусть $x \in \mathrm{Sing}_{C_e}(Q_g^{\mathrm{gr}})$. Тогда $\mathrm{Ann}_{C_e}(x) = (1 - E[x])C_e$ (пункт 2 теоремы 5) — gr-существенный идеал в C_e, и поскольку $(1 - E[x])C_e \cap \cap E[x]C_e = 0$, то $E[x] = 0$, откуда получаем, что $x = 0$.

2. Пусть $g \in G$, $\{u_\gamma\}_\gamma \subseteq B_e$ — плотное ортогональное подмножество, $\{t_\gamma\}_\gamma \subseteq \subseteq Q_g^{\mathrm{gr}}$. Тогда градуированный идеал $\sum\limits_\gamma u_\gamma Q^{\mathrm{gr}}$ gr-плотный, а отображение

$$f\colon \begin{cases} \sum\limits_\gamma u_\gamma Q^{\mathrm{gr}} \to Q^{\mathrm{gr}}, \\ \sum\limits_{i=1}^n a_{\gamma_i} u_{\gamma_i} \mapsto \sum\limits_{i=1}^n t_{\gamma_i} a_{\gamma_i} u_{\gamma_i} \end{cases}$$

корректно и задаёт однородный степени g гомоморфизм правых Q^{gr}-модулей, который определяет элемент $t = [f]_\theta \in Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}$. А поскольку $f(u_\gamma) = t_\gamma u_\gamma$, то $t_\gamma u_\gamma = t u_\gamma$. $\square$

Выясним, при каких условиях кольцо Q^{gr} ортогонально полно (как C_e-модуль). Для этого найдём критерий ортогональной полноты прямой суммы несингулярных модулей.

Теорема 6. *Пусть* B *— ортогонально полное булево кольцо (и следовательно, коммутативное регулярное самоинъективное кольцо),* $(X_i)_{i \in I}$ *— семейство несингулярных* B*-модулей,* $X = \bigoplus\limits_{i \in I} X_i$*. Тогда следующие условия равносильны:*

1) X *— ортогонально полный* B*-модуль;*
2) *все* B*-модули* X_i *ортогонально полны и для любой бесконечной ортогональной системы* $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ *в* B *существуют такие конечные подмножества* $I_0 \subseteq I$ *и* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$*, что* $u_\gamma X_i = 0$ *для всех* $i \in I \setminus I_0$ *и всех* $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$*.*

Доказательство. Образ элемента $t \in X$ при канонической проекции $X \to X_m$ обозначим через $t^{(m)}$, $\mathrm{Supp}(t) := \{i \in I \mid t^{(i)} \neq 0\}$ — носитель элемента $t \in X$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $i \in I$, $\{u_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — плотная ортогональная система в B, $x_\gamma \in X_i$, $\gamma \in \Gamma$. Тогда в силу ортогональной полноты модуля X существует такой элемент $x \in X$, что $x u_\gamma = x_\gamma u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поскольку $x_\gamma u_\gamma \in X_i$, то элемент x в последнем равенстве можно заменить на его компоненту $x^{(i)}$. Но из несингулярности модуля X следует, что элемент x определяется однозначно. Значит, $x = x^{(i)}$. Таким образом, если $x_\gamma \in X_i$, то $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma \in X_i$. Поэтому все модули X_i, $i \in I$, ортогонально полны.

Далее, если кольцо B конечно или множество I конечно, то утверждение 2) верно. Иначе по лемме 2 в B найдётся бесконечная ортогональная система $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Если для неё утверждение неверно, то найдутся такие счётные множества $\{\gamma_k \in \Gamma \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $\{i_k \in I \mid k \in \mathbb{N}\}$, что $u_{\gamma_k} X_{i_k} \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в X систему элементов

$$x_\gamma = \begin{cases} x_{i_k}, & \gamma = \gamma_k, \\ 0, & \gamma \notin \{\gamma_k \mid k \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

где $x_{i_k} \in X_{i_k}$ такие, что $u_{\gamma_k} x_{i_k} \neq 0$. По 1) для системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в X существует такой элемент $x \in X$, что $u_\gamma x = u_\gamma x_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$, в частности, $u_{\gamma_k} x = u_{\gamma_k} x_{i_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как множество $\{i_k \in I \mid k \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, то существует элемент $i_m \in I \setminus \operatorname{Supp}(x)$. Тогда

$$0 = (u_{\gamma_m} x)^{(m)} = (u_{\gamma_m} x_{i_m})^{(m)} = u_{\gamma_m} x_{i_m} \neq 0.$$

Получено противоречие.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Рассмотрим произвольную плотную ортогональную систему $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и произвольную систему $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в X. По 2) для каждого $i \in I$ существует однозначно определённый элемент $x^{(i)} := \sum_\gamma^\perp u_\gamma x_\gamma^{(i)} \in X_i$, а требуется найти такой элемент $x \in X$, что $u_\gamma x_\gamma = u_\gamma x$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Если множество Γ конечно, то все $x^{(i)}$, кроме конечного их числа, равны 0, поэтому подойдёт элемент $x = \sum_{i\in I} x^{(i)}$. Если множество Γ бесконечно, то по условию найдутся такие конечные множества $I_0 \subseteq I$ и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, что $u_\gamma X_i = 0$ для всех $i \in I \setminus I_0$ и всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$. Множество $J := \bigcup_{\gamma\in\Gamma_0} \operatorname{Supp}(x_\gamma) \cup I_0$ конечно и обладает тем свойством, что $u_\gamma x_\gamma^{(i)} = 0$ при всех $\gamma \in \Gamma$ и $i \in I \setminus J$. Тогда в качестве x следует взять $\sum_{j\in J} x^{(j)}$. □

Следствие 3. *В обозначениях теоремы* 6 *предположим, что булево кольцо B конечно или множество I конечно. Тогда модуль X ортогонально полон тогда и только тогда, когда все модули X_i, $i \in I$, ортогонально полны.*

Теперь мы готовы доказать критерий ортогональной полноты полного правого градуированного кольца частных gr-полупервичного кольца.

Теорема 7. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Следующие условия равносильны*:

1) *кольцо Q^{gr} ортогонально полно*;
2) *для любой бесконечной ортогональной системы идемпотентов $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B_e существуют такие конечные подмножества $G_0 \subseteq G$ и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, что $u_\gamma Q_g^{\mathrm{gr}} = 0$ для всех $g \in G \setminus G_0$ и $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы 6 и предложения 4. □

Следствие 4. *Если кольцо R имеет конечный носитель (например, если группа G конечна) или кольцо B_e конечно, то кольцо Q^{gr} ортогонально полно.*

Выполнение хотя бы одного из двух, очевидно достаточных, условий ортогональной полноты кольца Q^{gr}, указанных в следствии 4, оказывается необходимым в случае точной градуировки кольца R.

Теорема 8. *Если gr-полупервичное кольцо R точно во всех компонентах слева или справа, то кольцо Q^{gr} ортогонально полно в точности тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий: группа G конечна или кольцо B_e конечно.*

Доказательство. Ввиду теоремы 7 нужно доказать необходимость одного из условий конечности. Из условия следует, что равенство $uR_g = 0$ (и тем более равенство $uQ^{\mathrm{gr}}_g = 0$), где $u \in B_e$, влечёт равенство $u = 0$. Действительно, если $u \neq 0$, то $0 \neq ur \in h(R)$ для некоторого $r \in h(R)$ (так как $R_R \subseteq Q^{\mathrm{gr}}_R$ — gr-существенное расширение). Тогда $urR_g = ruR_g = 0 = R_g ur$, и $ur = 0$ в силу g-точности кольца R справа или слева. Получили противоречие. Значит, если кольцо B_e бесконечно, то из условия 2) теоремы 7 получаем, что $G \setminus G_0 = \varnothing$ для некоторого конечного подмножества $G_0 \subseteq G$, т. е. группа G конечна. $\square$

В [13, предложение 3.1.6] установлена связь между ортогональной полнотой и инъективностью модулей.

Предложение 5 [13, предложение 3.1.6]. *Пусть C — коммутативное регулярное самоинъективное кольцо, B — булево кольцо идемпотентов кольца C. Тогда всякий несингулярный C-модуль ортогонально полон относительно B тогда и только тогда, когда он инъективен.*

Найдём аналогичные связи в градуированном случае. При этом окажется, что установленный нами факт о несовпадении ортогональной полноты и ортогональной gr-полноты согласован с фактом несовпадения инъективности и gr-инъективности для градуированных модулей.

