Новые свойства многообразия алгебр Ли $\mathrm{N}_2\mathrm{A}$

С. П. МИЩЕНКО
Ульяновский государственный университет
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Ю. Р. ФЯТХУТДИНОВА
Ульяновский государственный университет
e-mail: fyathut28@rambler.ru

УДК 512.5

Ключевые слова: многообразие алгебр Ли, почти полиномиальный рост.

Аннотация

В случае нулевой характеристики основного поля многообразие алгебр Ли, определённое тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0$, имеет почти полиномиальный рост. В работе мы продолжаем исследование этого многообразия, в частности, строим базисы полилинейных частей, предъявляем формулы для его кодлин и коразмерностей.

Abstract

S. P. Mishchenko, Y. R. Fyathutdinova, New properties of the Lie algebra variety $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 165—173.

We continue to consider the properties of the almost polynomial growth variety of Lie algebras over a field of characteristic zero defined by the identity $(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0$. Here we have constructed the bases of its multilinear parts and proved the formulas for the colength and codimension sequences of this variety.

На протяжении всей статьи характеристика основного поля равна нулю. Произведение в алгебрах Ли будем обозначать простым приписыванием сомножителей без использования коммутаторных скобок. В случае левонормированного произведения договоримся опускать скобки, т. е. $abc = (ab)c$. Напомним, что любое произведение элементов в алгебре Ли равно линейной комбинации произведений с левонормированной расстановкой скобок. Фраза «правило дифференцирования» будет означать использование тождественного соотношения $xyz \equiv xzy + x(yz)$, т. е. использование того факта, что умножение справа является так называемым внутренним дифференцированием алгебры Ли. Не определяемые нами понятия можно найти в [1, 5].

Напомним, что многообразие алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0 \tag{1}$$

и состоит из алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом. Многообразие $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ было достаточно подробно исследовано в работе [3]

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 7, с. 165—173.
© 2011/2012 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

одного из соавторов более 25 лет назад. В частности, была установлена почти полиномиальность роста этого многообразия, найдены формулы для кратностей вхождения неприводимых модулей в разложение полилинейной части, рассматриваемой как модуль симметрической группы. Описаны на «языке тождеств» подмногообразия с дистрибутивной решёткой подмногообразий. Целью данной работы является установление новых свойств этого многообразия: построение базисов полилинейных частей, нахождение явных формул для коразмерностей и кодлины.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Ли, а $F(X,\mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра этого многообразия со счётным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Множество всех полилинейных элементов от $x_1, \ldots, x_n$ в алгебре $F(X,\mathbf{V})$ обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ и определим на нём естественным способом структуру модуля симметрической группы S_n. Результат действия перестановки $p \in \mathrm{S}_n$ на полилинейном левонормированном мономе $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} \in P_n(\mathbf{V})$ равен $x_{p(i_1)}x_{p(i_2)}\ldots x_{p(i_n)}$. Ещё в середине прошлого века в [2] было показано, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств. Таким образом, вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в пространствах $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, так называемых *полилинейных частях* многообразия. Поэтому исследование структуры S_n-модуля $P_n(\mathbf{V})$ играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$. Модуль $P_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым. Рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ, где $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi\big(P_n(\mathbf{V})\big) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \tag{2}$$

Обозначим $c_n(\mathbf{V})$ размерность пространства $P_n(\mathbf{V})$. По сложившейся традиции последовательность чисел $c_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, называют *последовательностью коразмерностей* вербального идеала многообразия или просто последовательностью коразмерностей многообразия. Эта последовательность является одной из основных числовых характеристик многообразия. Важными числовыми характеристиками являются также *кратности* и *последовательность кодлин* $l_n(\mathbf{V}) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. последовательность длин модулей $P_n(\mathbf{V})$. Обозначим через d_λ размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля, т. е. $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$. Понятно, что имеет место равенство

$$c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda.$$

Асимптотическое поведение размерности пространства $P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Напомним, что рост многообразия называется *полиномиальным*, если существуют такие числа C, k, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^k$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет *почти полиномиальный рост*, если рост само́го многообразия не является полиномиальным, но рост любого собственного подмногообразия является полиномиальным.