Теорема 9 (критерий Бэра для градуированных модулей [15, следствие 2.4.8]). *Градуированный модуль X_R gr-инъективен (т. е. инъективен в категории $\mathrm{gr.mod}\text{-}R$) тогда и только тогда, когда для любого градуированного правого идеала K кольца R, любого $g \in G$ и любого $\varphi \in \big(\mathrm{HOM}_R(K, X)\big)_g$ найдётся такой элемент $x \in X_g$, что $\varphi(k) = xk$ для всех $k \in K$.*

Предложение 6 [15, следствия 2.3.2, 2.5.2, пример 2.3.3]. *Верны следующие утверждения.*

1. *Всякий инъективный градуированный модуль gr-инъективен.*
2. *Если группа G конечна, то всякий gr-инъективный G-градуированный модуль инъективен.*
3. *Пусть k — поле, $R = k[x, x^{-1}]$ — $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо с градуировкой $R_n = kx^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда R_R — gr-инъективный, но не инъективный модуль.*

Следствие 5. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Снабдим кольцо C_e тривиальной G-градуировкой: $(C_e)_e = C_e$, $(C_e)_g = 0$ при $g \neq e$. Тогда*

1) *C_e-модуль Q^{gr} gr-инъективен;*
2) *C_e-модуль Q^{gr} инъективен в точности тогда, когда он ортогонально полон относительно кольца B_e (см. критерий в теореме 7).*

Доказательство. Ясно, что gr-инъективность модуля Q^{gr} равносильна инъективности всех C_e-модулей Q^{gr}_g, $g \in G$. По предложению 4 все модули Q^{gr}_g ортогонально полны, а тогда по предложению 5 они инъективны (следует учесть, что по утверждению 3) предложения 2 кольцо C_e регулярно и самоинъективно). Утверждение 2) непосредственно следует из предложения 5. □

5. Ортогональное градуированное пополнение

Перейдём к построению ортогонального градуированного пополнения градуированного подмножества в Q^{gr}. В классическом случае ортогональное пополнение $O(T)$ подмножества T несингулярного C-модуля N определяется как пересечение всех ортогонально полных множеств, содержащих T, и само является ортогонально полным [5, 6]. При таком подходе в градуированном случае не все gr-полупервичные кольца будут иметь ортогональные пополнения (ввиду условий конечности из теоремы 7). Поэтому мы возьмём за основу понятие ортогональной gr-полноты. Поскольку всякое градуированное подмножество в Q^{gr} содержится в ортогонально gr-полном модуле Q^{gr} и пересечение ортогонально gr-полных подмножеств в Q^{gr} — ортогонально gr-полное подмножество, то каждое градуированное подмножество T в Q^{gr} содержится в наименьшем ортогонально gr-полном подмножестве.

Определение 6. Пусть R — gr-полупервичное кольцо, T — градуированное подмножество в Q^{gr}. Ортогональным градуированным пополнением множества T назовём пересечение всех ортогонально gr-полных подмножеств Q^{gr}, содержащих T. Ортогональное градуированное пополнение множества T обозначим через $O^{\mathrm{gr}}(T)$.

Опишем ортогональное градуированное пополнение подмножества gr-полупервичного кольца поэлементно. В неградуированном случае это сделано в [5, лемма 1].

Предложение 7. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, T — градуированное подкольцо в Q^{gr}. Тогда для всех $g \in G$*

$$O^{\mathrm{gr}}(T)_g = \left\{ \sum_{\gamma}{}^{\perp} t_\gamma v_\gamma \;\middle|\; \begin{array}{l} \{t_\gamma\}_\gamma \subseteq T_g, \\ \{u_\gamma\}_\gamma \text{ — плотная ортогональная система в } B_e \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Если к тому же кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ ортогонально полно, то

$$O^{\mathrm{gr}}(T) = \left\{ \sum_{\gamma}^{\perp} t_\gamma u_\gamma \;\middle|\; \{t_\gamma\}_\gamma \subseteq T,\ \{u_\gamma\}_\gamma \text{ — плотная ортогональная система в } B_e \right\}.$$

Доказательство. Включение $\supseteq$ в (3) очевидно. Покажем, что множество в правой части (3) ортогонально полно. Пусть $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — плотная ортогональная система в B_e и $x_\gamma = \sum\limits_{\omega(\gamma)\in\Omega(\gamma)}^{\perp} t_{\omega(\gamma)} v_{\omega(\gamma)}$, $t_{\omega(\gamma)} \in T_g$, $\{v_{\omega(\gamma)}\}_{\omega(\gamma)\in\Omega(\gamma)}$ — плотная ортогональная система в B_e при каждом $\gamma \in \Gamma$. Так как $x_\gamma \in T_g$, то существует элемент $x = \sum\limits_{\gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma \in T_g$. Ясно, что система

$$\Delta = \bigl\{\delta = \bigl(\gamma, \omega(\gamma)\bigr) \mid \gamma \in \Gamma,\ \omega(\gamma) \in \Omega(\gamma)\bigr\}$$

плотная ортогональная в B_e, поэтому, обозначив $w_\delta := u_\gamma v_{\omega(\gamma)}$ и $y_\delta := x_{\omega(\gamma)}$, имеем

$$x w_\delta = x_\gamma u_\gamma v_{\omega(\gamma)} = x_\gamma v_{\omega(\gamma)} u_\gamma = x_{\omega(\gamma)} v_{\omega(\gamma)} u_\gamma = y_\delta w_\delta.$$

Значит, $x = \sum\limits_{\delta\in\Delta}^{\perp} y_\delta w_\delta$, и (3) доказано.

Второе утверждение следует из первого. □

Предложение 8. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда $O^{\mathrm{gr}}(R)$ — градуированное правое кольцо частных кольца R. В частности, кольцо $O^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-полупервично.*

Доказательство. Пусть $\{u_\gamma\}_\gamma$ и $\{v_\delta\}_\delta$ — плотные ортогональные системы в B_e. Тогда такова же и $\{u_\gamma v_\delta\}_{(\gamma,\delta)}$ (индексные множества для краткости опускаем). Если теперь $x_\gamma \in R_g$, $y_\delta \in R_h$ $(g, h \in G)$, то

$$(x_\gamma + y_\delta) u_\gamma v_\delta = x u_\gamma v_\delta + y v_\delta u_\gamma, \quad (x_\gamma y_\delta) u_\gamma v_\delta = x u_\gamma y v_\delta,$$

$$\sum_{\gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma + \sum_{\delta}^{\perp} y_\delta v_\delta = \sum_{(\gamma,\delta)}^{\perp} (x_\gamma + y_\delta) u_\gamma v_\delta,$$

$$\sum_{\gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma \cdot \sum_{\delta}^{\perp} y_\delta v_\delta = \sum_{(\gamma,\delta)}^{\perp} (x_\gamma y_\delta) u_\gamma v_\delta.$$

Значит, $O^{\mathrm{gr}}(R)$ — кольцо. Поскольку $O^{\mathrm{gr}}(R)$ — градуированное множество и $R \subseteq O^{\mathrm{gr}}(R) \subseteq Q^{\mathrm{gr}}(R)$, то O^{gr} — градуированное правое кольцо частных кольца R. □

Следствие 6. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, T — градуированное подмножество в R. Тогда*

1) $O^{\mathrm{gr}}(T) = \bigoplus_{g\in G} O^{\mathrm{gr}}(T_g)$;
2) $O^{\mathrm{gr}}\bigl(O^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) = O^{\mathrm{gr}}(R)$;
3) $Q^{\mathrm{gr}}\bigl(O^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) = O^{\mathrm{gr}}\bigl(Q^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$;

4) $O^{\mathrm{gr}}(R)$ *ортогонально полно тогда и только тогда, когда* $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ *ортогонально полно, что имеет место тогда и только тогда, когда всякое ортогонально* gr*-полное подмножество в* Q^{gr} *ортогонально полно.*

Докажем аналогично неградуированному случаю [7, теорема 3.2] условие ортогональной gr-полноты gr-полупервичного кольца в терминах его внутренней структуры.

Теорема 10 (критерий ортогональной gr-полноты gr-полупервичного кольца). *Пусть* R — gr*-полупервичное кольцо,* $O^{\mathrm{gr}} = O^{\mathrm{gr}}(R)$*. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $R = O^{\mathrm{gr}}$;
2) *для любой плотной ортогональной системы градуированных идеалов* $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ *кольца* R*, любого* $g \in G$ *и любой системы* $\{r_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq R_g$ *существует такой элемент* $r \in R_g$*, что* $(r - r_\gamma)I_\gamma = 0$ *для всех* $\gamma \in \Gamma$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — плотная ортогональная система градуированных идеалов в R, $g \in G$, $r_\gamma \in R_g$. Положим $u_\gamma := E[I_\gamma]$ и $r := \sum\limits_\gamma^\perp u_\gamma r_\gamma \in O_g^{\mathrm{gr}} = R_g$. Тогда

$$(r - r_\gamma)I_\gamma = (r - r_\gamma)u_\gamma I_\gamma = 0.$$

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\{u_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — плотная ортогональная система в B_e, $r_\gamma \in R_g$, где $g \in G$. Надо показать, что $r := \sum\limits_\gamma^\perp u_\gamma r_\gamma \in R_g$. Положим $I_\gamma := u_\gamma(R : u_\gamma)_R$, $I = \sum\limits_\gamma I_\gamma$. По теореме 5 I — gr-плотный идеал в R. По условию существует такой элемент $t \in R_g$, что $(t - r_\gamma)I_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поэтому $(t - r)I_\gamma = (t - r_\gamma + r_\gamma - r)I_\gamma = (r_\gamma - r)I_\gamma = (r_\gamma - r)u_\gamma I_\gamma = 0$. Значит, $(t - r)I = 0$ и $r = t \in R_g$. □

Случаи конечного кольца B_e.

1. *Ясно, что если кольцо* B_e *конечно, то кольцо* R *ортогонально полно в точности тогда, когда* $B_e \subseteq R$*. В этом случае ортогональные суммы* $\sum^\perp$ *совпадают с обычными конечными суммами* $\sum$.
2. *Если кольцо* R gr*-первично, то* C_e *— поле (предложение 2), поэтому* $B_e \cong \mathbb{Z}_2$ *и* $R = O^{\mathrm{gr}}$.
3. *Если кольцо* R *— прямая сумма* n gr*-первичных колец* R_i*, то* $Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus\limits_{i=1}^n Q^{\mathrm{gr}}(R_i)$ *и* C_e *— прямая сумма* n *полей, поэтому* $B_e \cong \mathbb{Z}_2^n$ *и* $R = O^{\mathrm{gr}}$.
4. *В* [9, теорема 3.5] *доказано, что* gr*-полупервичное правое* gr*-pri* (*градуированное кольцо, в котором каждый градуированный правый идеал порождается одним однородным элементом*) *градуированное кольцо Голди* (*не содержит бесконечных прямых сумм градуированных правых идеалов и*

удовлетворяет условию максимальности для градуированных правых аннуляторов) изоморфно конечной прямой сумме gr-первичных gr-pri градуированных колец Голди и поэтому ортогонально полно. Однако не все gr-полупервичные градуированные кольца Голди ортогонально полны.

Теорема 11 [15, теорема 8.4.4]. *Пусть R — gr-первичное градуированное кольцо Голди, градуированное абелевой группой G. Тогда существует и вполне приводимо кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

Предложение 9 [9, предложение 3.1]. *Пусть R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди. Тогда $O^{\mathrm{gr}} = O^{\mathrm{gr}}(R)$ — конечная прямая сумма gr-первичных правых градуированных колец Голди.*

Теорема 12 [9, теорема 3.3]. *Пусть R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди, градуированное по абелевой группе. Тогда существуют такие gr-первичные градуированные кольца Голди $R_1, \ldots, R_n$, что*

$$O^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i, \quad Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R_i).$$

Вернёмся к примеру 2 и найдём ортогональное градуированное пополнение кольца из этого примера.

Пример 4 [9, пример 3.5]. Для кольца R из примера 2

$$B = B_e \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad O^{\mathrm{gr}} = k[x] \oplus k[y], \quad O_n^{\mathrm{gr}} = \begin{cases} kx^n \oplus 0, & n > 0, \\ k \oplus k, & n = 0, \\ 0 \oplus ky^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

В заключение этого раздела установим связь между кольцами C_e, B_e, $O^{\mathrm{gr}}(R)_e$, построенными по gr-полупервичному кольцу R, и кольцами C, B, $O(R_e)$, построенными по кольцу R_e, в случае полупервичности последнего.

Предложение 10. *Сохраним условия теоремы* 3 *и обозначения из её доказательства. Предположим также, что кольцо R gr-полупервично, кольцо R_e полупервично (по* [15, теорема 2.11.4] *это так, если R — gr-полупервичное кольцо с конечным носителем). Тогда $\overline{C_e} \subseteq C(R_e)$, $\overline{B_e} \subseteq B(R_e)$ и $\overline{O_e^{\mathrm{gr}}} \subseteq O(R_e)$.*

Доказательство. По лемме 5

$$C_e = \{c \in Q_e^{\mathrm{gr}} \mid rc = cr \text{ для всех } r \in R\},$$

следовательно, $\bar{c}r = r\bar{c}$ для всех $c \in C_e$ и $r \in R_e$ (так как $\overline{R_e} = R_e$), поэтому $\bar{c} \in C(R_e)$ для всех $c \in C_e$.

Первое включение доказано, второе включение следует из первого, а третье — из второго и поэлементного описания колец O^{gr}, $O(R_e)$ ([5, лемма 1], предложение 7). □

Отметим, что включение $\overline{C_e} \supseteq C(R_e)$, вообще говоря, не имеет места, поскольку элементы кольца $C(R_e)$ могут не коммутировать со всеми элементами кольца R.

Пример 5. Пусть A — полупервичное кольцо, G — группа, $\sigma\colon G \to \operatorname{Aut} A$ — гомоморфизм групп, ${}^g a := \sigma(g)(a)$. Рассмотрим скрещённое произведение $R = A^\sigma[G]$ с канонической G-градуировкой $R_g = Ag$. Напомним, что произведение однородных элементов в R определяется равенством $(ag)(bh) = a^g bgh$.

Ясно, что R gr-полупервично и точно во всех компонентах, поэтому по теореме 3 существует изоморфизм колец $Q(R_e) \cong Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, тождественный на $R_e = A$. Пусть $c \in C(A) = Z\big(Q(A)\big)$, $d = \tilde{c} \in C_e(A) = Z\big(Q^{\mathrm{gr}}(R)\big) \cap Q^{\mathrm{gr}}_e$. Тогда справедливы эквивалентности

$$\begin{gathered} d \in C_e(R) \iff rd = dr \text{ для всех } r \in h(R) \iff (ag)d = d(ag) \iff \\ \iff a^g d = da (= ad) \text{ для всех } a \in A \text{ и } g \in G \iff {}^g d = d \text{ для всех } g \in G, \end{gathered}$$

что неверно, например, при $A = \mathbb{C}$, $G = \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{Z}_2$, $g(z) = \bar{z}$ ($z \in \mathbb{C}$), $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Отметим, что в случае коммутативных колец включения в предложении 10 обращаются в равенства.

Замечание 3 (случай коммутативного кольца R). Если R — градуированное коммутативное кольцо, то равносильны следующие условия:

1) R gr-полупервично;
2) R gr-несингулярно;
3) R gr-редуцированно (не содержит ненулевых нильпотентных однородных элементов).

При выполнении этих условий верны следующие утверждения: кольцо R_e коммутативно и редуцированно, $Q^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}$, $Q(R_e) = C(R_e)$. Если к тому же кольцо R e-точно, то из теоремы 3 следует, что $Q^{\mathrm{gr}}_e \cong Q(R_e)$, $C_e \cong C(R_e)$, $B_e \cong B(R_e)$, $O^{\mathrm{gr}}_e \cong O(R_e)$.

6. Локализации

В этом разделе R — gr-полупервичное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$, $O^{\mathrm{gr}} = O^{\mathrm{gr}}(R)$, $C^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}(R)$, $C_e = C^{\mathrm{gr}}_e$, $B_e = \{u \in C_e \mid u = u^2\}$.

Нам понадобится конструкция локализации AS^{-1} кольца A по мультипликативной системе S, лежащей в его центре (см., например, [12, гл. 10], [1, гл. 3]). Если A — G-градуированное кольцо, $S \subseteq h(A)$, то кольцо AS^{-1} наследует градуировку кольца A,

$$(AS^{-1})_g = \bigcup_{h \in G} \{as^{-1} \mid a \in A_h,\ s \in A_{g^{-1}h}\},$$

и канонический эпиморфизм колец $A \to AS^{-1}$, $a \mapsto [(a, 1)]$ является однородным.

Предложение 11. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. В принятых выше обозначениях верны следующие утверждения.*

1. *Между идеалами кольца B_e и идеалами кольца C_e существует взаимно-однозначное соответствие*
$$\begin{cases} \mathcal{L}(B_e) \ni M \mapsto MC_e \in \mathcal{L}(C_e), \\ \mathcal{L}(C_e) \ni P \mapsto P \cap B_e \in \mathcal{L}(B_e), \end{cases}$$
сохраняющее включения, в частности, максимальным идеалам соответствуют максимальные.
2. *Между идеалами кольца C_e и градуированными идеалами кольца C^{gr} существует взаимно-однозначное соответствие*
$$\begin{cases} \mathcal{L}(C_e) \ni P \mapsto PC^{\mathrm{gr}} \in \mathcal{L}^{\mathrm{gr}}(C^{\mathrm{gr}}), \\ \mathcal{L}^{\mathrm{gr}}(C^{\mathrm{gr}}) \ni K \mapsto K_e \in \mathcal{L}(C_e), \end{cases}$$
сохраняющее включения, в частности, максимальным идеалам в C_e соответствуют максимальные градуированные идеалы в C^{gr}.

Доказательство. 1. Включение $M \subseteq MC \cap B$ очевидно, а обратное включение следует из регулярности кольца C_e (предложение 2) и того, что в регулярном кольце каждый конечно порождённый идеал порождается идемпотентом [10, с. 115]: если $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i c_i = b \in B$, $m_i \in M$, $c_i \in C$, то $b = mc$ для некоторых $m \in M$, $c \in C$, откуда следует, что $b = mc = m^2c = mb \in MB = M$. Сохранение включений очевидно.

2. Ясно, что $(PC^{\mathrm{gr}})_e = PC_e = P$. Так как кольцо C^{gr} gr-регулярно (предложение 2), то $K_eC^{\mathrm{gr}} = K$. Действительно, K и K_eC^{gr} — градуированные идеалы в C^{gr} и $h(K_eC^{\mathrm{gr}}) = h(K)$, так как для всякого $a \in h(K)$ существует такое $x \in h(C^{\mathrm{gr}})$, что $a = axa$ и $ax \in C_e \cap K = K_e$, так что $a = (ax)a \in K_eC^{\mathrm{gr}}$. □

С каждым ультрафильтром $\mathcal{F}$ булева кольца B_e свяжем отношение эквивалентности на O^{gr}:
$$a \equiv_{\mathcal{F}} b \iff ua = ub \text{ для некоторого } u \in \mathcal{F}, \quad a, b \in O^{\mathrm{gr}}.$$

Предложение 12. *Для любых $a, b \in O^{\mathrm{gr}}$ и любого ультрафильтра $\mathcal{F}$ в B_e верна равносильность*
$$a \equiv_{\mathcal{F}} b \iff a_g \equiv_{\mathcal{F}} b_g \text{ для всех } g \in G.$$

Доказательство. Импликация $\Longrightarrow$ очевидна. Докажем обратную импликацию. Пусть $\mathrm{Supp}(a) \cup \mathrm{Supp}(b) = \{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq G$. Тогда если $u_{g_i}(a_{g_i} - b_{g_i})$, где все u_{g_i} принадлежат $\mathcal{F}$, равны 0, то $u(a - b) = 0$ для $u = u_{g_1} \ldots u_{g_n} \in \mathcal{F}$. □

Для каждого максимального идеала M кольца B_e и соответствующего ему ультрафильтра $\mathcal{F} = B \setminus M$ определим отображение
$$\varphi_M\colon \begin{cases} O^{\mathrm{gr}} \to O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F}, \\ a \mapsto [a]_{\equiv_{\mathcal{F}}}, \end{cases}$$

а для каждого максимального идеала P кольца C_e определим отображение локализации

$$\psi_P\colon \begin{cases} Q^{\mathrm{gr}}(R) \to Q^{\mathrm{gr}}(R)_P, \\ a \mapsto [(a,1)]_\sim. \end{cases}$$

Ясно, что φ_M и ψ_P — гомоморфизмы градуированных колец.