В классе алгебр Ли существует ровно четыре разрешимых многообразий почти полиномиального роста и найдено одно неразрешимое многообразие почти полиномиального роста (см. по этому поводу обзор [4]).

Договоримся использовать в качестве свободных образующих не только x с индексом, но и другие латинские буквы, например y, z или t. Будем использовать заглавные буквы для обозначения внутренних дифференцирований. Например, внутреннее дифференцирование $\operatorname{ad} y$, определённое образующей y, будем обозначать Y, т. е. $xY = xy$. Это обозначение удобно, например, в таком случае: левонормированное произведение $xy\dots y$ степени $m+1$ можно записать так xY^m, где Y^m — степень линейного оператора. Кроме того, будем использовать специальный символ над образующими (звезду, черту или волну) для обозначения кососимметризации. Например,

$$x_0\bar{X}_1\tilde{Y}_1\bar{X}_2\tilde{Y}_2\tilde{Y}_3\bar{X}_3\bar{X}_4 = \sum_{p\in \mathrm{S}_4,\, q\in \mathrm{S}_3} (-1)^p(-1)^q x_0x_{p(1)}y_{q(1)}x_{p(2)}y_{q(2)}y_{q(3)}x_{p(3)}x_{p(4)},$$

где $(-1)^r$ — чётность перестановки r. В этом случае будем говорить, что элемент содержит два кососимметрических набора: x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3. Если же образующие в наборах совпадают, то будем говорить об альтернированных наборах образующих, так как в этом случае обычное свойство кососимметризации нарушается. Например, элемент

$$x_0\bar{X}_1\tilde{X}_1\bar{X}_2\tilde{X}_2\tilde{X}_3\bar{X}_3\bar{X}_4 = \sum_{p\in \mathrm{S}_4,\, q\in \mathrm{S}_3} (-1)^p(-1)^q x_0x_{p(1)}x_{q(1)}x_{p(2)}x_{q(2)}x_{q(3)}x_{p(3)}x_{p(4)}$$

содержит два альтернированных набора образующих, x_1, x_2, x_3, x_4 и x_1, x_2, x_3, и он не изменится, если поменять местами образующие x_1 и x_2. В случае кососимметричного набора отметим равенство

$$x_0\dots\bar{X}_1\dots\bar{X}_2\dots\bar{X}_m = (-1)^p x_0\dots\bar{X}_{p(1)}\dots\bar{X}_{p(2)}\dots\bar{X}_{p(m)}.$$

Приведём ещё несколько примеров. Элемент, равный сумме

$$\sum_{p\in \mathrm{S}_2}\sum_{q\in \mathrm{S}_2}(-1)^p(-1)^q\big(x_3x_{p(1)}x_{q(1)}\big)\big(x_4x_{p(2)}x_{q(2)}\big),$$

будем записывать $(x_3x_1^*\bar{x}_1)(x_4x_2^*\bar{x}_2)$ или даже $(x_3\bar{X}_1{}^2)(x_4\bar{X}_2{}^2)$. Используя тождество антикоммутативности и тождество Якоби, которые определяют алгебру Ли, легко получить тождества

$$\begin{gathered} x_1^*x_2^*f \equiv 2x_1x_2f, \quad x_1^*x_2^*x_3^*f \equiv 0,\\ x_1^*x_2^*x_3f \equiv 2x_1^*x_3x_2^*f, \quad 2wx_1^*x_2^*f \equiv w(x_1^*x_2^*)f, \end{gathered} \tag{3}$$

где w — любой элемент алгебры, а f — произвольный ассоциативный полином от внутренних дифференцирований. Ещё раз отметим, что применение нечётной перестановки к переменным, помеченным специальным символом, влечёт изменение знака. Например,

$$x_4x_1^*x_2^*x_3^* = -x_4x_2^*x_1^*x_3^* = x_4x_3^*x_1^*x_2^*.$$

Фраза «проальтернируем тождество по паре образующих», например по x и y, означает получение из тождества $f(x,y,\ldots)\equiv 0$ следствия $f(x,y,\ldots)-f(y,x,\ldots)\equiv 0$. Отметим, что при этом степень тождества по этим образующим должна равняться единице.