Свойства локализации в неградуированном случае исследованы в [5, лемма 2, теорема 1] и [13]. При их перенесении на градуированный случай могут возникнуть трудности, если кольцо Q^{gr} не является ортогонально полным. Однако некоторые свойства сохраняют свою силу и в этой ситуации, когда достаточно одной только ортогональной gr-полноты кольца Q^{gr} (имеющей место всегда). Эти общие свойства мы выделим отдельно в предложении 13.

Следующая лемма является градуированным аналогом леммы 3 из [4].

Лемма 5. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, $a,b \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, $u = E[a]E[b]$ и $axb = bxa$ для всех $x \in h(R)$. Тогда найдётся такой однородный обратимый элемент γ кольца C^{gr}, что $au = \gamma bu$.* (*При* $b = 1$ *получаем утверждение* 1) *предложения* 2.)

Доказательство. Если $u = 0$, то подходит $\gamma = 1$. Пусть $u \neq 0$. Если $ua = 0$, то $u \in (1 - E[a])C_e \cap E[a]C_e = 0$, что неверно. Аналогично $bu \neq 0$. Обозначим $c := ua$, $d := ub$. Тогда $cxd = dxc$ для всех $x \in R$ и $E[c] = E[ua] = uE[a] = u = E[d]$, так что $\mathrm{r}_{C_e}(c) = \mathrm{r}_{C_e}(d) = (1-u)C_e$. Обозначим $L := (R : c) \cap (R : d) = \{r \in R \mid cr, dr \in R\}$, $I := RdL$. Ясно, что I — градуированный идеал кольца R, поэтому $I \oplus I^*$ — gr-плотный правый идеал в R по [3, лемма 3].

Докажем, что отображение

$$\gamma\colon \begin{cases} I \oplus I^* \to R, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^m x_i d y_i + x \mapsto \sum_{i=1}^m x_i c y_i + x, \text{ где } x_i \in R,\ y_i \in L,\ x \in I^* \ (i = 1,\dots,m), \end{cases}$$

корректно. Пусть $\sum\limits_{i=1}^m x_i d y_i + x = 0$. Тогда $x = 0 = \sum\limits_{i=1}^m x_i d y_i$, и далее можно считать все элементы x_i и y_i однородными, так как d однороден. Обозначим $z := \sum\limits_{i=1}^m x_i c y_i \in h(Q^{\mathrm{gr}})$. Тогда для всех $y \in R$

$$0 = cy \sum_{i=1}^m x_i d y_i = \sum_{i=1}^m (c y x_i d) y_i = dyz.$$

Поэтому $dRz = 0$ и $E[z]E[d] = E[z]u = 0$ по лемме 4. Следовательно,

$$0 = uE[z]z = uz = \sum_{i=1}^m x_i (uc) y_i = z.$$

Итак, γ — корректно определённый однородный гомоморфизм градуированных правых R-модулей, имеющий степень $g := (\deg d)^{-1} \deg c = (\deg b)^{-1} \deg a$ и определяющий некоторый однородный (той же степени) элемент кольца Q^{gr}, который мы обозначим тем же символом γ. Для любого $z \in h(R)$ элемент $\gamma z - z\gamma$ аннулирует gr-плотный правый идеал $I \oplus I^*$. Действительно, для всех $x_i \in R$, $y_i \in L$, $x \in I^*$ имеем, что $zx_i \in R$, $zx \in I^*$ и

$$(\gamma z)\left(\sum_{i=1}^{m} x_i d y_i + x\right) = \gamma\left(\sum_{i=1}^{m}(zx_i) d y_i + zx\right) = \\ = \sum_{i=1}^{m} zx_i c y_i + zx = z\gamma\left(\sum_{i=1}^{m} x_i d y_i + x\right).$$

Поэтому $\gamma z - z\gamma = 0$ и по утверждению 1) предложения 2 получаем, что $\gamma \in C(Q^{\mathrm{gr}})$.

Ясно, что элемент γ имеет обратный, задаваемый формулой

$$\sum_{i=1}^{m} x_i c y_i + x \mapsto \sum_{i=1}^{m} x_i d y_i + x,$$

$x \in I^*$, $x_i \in R$, $y_i \in L$. Поскольку $(c - \gamma d)x = cx - \gamma dx = 0$ для любого $x \in L$, то $c = \gamma d$. □

Предложение 13. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, M — максимальный идеал в B_e, $P = MC_e$ — соответствующий ему максимальный идеал в C_e (см. предложение 11), $\mathcal{F} = B_e \setminus M$, $\varphi = \varphi_M$, $\psi = \psi_P$, K — подкольцо в O^{gr}, T — подмножество в O^{gr}, $uK \subseteq K$, $uT \subseteq T$ для всех $u \in B_e$, H — градуированное подкольцо в Q^{gr}, содержащее O^{gr}, $a \in O^{\mathrm{gr}}$. Тогда*

1) $MK = \{k \in K \mid uk = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}\}$;
2) $O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F} \cong O^{\mathrm{gr}}/MO^{\mathrm{gr}}$;
3) $Q^{\mathrm{gr}}_P \cong Q^{\mathrm{gr}}/MQ^{\mathrm{gr}}$;
4) $MQ^{\mathrm{gr}} \cap H = MH$, $\psi(H) \cong H/MH$, *в частности,* $\psi(O^{\mathrm{gr}}) \cong \varphi(O^{\mathrm{gr}})$;
5) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \cap O^{\mathrm{gr}} = \{a \in O^{\mathrm{gr}} \mid E[a_g] \in M$ для всех $g \in G\}$;
6) $\varphi(a) \in \varphi(T)$ *тогда и только тогда, когда* $au \in T$ *для некоторого* $u \in \mathcal{F}$;
7) $\varphi\big((T : a)_K\big) = \big(\varphi(T) : \varphi(a)\big)_{\varphi(K)}$, *в частности,* $\varphi\big(\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big) = \mathrm{r}_{\varphi(O^{\mathrm{gr}})}\big(\varphi(a)\big)$.

Доказательство. Докажем справедливость включения $\subseteq$ утверждения 1). Для $k = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i k_i \in MK$, где $m_i \in M$, $k_i \in K$, возьмём $u = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - m_i) \in \mathcal{F}$. Тогда $uk = 0$.

Докажем включение $\supseteq$. Если $uk = 0$, $u \in \mathcal{F}$, $k \in K$, то $1 - u \in M$ и $k = (1 - u)k \in MK$.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что ядро канонического эпиморфизма $O^{\mathrm{gr}} \to O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F}$ совпадает с MO^{gr} по утверждению 1).

Докажем утверждение 3). Ядро гомоморфизма

$$\psi\colon \begin{cases} Q^{\mathrm{gr}} \to Q^{\mathrm{gr}}_P, \\ a \mapsto [(a,1)]_\sim \end{cases}$$

равно $PQ^{\mathrm{gr}} = MC_eQ^{\mathrm{gr}} = MQ^{\mathrm{gr}}$. Докажем сюръективность ψ. Пусть $ab^{-1} \in Q_P^{\mathrm{gr}}$, $a \in Q^{\mathrm{gr}}$, $b \in C_e \setminus P$. Найдём, пользуясь регулярностью кольца C_e, такой элемент $x \in C_e$, что $b = bxb$. Тогда $(bx)^2 = bx \in B_e$, причём $bx \notin P$, иначе $b = bxb \in P$. Значит, $bx(a-(ax)b) = 0$, поэтому $(ax, 1) \sim (a, b)$ и $\psi(ax) = ab^{-1}$.

Докажем утверждение 4). Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} m_iq_i = x \in H$, $m_i \in M$, $q_i \in Q^{\mathrm{gr}}$. Идеал $\sum\limits_{i=1}^{n} m_iC_e$ регулярного кольца C_e порождается идемпотентом, скажем $m \in B_e$. Тогда при всех $i = 1, \ldots, n$ имеем, что $m_i = mt_i$ для некоторых $t_i \in C_e$, $m_i = m^2t_i = mm_i$. Поэтому $x = mx \in MH$. Итак, $MQ^{\mathrm{gr}} \cap H \subseteq MH$. Обратное включение очевидно, если учесть включение $MH \subseteq H$ (так как $M \subseteq B_e \subseteq$ $\subseteq O^{\mathrm{gr}} \subseteq H$). Изоморфизм $\psi(H) \cong H/MH$ следует из доказанного равенства и первой теоремы об изоморфизме (для колец).

Первое равенство в 5) следует из утверждений 2)—4):

$$\operatorname{Ker}\varphi = MO^{\mathrm{gr}} = MQ^{\mathrm{gr}} \cap O^{\mathrm{gr}} = PQ^{\mathrm{gr}} \cap O^{\mathrm{gr}} = \operatorname{Ker}\psi \cap O^{\mathrm{gr}}.$$

Докажем второе равенство. Сначала докажем включение $\subseteq$. Если $\varphi(a) = 0$, то $\varphi(a_g) = 0$ для всех $g \in G$, так как гомоморфизм φ имеет степень e. Значит, для каждого $g \in G$ найдётся такой элемент $u_g \in \mathcal{F}$, что $u_ga = 0$. Тогда $1 - u_g \in M$, $a_g = (1-u_g)a_g$, следовательно, $E[a_g] = (1-u_g)E[a_g] \in M$.