Перейдём к изложению результатов о свойствах многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. Те результаты, которые были доказаны в работе [3], будут приведены в современной формулировке, но без доказательства. Выпишем некоторые тождественные соотношения, которые выполняются в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. Используя тождества (3) и правило дифференцирования, элемент, содержащий пару альтернированных образующих, можно переписать так:

$$wx_1^*Y_1\ldots Y_mx_2^* = \frac{1}{2}w(x_1^*x_2^*)Y_1\ldots Y_m - \sum_{i=2}^{m} wx_1^*Y_1\ldots Y_{i-1}(x_2^*Y_i)Y_{i+1}\ldots Y_m.$$

Это соображение позволяет получить следующие тождественные соотношения многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$:

$$\big(xyx_{p(1)}\ldots x_{p(k)}\big)\big(zty_{q(1)}\ldots y_{q(m)}\big)\equiv(xyx_1\ldots x_k)(zty_1\ldots y_m), \qquad (4)$$

где $p\in \mathrm{S}_k$, $q\in \mathrm{S}_m$.

Сформулируем полученный в [3] результат о кратностях многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ в виде отдельной теоремы. Для этого определим две числовые величины, которые зависят от целых неотрицательных аргументов:

$$m(p,q)=\begin{cases}\left[\dfrac{q}{2}\right]+1, & \text{если } p \text{ или } q \text{ — нечётное число;}\\ \dfrac{q}{2}, & \text{если оба параметра чётные;}\end{cases}$$

$$n(p,q)=\begin{cases}\left[\dfrac{q+1}{2}\right] & \text{при } p{=}0;\\ q+1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Квадратные скобки означают целую часть числа.

Теорема 1. *В разложении* (2) *характера полилинейной части* $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, $n\geqslant 6$, *для кратностей выполняются следующие равенства*:

$$m_\lambda=\begin{cases} m(p,q), & \text{если } \lambda=(p+q+1,p+1,1,1),\ n=2p+q+4;\\ m(p,q), & \text{если } \lambda=(p+q+2,p+2,2),\ n=2p+q+6;\\ m(p,q), & \text{если } \lambda=(p+q,p), p\geqslant 2,\ n=2p+q;\\ n(p,q), & \text{если } \lambda=(p+q+1,p+1,1),\ n=2p+q+3;\\ 1, & \text{если } \lambda=(n-1,1);\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Следует пояснить, что тождество (1) имеет шестую степень, поэтому модуль $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ при $n\leqslant 5$ совпадает с соответствующим модулем многообразия всех алгебр Ли и его строение хорошо известно. А именно,

$$\chi_1(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \chi_{(1)}, \quad \chi_2(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \chi_{(1,1)},$$
$$\chi_3(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \chi_{(2,1)}, \quad \chi_4(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \chi_{(3,1)} + \chi_{(2,1,1)},$$
$$\chi_5(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \chi_{(4,1)} + \chi_{(3,2)} + \chi_{(3,1,1)} + \chi_{(2,2,1)} + \chi_{(2,1,1,1)}.$$

Выпишем приведённые в [3] элементы относительно свободной алгебры многообразия, линеаризации которых порождают различные неприводимые S_n-модули, которые входят прямыми слагаемыми в разложение модуля $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$.