Теперь докажем включение $\supseteq$. При каждом $g \in G$ последовательно получаем, что если $E[a_g] \in M$, то $a_g = E[a_g]a_g \in MO^{\mathrm{gr}} = \operatorname{Ker}\varphi$, следовательно, $\varphi(a_g) = 0$. Значит, $\varphi(a) = 0$.

Докажем утверждение 6). $\varphi(a) \in \varphi(T)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(a) = \varphi(t)$ для некоторого $t \in T$, что имеет место тогда и только тогда, когда $au = tu$ для некоторых $t \in T$, $u \in \mathcal{F}$. Это эквивалентно тому, что $au \in T$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$, так как по условию $Tu \subseteq T$, а если $au = t \in T$, то $au = au^2 = tu$.

Включение $\subseteq$ в утверждении 7) очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\varphi(a)\varphi(k) = \varphi(t)$, где $k \in K$, $t \in T$. Тогда $aku = tu$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$. Так как $ku \in K$ и $tu \in T$, то $ku \in (T:a)_K$, поэтому $\varphi(k) = \varphi(ku) \in$ $\in \varphi\big((T:a)_K\big)$. □

Замечание 4. Из предложения 13 следует, что если бы мы провели наши построения, начиная с кольца Q^{gr} (вместо кольца R), gr-полупервичного вместе с R, то получили бы $\varphi_M = \psi_{MC_e}$, поскольку $Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = O^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}$.

Свойства локализаций, которые требуют ортогональной полноты кольца Q^{gr}, вытекают из следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, кольцо Q^{gr} ортогонально полно. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Если L — ортогонально полное подмножество несингулярного C_e-модуля N. Тогда $\mathrm{r}_{C_e}(L) = \mathrm{r}_{C_e}(x)$ для некоторого $x \in L$.*
2. *Пусть M — максимальный идеал булева кольца B_e, $T \subseteq MQ^{\mathrm{gr}}$ — ортогонально полное подмножество. Тогда $uT = 0$ для некоторого $u \in B_e \setminus M$.*

Доказательство. Применяя [5, пункт 2 леммы 1], получаем первое утверждение. Покажем, как пункт 2) следует из пункта 1). Пусть $\mathrm{Ann}_{C_e}(T) = \mathrm{Ann}_{C_e}(x)$, где $x \in T$. Тогда так как $T \subseteq MQ^{\mathrm{gr}}$, то по утверждению 1) предложения 13 $ux = 0$ для некоторого $u \in B_e \setminus M$. Значит, $uT = 0$. □

В доказательстве каждого пункта следующей теоремы пункт 2 леммы 6 используется без ссылок. В неградуированном случае теорема была доказана в [5, теорема 1]. В следующем разделе мы покажем также, как некоторые пункты этой теоремы можно доказать с использованием хорновских формул.

Теорема 13. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, кольцо Q^{gr} ортогонально полно, H — градуированное подкольцо в Q^{gr}, содержащее O^{gr}. Тогда в предположениях и обозначениях предложения 13 верны следующие утверждения*:

1) *если L — gr-существенный ортогонально полный правый идеал кольца O^{gr}, то $\varphi(L)$ — gr-существенный правый идеал кольца $\varphi(O^{\mathrm{gr}})$;*
2) *если L — gr-плотный ортогонально полный правый идеал кольца O^{gr}, то $\varphi(L)$ — gr-плотный правый идеал кольца $\varphi(O^{\mathrm{gr}})$;*
3) *$\psi(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}_P$ — градуированное правое кольцо частных кольца $\psi(H)$;*
4) *$\psi(O^{\mathrm{gr}})$, $\psi(H)$, $\psi(Q^{\mathrm{gr}})$ — gr-первичные кольца;*
5) *$Z\big(\psi(H)\big) = \psi(Z(H))$, где $Z(A)$ — центр кольца A;*
6) *$C_e(Q^{\mathrm{gr}}_P) = (C_e)_P$;*
7) *$\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})$ — ортогонально полный идеал кольца O^{gr};*
8) *$\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}\big(\psi(O^{\mathrm{gr}})\big) = \psi\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\big)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $\varphi(a)\varphi(O^{\mathrm{gr}})\cap\varphi(L) = 0$, где $a \in h(O^{\mathrm{gr}})$. Тогда $\varphi(aO^{\mathrm{gr}}\cap L) \subseteq (\varphi(a)\varphi(O^{\mathrm{gr}})\cap\varphi(L) = 0$, поэтому $aO^{\mathrm{gr}}\cap L \subseteq MO^{\mathrm{gr}}$ и $u(aO^{\mathrm{gr}}\cap L) = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$ (так как $aO^{\mathrm{gr}}\cap L$ — ортогонально полное подмножество Q^{gr}). А поскольку $uaO^{\mathrm{gr}} \subseteq O^{\mathrm{gr}}$, то $(uaO^{\mathrm{gr}})\cap L = u(aO^{\mathrm{gr}}\cap L) = 0$ и $ua = 0$ в силу gr-существенности правого идеала L. Поэтому $\varphi(a) = 0$.

Докажем утверждение 2). Возьмём произвольные $a, d \in h(O^{\mathrm{gr}})$, такие что $\varphi(d)\big(\varphi(L) : \varphi(a)\big)_{O^{\mathrm{gr}}} = 0$, и докажем, что $\varphi(d) = 0$. Так как $\varphi\big((L : a)_{O^{\mathrm{gr}}}\big) \subseteq \big(\varphi(L) : \varphi(a)\big)_{O^{\mathrm{gr}}}$, то $\varphi\big((L : a)_{O^{\mathrm{gr}}}\big) = 0$, т. е. $d(L : a)_{O^{\mathrm{gr}}} \subseteq MO^{\mathrm{gr}}$, поэтому $ud(L : a) = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$. Так как правый градуированный идеал L плотный, получаем, что $ud = 0$, откуда следует, что $\varphi(d) = \varphi(ud) = 0$.

Для доказательства утверждения 3) достаточно показать, что Q^{gr}_P — градуированное правое кольцо частных кольца $\psi(O^{\mathrm{gr}})$. Так как ψ — однородный эпиморфизм, то надо доказать, что для любого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, такого что $\psi(q) \neq 0$, градуированный правый идеал $\big(\psi(O^{\mathrm{gr}}) : \psi(q)\big)_{\psi(O^{\mathrm{gr}})}$ является gr-плотным и $\psi(q)\big(\psi(O^{\mathrm{gr}}) : \psi(q)\big)_{\psi(O^{\mathrm{gr}})} \neq 0$. Действительно, $\big(\psi(O^{\mathrm{gr}}) : \psi(q)\big)_{\psi(O^{\mathrm{gr}})} \supseteq \psi\big((O^{\mathrm{gr}} : q)_{O^{\mathrm{gr}}}\big)$ — градуированный плотный правый идеал кольца $\psi(O^{\mathrm{gr}})$. Далее обозначим $L{:=}(O^{\mathrm{gr}} : q)_{O^{\mathrm{gr}}}$ и докажем, что $\psi(q)\psi(L) \neq 0$. Если $\psi(q)\psi(L) = 0$, то $uqL = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$. Так как градуированный правый идеал L плотный, то $uq = 0$ и $\psi(q) = \psi(uq) = 0$ — противоречие.

Докажем утверждение 4). Пусть $a,b\in h(O^{\mathrm{gr}})$ такие, что $aO^{\mathrm{gr}}\mathcal{F}b=0\mathcal{F}$, т. е. $\varphi(aO^{\mathrm{gr}}b)=0$. Тогда $uaO^{\mathrm{gr}}b=0$ для некоторого $u\in\mathcal{F}$. По лемме 4 $E[ua]E[b]=0$, откуда следует, что $ua\in M$ или $b\in M$. Соответственно $\varphi(ua)=\varphi(a)=0$ или $\varphi(b)=0$, т. е. $a\mathcal{F}=0$ или $b\mathcal{F}=0$. Значит, кольцо $\psi(O^{\mathrm{gr}})$ (изоморфное кольцу $\varphi(O^{\mathrm{gr}})$) gr-первично. Теперь из включений $\psi(O^{\mathrm{gr}})\subseteq\psi(H)\subseteq\psi(Q^{\mathrm{gr}})$ с учётом утверждения 3) следует gr-первичность колец $\psi(H)$ и $\psi(Q^{\mathrm{gr}})$.

Включение $\supseteq$ в утверждении 5) очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $h\in H$ и $\psi(h)\in Z\bigl(\psi(H)\bigr)$. Множество $T=\{hx-xh\mid x\in O^{\mathrm{gr}}\}$ является ортогонально полным подмножеством кольца Q^{gr}, причём $\psi(T)=0$, поэтому $uT=0$ для некоторого $u\in\mathcal{F}$. Значит, для всех $x\in O^{\mathrm{gr}}$ выполнено $(uh)x=x(uh)$, откуда следует, что $uh\in Z\bigl(Q(O^{\mathrm{gr}})\bigr)\subseteq Z(H)$ [4, лемма 3]) и $\psi(h)=\psi(uh)\in\psi(Z(H))$.

Докажем утверждение 6). Так как Q_P^{gr} — градуированное правое кольцо частных gr-первичного кольца O_P^{gr}, то Q_P^{gr} gr-первично. Поэтому gr-первично и кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(Q_P^{\mathrm{gr}})$. По утверждению 4 предложения 2 кольцо $K:=C_e(Q_P^{\mathrm{gr}})$ — поле.

Докажем, что $(C_e)_P\subseteq K$. Пусть $c\in C_e$. Тогда $cx=xc$ для всех $x\in Q^{\mathrm{gr}}$, значит, $\psi(c)\psi(x)=\psi(x)\psi(c)$ и $\psi(c)\in Z(Q_P^{\mathrm{gr}})$. Так как $\psi(c)\in(Q_P^{\mathrm{gr}})_e$, то по пункту 1 предложения 2 $\psi(c)\in K$.

Докажем обратное включение. Пусть $0\neq k\in K$. Так как $Q^{\mathrm{gr}}(Q_P^{\mathrm{gr}})=Q^{\mathrm{gr}}(O_P^{\mathrm{gr}})$, то $0\neq k\alpha\in O_P^{\mathrm{gr}}$ для некоторого $\alpha\in h(O_P^{\mathrm{gr}})$, т. е. существуют такие однородные элементы $a,b\in O^{\mathrm{gr}}$, что $k\psi(a)=\psi(b)\neq 0$. Так как $\deg k=e$ и $\deg\psi=e$, то $\deg a=\deg b$, поэтому множество $T:=\{axb-bxa\mid x\in O^{\mathrm{gr}}\}$ является градуированным. Поскольку $\psi(axb)=\psi(a)\psi(x)k\psi(a)=k\psi(a)\psi(x)\psi(a)=\psi(bxa)$, то $\psi(T)=0$ и $uT=0$ для некоторого $u\in\mathcal{F}$. Так как $\psi(a),\psi(b)\neq 0$, то по пункту 5) предложения 13 $E[a],E[b]\in\mathcal{F}$, поэтому $v:=E[ua]E[b]=uE[a]E[b]\in\mathcal{F}$. Тогда для элементов $a_1:=vua$ и $b_1:=vb$ имеем $E[a_1]=vE[ua]=v=E[b_1]$, $\psi(a_1)=\psi(a)$, $\psi(b_1)=\psi(b)$, $vT=0$ и $a_1xb_1=b_1xa_1$ для всех $x\in O^{\mathrm{gr}}$. По лемме 5 $b_1=\gamma a_1$, где γ — обратимый элемент кольца C^{gr}, причём так как элементы a_1 и b_1 одной степени (той же, что a и b), то $\gamma\in C_e$ и по доказанному $\psi(\gamma)\in K$. Значит, $k\psi(a)=\psi(b)=\psi(b_1)=\psi(\gamma)\psi(a_1)=\psi(\gamma)\psi(a)$ и $\bigl(k-\psi(\gamma)\bigr)\psi(a)=0$. Отсюда следует, что $\psi(\gamma)=k\in K$. Итак, $K=\psi(C_e)=(C_e)_P$.

Докажем утверждение 7). Зафиксируем $g\in G$ и возьмём $t=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp}t_\gamma u_\gamma\in O_g^{\mathrm{gr}}\bigl(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\bigr)$, $t_\gamma\in\mathrm{Sing}_g^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})$, $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — плотная ортогональная система в B_e. Чтобы доказать, что $t\in\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})$, найдём gr-существенный правый идеал L кольца O^{gr}, такой что $tL=0$. Положим $L:=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}u_\gamma\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(t_\gamma)$. Покажем, что $L\cap aO^{\mathrm{gr}}\neq 0$ для всех $0\neq a\in h(O^{\mathrm{gr}})$. Найдём такое $\alpha\in\Gamma$, что $u_\alpha a\neq 0$ (если для всех $\gamma\in\Gamma$ выполняется $u_\gamma a=0$, то $a=0$). Так как $t_\alpha\in\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})$, то $\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(t_\alpha)\cap u_\alpha aO^{\mathrm{gr}}\neq 0$. Тогда

$$aO^{\mathrm{gr}}\cap L\supseteq u_\alpha\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(t_\alpha)\cap aO^{\mathrm{gr}}=\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(t_\alpha)\cap u_\alpha aO^{\mathrm{gr}}\neq 0,$$

так как из $u_\alpha r \in aO^{\mathrm{gr}}$ следует, что $u_\alpha r = u_\alpha^2 r \in u_\alpha aO^{\mathrm{gr}}$. Итак, L — gr-существенный идеал кольца O^{gr}. Для всех $\gamma, \delta \in \Gamma$ справедливо равенство $(u_\gamma t_\gamma)\big(u_\delta \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(t_\delta)\big) = 0$, поэтому для всех $\delta \in \Gamma$ выполнено $t\big(u_\delta \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(t_\delta)\big) = 0$ и $tL = 0$, откуда следует, что $t \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})$.

Докажем утверждение 8). Множества в левой и правой частях являются градуированными, поэтому достаточно доказать, что

$$h\Big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}\big(\psi(O^{\mathrm{gr}})\big)\Big) = h\Big(\psi\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\big)\Big).$$

Докажем включение $\subseteq$. Пусть $a \in h\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\big)$. Тогда $\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)$ — gr-существенный ортогонально полный идеал в O^{gr} и по утверждениям 1) и 7) предложения 13 $\mathrm{r}_{\psi(O^{\mathrm{gr}})}\big(\psi(a)\big) = \psi\big(\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big)$ — gr-существенный правый идеал кольца $\psi(O^{\mathrm{gr}})$. Поэтому $\psi(a) \in h\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\big)$.

Докажем включение $\supseteq$. Возьмём произвольное $a \in h(O^{\mathrm{gr}})$, такое что $\psi(a) \in$ $\in \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}\big(\psi(O^{\mathrm{gr}})\big)$. Докажем, что множество

$$T = \{x \in h(O^{\mathrm{gr}}) \mid xO^{\mathrm{gr}} \cap \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a) = 0\}$$

ортогонально полное, или, что равносильно, ортогонально gr-полное (так как по условию кольцо Q^{gr} ортогонально полное). Пусть $g \in G$, $x_{\gamma\in\Gamma} \in T_g$, $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — плотная ортогональная система в B_e. Докажем, что $x := \sum\limits_\gamma^\perp x_\gamma u_\gamma \in T_g$. Предположим противное: пусть $0 \neq y \in h\big(xO^{\mathrm{gr}} \cap \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big)$. Тогда $y = \sum\limits_\gamma^\perp u_\gamma x_\gamma z$ для некоторого $z \in h(O^{\mathrm{gr}})$. Значит, $u_\varepsilon y = u_\varepsilon x_\varepsilon z \neq 0$ для некоторого $\varepsilon \in \Gamma$. Так как $u_\varepsilon y \in \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)$ и $x_\varepsilon z u_\varepsilon \in x_\varepsilon O^{\mathrm{gr}}$, то $u_\varepsilon y \in (x_\varepsilon O^{\mathrm{gr}}) \cap \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)$, что противоречит принадлежности $x_\varepsilon \in T$ и неравенству $u_\varepsilon y \neq 0$. Итак, множество T ортогонально полно.

Докажем, что $\psi(T) = 0$. Возьмём произвольное $b \in h(T)$ и докажем, что $\psi(bO^{\mathrm{gr}}) \cap \psi\big(\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big) = 0$. Пусть $t \in h(O^{\mathrm{gr}})$, $z = bt$ и $\psi(z) \in \psi(bO^{\mathrm{gr}}) \cap \psi\big(\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big)$. Тогда для некоторого $p \in h\big(\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big)$ справедливо $z - p \in MQ^{\mathrm{gr}}$ и для некоторого $u \in B_e \setminus M$ выполнено $u(z - bt) = 0 = u(z - p)$. Значит, $btu = pu \in (bO^{\mathrm{gr}}) \cap$ $\cap\, \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a) = 0$. Поэтому $pu = 0 = zu$, $\psi(z) = \psi(zu) = 0$.

Теперь, поскольку правый идеал $\psi\big(\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big) = \mathrm{r}_{\psi(O^{\mathrm{gr}})}\big(\psi(a)\big)$ gr-существенный, заключаем, что $\psi(b) = 0$. Итак, $\psi(T) = 0$, так что $vT = 0$ для некоторого $v \in B_e \setminus M$. Покажем, что градуированный правый идеал $\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(va)$ gr-существенный, т. е. если для $s \in h(O^{\mathrm{gr}})$ справедливо $(sO^{\mathrm{gr}}) \cap \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(va) = 0$, то $s = 0$. Действительно, тогда $(sO^{\mathrm{gr}}) \cap \mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(a) = 0$ и $s \in T$, $vs = 0$, $s = (1 - v)s \in$ $\in (1 - v)O^{\mathrm{gr}}$. Так как $(sO^{\mathrm{gr}}) \cap \big((1 - v)O^{\mathrm{gr}}\big) = 0$, то $s = 0$.

Итак, $\mathrm{r}_{O^{\mathrm{gr}}}(va)$ — gr-существенный правый идеал кольца O^{gr}, поэтому $va \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})$. Тогда $\psi(a) = \psi(va) \in \psi\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\big)$. Включение $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}\big(\psi(O^{\mathrm{gr}})\big) \subseteq h\Big(\psi\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\big)\Big)$ доказано. □

7. Градуированные кольца как алгебраические системы

Градуированное по группе G кольцо будем рассматривать как алгебраическую систему с сигнатурой кольца, дополненной операциями взятия однородных компонент любой степени $g \in G$ и предикатами «быть однородным элементом» и «быть однородным элементом степени g», $g \in G$. Введём указанные операции и предикаты и докажем их допустимость относительно булева кольца B_e (в смысле [6, определения 2.6 и 5.1]).

Лемма 7. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ ортогонально полно, A — ортогонально полное градуированное кольцо частных кольца R (например, $A = Q^{\mathrm{gr}}$ или $A = O^{\mathrm{gr}}$). Верны следующие утверждения.*

1. *Унарная операция*

$$(\cdot)_g\colon \bigsqcup_{u \in B_e^*} uA \to \bigsqcup_{u \in B_e^*} uA, \quad x \mapsto x_g$$

является B_e-допустимой для любого $g \in G$.

2. *Одноместный булев предикат*

$$H_g\colon \bigsqcup_{u \in B_e^*} uA \to B_e^*, \quad uA \ni x \mapsto \sup\{v \in B_e \mid v \leqslant u,\ vx = vx_g\}$$

является B_e-допустимым для любого $g \in G$.

3. *Одноместный булев предикат*

$$H\colon \bigsqcup_{u \in B_e^*} uA \to B_e^*, \quad uA \ni x \mapsto \sup\{v \in B_e \mid v \leqslant u,\ vx \in h(A)\}$$

является B_e-допустимым.

4. *Одноместный предикат*

$$\mathcal{H}_g\colon \bigsqcup_{u \in B_e^*} uA \to \mathbb{Z}_2, \quad \mathcal{H}_g(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A_g$$

является B_e-допустимым для любого $g \in G$, причём $\mathcal{H}_g^{B_e} = H_g$ для любого $g \in G$.

5. *Одноместный предикат*

$$\mathcal{H}\colon \bigsqcup_{u \in B_e^*} uA \to \mathbb{Z}_2, \quad \mathcal{H}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in h(A)$$

является B_e-допустимым, причём $\mathcal{H}^{B_e} = H$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Если $u \in B_e^*$, $x \in uA$, $g \in G$, то $x = ux$ и $(ux)_g = ux_g \in uA$.

Докажем утверждение 2. Обозначим $T := \{v \in B_e \mid v \leqslant u,\ vx = vx_g\}$, $s := \sup T = H_g(x)$. Сразу отметим, что $s \in T$. Действительно, если $T = \{0\}$, то

$s = 0$, иначе к множеству T применима лемма 1: $s = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} v_\gamma$, где $\{v_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — максимальное ортогональное подмножество в T. Ясно, что $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} v_\gamma \leqslant u$ и

$$\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} v_\gamma\right)(x - x_g) = \sum_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} v_\gamma y_\gamma = 0,$$

где $y_\gamma = x - x_g$ для всех $\gamma \in \Gamma$, поэтому $s \in T$.

Пусть $w \leqslant u$. Надо доказать, что $H_g(wx) = wH_g(x)$.

Так как по доказанному $H_g(x)x = H_g(x)x_g$, то $(wH_g(x)) \cdot (wx) = (wH_g(x)) \cdot (wx)_g$, поэтому $wH_g(x) \leqslant H_g(wx)$.

Чтобы доказать обратное неравенство, возьмём произвольное $v \leqslant w$ с условием $v(wx) = v(wx_g)$ (равносильным условию $vx = vx_g$ ввиду $vw = v$) и покажем, что $v \leqslant wH_g(x)$. Так как $vx = vx_g$, то $v \leqslant H_g(x)$, поэтому $vH_g(x) = v$. Но $v \leqslant w$, так что $vwH_g(x) = v$ или $v \leqslant wH_g(x)$.

Третье утверждение доказывается аналогично второму.

Докажем утверждение 4. Для каждого $x \in A$ положим $\mathcal{U}(x) := H_g(x)$. Тогда для всех $u \in B_e^*$ и всех $x \in A$ имеем $\mathcal{H}_g^{B_e}(ux) = uH_g(x) = H_g(ux)$ в силу B_e-допустимости булева предиката H_g (утверждение 2).

Пятое утверждение доказывается аналогично четвёртому. □

Замечание 5. Далее вместо $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_g$ будем использовать привычные обозначения $(\cdot) \in h(A^{\mathrm{gr}})$ и $(\cdot) \in A_g^{\mathrm{gr}}$.

Теорема 14. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, кольцо $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ ортогонально полно, A — ортогонально полное градуированное кольцо частных кольца R (например, $A = Q^{\mathrm{gr}}$ или $A = O^{\mathrm{gr}}$), $\mathcal{K}$ — множество всех ортогонально полных подмножеств в A, $(\cdot) \in K$ — предикат принадлежности множеству K. Верны следующие утверждения.*

1. *A_g — ортогонально полная над B_e алгебраическая система сигнатуры*

$$\langle +,\, 0,\, -(\cdot),\, a\cdot(\cdot),\, =,\, (\cdot) \in K \mid a \in A_e,\ K \in \mathcal{K}\rangle$$

   при всех $g \in G$. В частности, A_e — ортогонально полное над B_e кольцо.

2. *Если кольцо Q^{gr} ортогонально полно, то A — ортогонально полная над B_e алгебраическая система сигнатуры*

$$\Omega = \langle +,\, 0,\, -(\cdot),\, \cdot,\, (\cdot)_g,\, =,\, (\cdot) \in K,\, (\cdot) \in A_g,\, (\cdot) \in h(A) \mid K \in \mathcal{K},\ g \in G\rangle.$$

Доказательство. Оба утверждения следуют из [6, пункты 2.16 и 5.4, теорема 8.9] и следствия 7. □

Напомним определения устойчивой, наследственной и хорновской формулы.

Определение 7 [6]. Пусть A — ортогонально полная над B алгебраическая система сигнатуры Ω. Формула $\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_n)$ первого порядка сигнатуры Ω, где $x_1, \ldots, x_n$ — свободные переменные в записи $\mathcal{A}$, называется

— наследственной, если для всех таких $u, v \in B^*$, что $v \leqslant u$, из равенства $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ в uA следует равенство $\mathcal{A}(va_1, \ldots, va_n)$ в vA;
— устойчивой, если для всех $u \in B^*$ и $a_1, \ldots, a_n \in uA$ таких, что $\mathcal{A}(a_1, \ldots, a_n) = 1$, существуют такие элементы $b_1, \ldots, b_n \in A$, что $a_i = ub_i$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\mathcal{A}(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Определение 8.

1. Формула сигнатуры Ω называется хорновской, если она эквивалентна формуле вида
$$(Q_1 x_1) \ldots (Q_m x_m) \mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n,$$
где Q_i — кванторы $\forall$, $\exists$, а каждая формула $\mathcal{A}_j$ имеет один из следующих видов:
   1) $\mathcal{B}_0$,
   2) $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_0$,
   3) $\bigvee\limits_{i=1}^{k} (\neg \mathcal{B}_i)$,

   где $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ — атомарные формулы сигнатуры Ω.
2. Предикат, заданный на алгебраической системе хорновской формулой, называется хорновским.

Лемма 8. *Пусть $\mathcal{B}$ — атомарная формула, $\mathcal{A}$ — бескванторная хорновская формула сигнатуры Ω. Тогда формулы $(\forall x)(\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ и $(\exists x)(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$ являются хорновскими сигнатуры Ω.*

Доказательство. Ясно, что формула $(\exists x)(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A})$ хорновская. Докажем, что формула $(\forall x)(\mathcal{B} \to \mathcal{A})$ хорновская. Она равносильна формуле $(\forall x) \bigwedge\limits_{i=1}^{n} (\mathcal{B} \to \mathcal{A}_i)$, поэтому можно считать, что сама формула $\mathcal{A}$ имеет вид 1), 2) или 3) из определения 8. Если формула $\mathcal{A}$ имеет вид 1), то формула $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ имеет вид 2). Если формула $\mathcal{A}$ имеет вид 2), то формула $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ имеет такой же вид, так как $\big(A \to (B \to C)\big) \leftrightarrow \big((A \wedge B) \to C\big)$. Наконец, если формула $\mathcal{A}$ имеет вид 3), то формула $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ имеет такой же вид, так как $(A \to \neg B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$. $\square$

Следствие 7. *Пусть сигнатура Ω содержит предикат принадлежности множеству M. Для удобства записи и восприятия логических формул будем использовать ограниченные кванторы*:
$$(\forall x \in M) P \iff (\forall x)\big((x \in M) \to P\big); \quad (\exists x \in M) P \iff (\exists x)\big((x \in M) \wedge P\big).$$
Тогда предикат вида
$$(Q_1 x_1)' \ldots (Q_m x_m)' \mathcal{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}_n,$$
где каждая кванторная приставка $(Q_i x_i)'$ обозначает навешивание или неограниченного квантора $(Q_i x_i)$ или ограниченного $(Q_i x_i \in M)$, а все формулы $\mathcal{A}_j$ такие же, как и в определении 8, является хорновским.

Если $\mathcal{A}(x_1)$ — формула первого порядка сигнатуры Ω, $u \in B\backslash\{0\}$, то положим

$$M_{\mathcal{A}}(uA) = \{a \in uA \mid \mathcal{A}(a) = 1\}.$$

Теорема 15 [6, теорема 6.10]. *Пусть B — ортогонально полное булево кольцо, $\mathcal{F}$ — ультрафильтр в B, A — ортогонально полная над B алгебраическая система сигнатуры Ω, $\mathcal{A}(P_1, \ldots, P_m; x_1)$ — формула первого порядка сигнатуры Ω, где $P_1, \ldots, P_m$ — предикатные символы, x_1 — свободная переменная в записи $\mathcal{A}$. Тогда*

1) *если $\mathcal{A}$ — наследственная формула, а $\neg\mathcal{A}$ — хорновская формула, то $M_{\mathcal{A}}(A)\mathcal{F} \subseteq M_{\mathcal{A}}(A\mathcal{F})$;*
2) *если $\mathcal{A}$ — устойчивая хорновская формула, то $M_{\mathcal{A}}(A)\mathcal{F} \supseteq M_{\mathcal{A}}(A\mathcal{F})$;*
3) *если $\mathcal{A}$ — устойчивая наследственная хорновская формула, а $\neg\mathcal{A}$ — хорновская формула, то $M_{\mathcal{A}}(A)\mathcal{F} = M_{\mathcal{A}}(A\mathcal{F})$.*

Пример 6. Покажем, как с использованием хорновских формул доказать утверждения 1) и 2) теоремы 13.

Пусть L — gr-существенный (gr-плотный) ортогонально полный правый идеал ортогонально полного кольца O^{gr}.

Рассмотрим хорновские формулы

$$\Phi_D = \big(\forall\, x \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big(\exists\, y \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)[(x = 0) \vee (xy \neq 0)] \wedge (xy \in D),$$
$$\Psi_D = \big(\forall\, x, y \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big(\exists\, z \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)[(x = 0) \vee (xz \neq 0)] \wedge (yz \in D).$$

Нетрудно убедиться, что их отрицания

$$\neg\Phi_D = \big(\exists\, x \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big(\forall\, y \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)[(x \neq 0) \vee (xy \notin D)] \wedge [(xy = 0) \vee (xy \notin D)],$$
$$\neg\Psi_D = \big(\exists\, x, y \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big(\forall\, z \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)[(x \neq 0) \vee (yz \notin D)] \wedge [(xz = 0) \vee (yz \notin D)]$$

тоже хорновские формулы.

Ясно, что для любого градуированного правого идеала D произвольного градуированного кольца A

$$A \vDash \Phi_D\ (\Psi_D) \iff D \text{ — gr-существен (gr-плотен) в } A.$$

Поскольку формулы Φ_D и Ψ_D, очевидно, наследственные, то по пункту 1) теоремы 15 справедливо включение $M_{\Phi_L}(O^{\mathrm{gr}})\mathcal{F} \subseteq M_{\Phi_L}(O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F})$ ($M_{\Psi_L}(O^{\mathrm{gr}})\mathcal{F} \subseteq$ $\subseteq M_{\Psi_L}(O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F})$). Значит, $\varphi(L)$ — gr-существенный (gr-плотный) правый идеал кольца $\varphi(O^{\mathrm{gr}})$.

Пример 7. Покажем, как доказать утверждение 8) теоремы 13

$$\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}\big(\varphi(O^{\mathrm{gr}})\big) = \varphi\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\big),$$

используя хорновские формулы.

Рассмотрим хорновскую формулу

$$\Psi(x) = \big(\forall\, y \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big(\exists\, z \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big[\big((y = 0) \vee (yz \neq 0)\big) \wedge (xyz = 0)\big].$$

Её отрицание

$$\neg\Psi(x) = \big(\exists\, y \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big(\forall\, z \in h(O^{\mathrm{gr}})\big)\big[\big((y \neq 0) \vee (xyz \neq 0)\big) \wedge \big((yz = 0) \vee (xyz \neq 0)\big)\big]$$

тоже хорновская формула.

Покажем, что в любом градуированном кольце A для любого $a \in A$ $A \vDash \Psi(a)$ тогда и только тогда, когда $a \in \operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(A)$.

Для доказательства импликации $\Longleftarrow$ предположим, что $aI = 0$, где I — gr-существенный правый идеал в A. Элемент a далее можно считать однородным (так как для всех $g, h \in G$ имеем $aI_g = 0$, $a_h I_g = 0$ и $a_h I = 0$). По определению gr-существенности получаем, что для всякого $y \in h(A) \setminus \{0\}$ существует такой $z \in h(A)$, что $0 \neq yz \in I$. Отсюда следует, что $A \vDash \Psi(a)$. Обратно, если $A \vDash \Psi(a)$, то элемент a можно считать однородным. Каждому $y \in h(A) \setminus \{0\}$ поставим в соответствие такой элемент $z(y) \in h(A)$, что $yz(y) \neq 0$ и $xyz(y) = 0$, и рассмотрим множество $M := \{yz(y) \mid y \neq 0\}$. Правый идеал MR gr-существен и $aM = 0$, поэтому $a \in \operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(A)$.

Непосредственно проверяется, что $\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(uO^{\mathrm{gr}}) = u \operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})$ для любого $u \in B_e^*$, поэтому формула Ψ наследственна и устойчива. Значит, по утверждению 3) теоремы 15 справедливо равенство $M_\Psi(O^{\mathrm{gr}})\mathcal{F} = M_\Psi(O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F})$, означающее в точности, что $\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}\bigl(\varphi(O^{\mathrm{gr}})\bigr) = \varphi\bigl(\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\bigr)$.

Отметим, что в неградуированном случае примеры 6 и 7 разобраны в [3, следствие 3.2.13, лемма 3.2.14].

Докажем, что градуированный радикал Джекобсона $\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ (пересечение всех максимальных градуированных правых идеалов градуированного кольца R) также согласован с локализациями.

Предложение 14. *Пусть R — градуированное по группе G кольцо. Тогда*

$$h\bigl(\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) = \bigcup_{g \in G} \{r \in R_g \mid \text{для каждого } s \in R_{g^{-1}} \text{ найдётся } t \in R, \text{ такой что } (1 - rs)t = 1\}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех максимальных градуированных идеалов кольца R. Ясно, что для всех $r \in h(R)$ и всех $M \in \mathcal{M}$ верна равносильность

$$r \in M \iff 1 \notin M + rR.$$

Поэтому для всех $g \in G$ и $r \in R_g$ имеем

$$r \in h\bigl(\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) \iff 1 \notin M + rR \text{ для любого } M \in \mathcal{M} \iff \\ \iff \text{для любых } M \in \mathcal{M} \text{ и } s \in R \ 1 - rs \notin M. \quad (*)$$

Так как M — градуированный правый идеал в R, то условие $1 - rs \notin M$ равносильно условию $(1 - rs)_h \notin M$ для некоторого $h \in G$. Поэтому цепь равносильностей $(*)$ продолжается следующим образом:

$$\text{для любых } M \in \mathcal{M} \text{ и } s \in R_{g^{-1}} \ 1 - rs \notin M. \quad (**)$$

Действительно, импликация $(*) \implies (**)$ очевидна. Обратно, взяв $M \in \mathcal{M}$ и $s = s_{g_1} + \ldots + s_{g_n} + s_{g^{-1}} \in R$, получаем, что $(1 - rs)_e = 1 - rs_{g^{-1}} \notin M$. Остаётся заметить, что условие $(**)$ равносильно тому, что элемент $1 - rs$ обратим справа для всех $s \in R_{g^{-1}}$. □

Предложение 15. *В предположениях и обозначениях теоремы* 13 *имеем*

$$\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}\bigl(\varphi(O^{\mathrm{gr}})\bigr) = \varphi\bigl(\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\bigr).$$

Доказательство. Рассмотрим хорновскую формулу

$$\Phi(r) = \bigl(\forall\, x \in h(O^{\mathrm{gr}})\bigr)\bigl(\exists\, y \in h(O^{\mathrm{gr}})\bigr) \bigl(r \in h(O^{\mathrm{gr}})\bigr) \wedge \bigl[\bigl(1 - rx \notin h(O^{\mathrm{gr}})\bigr) \vee ((1 - rx)y = 1)\bigr].$$

Её отрицание

$$\neg\Phi(r) = \bigl(\exists\, x \in h(O^{\mathrm{gr}})\bigr)\bigl(\forall y \in h(O^{\mathrm{gr}})\bigr) \bigl[\bigl(r \notin h(O^{\mathrm{gr}})\bigr) \vee \bigl(1 - rx \in h(O^{\mathrm{gr}})\bigr)\bigr] \wedge \bigl[\bigl(r \in h(O^{\mathrm{gr}})\bigr) \vee \bigl((1 - rx)y \neq 1\bigr)\bigr]$$

тоже хорновская формула.

Из предложения 14 следует, что для любого градуированного кольца A $A \vDash \Phi(r)$ тогда и только тогда, когда $r \in h\bigl(\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(A)\bigr)$. Из предложения 14 также следует, что $u \operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}}) = \operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(uO^{\mathrm{gr}})$ для любого $u \in B_e^*$. Значит, формула $\Phi(r)$ наследственная и устойчивая. Поэтому по утверждению 3) теоремы 15 справедливо равенство $M_\Phi(O^{\mathrm{gr}})\mathcal{F} = M_\Phi(O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F})$, означающее в точности, что $h\Bigl(\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}\bigl(\varphi(O^{\mathrm{gr}})\bigr)\Bigr) = \varphi\Bigl(h\bigl(\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(O^{\mathrm{gr}})\bigr)\Bigr)$. Это равносильно доказываемому утверждению. □

Литература

[1] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — М.: Факториал, 2003.

[2] Балаба И. Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец // Тр. междунар. сем. «Универсальная алгебра и приложения». — Волгоград, 2000. — С. 21—28.

[3] Балаба И. Н., Канунников А. Л., Михалёв А. В. Кольца частных градуированных ассоциативных колец. I // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 2. — С. 3—74.

[4] Бейдар К. И. Кольца с обобщёнными тождествами. I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1977. — № 2. — С. 19—36.

[5] Бейдар К. И. Кольца частных полупервичных колец // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1978. — № 5. — С. 36—43.

[6] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 6. — С. 79—115.

[7] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Функтор ортогонального пополнения // Абелевы группы и модули. — 1986. — Вып. 4. — С. 3—19.

[8] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 3. — С. 46—50.

[9] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2013.

[10] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Факториал, 2005.

[11] Михалёв А. В. Ортогонально полные многосортные системы // ДАН СССР. — 1986. — Т. 289, № 6. — С. 1304—1308.

[12] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[13] Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — Marcel Dekker, 1995.

[14] Chuang C.-L. Boolean valued models and semiprime rings // Proc. Int. Conf. of Algebra in Memory of Prof. K. I. Beidar. — 2005. — P. 23—53.

[15] Nastasesku C., Van Oystayen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 2004.