Для разбиения $\lambda = (p+q+1, p+1, 1, 1)$, $p+q > 0$, элементы имеют вид

$$a_{p,q}(r) = (x_1^* x_2^* \bar{X}_1^p X_1^r)(x_3^* x_4^* \bar{X}_2^p X_1^{q-r}),$$

где $r = 0, 1, \ldots, [q/2]$. Этого оказывается достаточно, так как «фрагменты» $(x_1^* x_2^*)$ и $(x_3^* x_4^*)$ фактически входят симметричным образом. Для разбиения $\lambda = (p+q+2, p+2, 2)$, $p+q > 0$, элементы имеют вид

$$b_{p,q}(r) = (x_1^* x_2^* \tilde{x}_1 \bar{X}_1^p X_1^r)(\tilde{x}_2 \tilde{x}_3 x_3^* \bar{X}_2^p X_1^{q-r}),$$

где $r = 0, 1, \ldots, [q/2]$. Поясним, что такого изменения параметра оказывается достаточным, так как «фрагменты» $(x_1^* x_2^* \tilde{x}_1)$ и $(\tilde{x}_2 \tilde{x}_3 x_3^*)$ фактически входят симметричным образом. Для разбиения $\lambda = (p+q+1, p+1, 1)$ при $p > 0$ элементы имеют вид

$$c_{p,q}(r) = (x_1^* x_2^* \bar{X}_1^p X_1^r)(x_3^* \bar{X}_2^p X_1^{q-r}),$$

где $r = 0, 1, \ldots, q$. Если же $p = 0$, $q > 0$, то

$$c_{0,q}(r) = (x_2^* X_1^r)(x_3^* X_1^{q+1-r}),$$

где $r = 1, 2, \ldots, [(q+1)/2]$. Для разбиения $\lambda = (p+q, p)$, $p \geqslant 2$, элементы имеют вид

$$d_{p,q}(r) = (x_1 x_2 \bar{X}_1^{p-2} X_1^r)(x_1 x_2 \bar{X}_2^{p-2} X_1^{q-r}),$$

где $r = 0, 1, \ldots, [q/2]$. Отметим, что в силу тождества антикоммутативности, которое выполняется в любой алгебре Ли, образующие x_1, x_2 в начале каждой скобки также образуют альтернированные пары. Наконец, для разбиения $\lambda = (n-1, 1)$ элемент имеет вид

$$d_{1,n-2} = x_2 X_1^{n-1},$$

определяющий знаменитое тождество энгелевости.

Сформулируем ещё один результат, который был доказан в [3].

Теорема 2. *Многообразие $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ имеет почти полиномиальный рост, т. е. любое собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ имеет полиномиальный рост последовательности коразмерностей, а рост самого многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ является экспоненциальным.*

Перейдём к изложению новых результатов. Начнём с вычисления формулы для кодлины многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$. Напомним, что по определению кодлина равна сумме кратностей по всем разбиениям числа n.

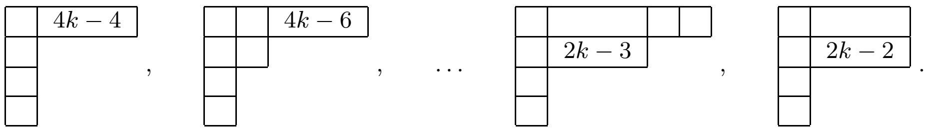
Теорема 3. *Кодлина многообразия* $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ *вычисляется по формулам*

$$l_n = \begin{cases} \dfrac{5n^2 - 24n + 32}{8}, & \text{если } n = 4m; \\ \dfrac{5n^2 - 24n + 36}{8}, & \text{если } n = 4m + 2; \\ \dfrac{5n^2 - 24n + 35}{8}, & \text{если } n = 4m + 1 \text{ или } n = 4m + 3. \end{cases}$$

Доказательство. Формула получена непосредственным вычислением с учётом формулы для кратности. Например, рассмотрим разбиение

$$\lambda = (p + q + 1, p + 1, 1, 1).$$

Пусть степень n делится на 4, т. е. $n = 2m$, где $m = 2k$. Рассмотрим изменение кратности $m(p, q)$ с ростом параметра $p = 0, 1, \ldots, 2k - 2$. Для наглядности изобразим соответствующие диаграммы Юнга:



Соответствующие кратности будут равны $m - 2,\ m - 2,\ m - 4, \ldots, 2,\ 2,\ 0$, а их сумма равна $n(n - 4)/8$. Зафиксируем теперь чётную степень $n = 2m$, но при $m = 2k + 1$, т. е. $n = 4k + 2$. В этом случае соответствующие кратности будут равны $m - 1,\ m - 1,\ m - 3, \ldots, 3,\ 1,\ 1$, а их сумма равна $(n - 2)^2/8$. Для нечётного $n = 2m + 1$ получим $m - 1,\ m - 2,\ 2,\ 1$, а сумма будет равна $(n-1)(n-3)/8$. В итоге для данного типа разбиения получим следующую сумму кратностей:

$$\sum m(p, q) = \begin{cases} \dfrac{(n - 4)n}{8}, & \text{если } n = 4m; \\ \dfrac{(n - 2)^2}{8}, & \text{если } n = 4m + 2; \\ \dfrac{(n - 1)(n - 3)}{8}, & \text{если } n = 4m + 1 \text{ или } n = 4m + 3. \end{cases}$$

Аналогично рассуждая, получим, что для разбиений вида $(p + q + 2, p + 2, 2)$ сумма кратностей определится следующим образом:

$$\sum m(p, q) = \begin{cases} \dfrac{(n - 4)^2}{8}, & \text{если } n = 4m; \\ \dfrac{(n - 2)(n - 6)}{8}, & \text{если } n = 4m + 2; \\ \dfrac{(n - 3)(n - 5)}{8}, & \text{если } n = 4m + 1 \text{ или } n = 4m + 3. \end{cases}$$

В случае разбиений $(p+q,p)$, где $p \geqslant 2$, получим

$$\sum m(p,q) = \begin{cases} \dfrac{n(n-4)}{8}, & \text{если } n = 4m; \\ \dfrac{(n-2)^2}{8}, & \text{если } n = 4m+2; \\ \dfrac{(n-1)(n-3)}{8}, & \text{если } n = 4m+1 \text{ или } n = 4m+3. \end{cases}$$

Для разбиений вида $\lambda = (p+q+1, p+1, 1)$ сумма кратностей будет равна

$$\sum m(p,q) = \begin{cases} \dfrac{(n-2)^2}{4}, & \text{если } n = 4m \text{ или } n = 4m+2; \\ \dfrac{(n-3)(n-1)}{4}, & \text{если } n = 4m+1 \text{ или } n = 4m+3. \end{cases}$$

Так как кодлина равна сумме кратностей по всем разбиениям числа n, то, сложив полученные суммы и прибавив 1 (случай разбиения $\lambda = (n-1,1)$), получим приведённую в формулировке теоремы формулу для вычисления кодлины многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$.

Теорема 3 доказана. $\square$

В последней теореме предъявлен базис полилинейной части многообразия и точная формула для коразмерности.

Теорема 4. *Базис полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ состоит из элементов вида*

$$x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}}, \tag{5}$$

где $i_1 < n > i_2 > \ldots > i_{n-1}$;

$$(x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k}), \tag{6}$$

где $k = 2,\ldots,n-2$ и $i_1 < n > i_2 > \ldots > i_{n-k-1}$, $j_1 < j_2 > j_3 > \ldots > j_k$.

При $n \geqslant 4$ коразмерность многообразия задаётся формулой

$$c_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = (n-1)\big((n-4)2^{n-3}+2\big).$$

Доказательство. Хорошо известно, что любой полилинейный элемент равен линейной комбинации левонормированных мономов с одной и той же образующей, например x_n, на первом слева месте, а следовательно, в силу тождества антикоммутативности с одной и той же образующей на втором слева месте. Рассмотрим произвольный такой моном $x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}}$. Если выполняются неравенства $i_1 < n > i_2 > \ldots > i_{n-1}$, то это моном вида (5). Пусть в мономе $x_{i_1}x_n\ldots x_ix_jx_{j_1}\ldots x_{j_k}$ существует пара соседних образующих x_i, x_j с возрастающими индексами, т. е. $i < j$. В этом случае воспользуемся тождеством $x(yz) \equiv xyz - xzy$, которое выполняется в любой алгебре Ли, и получим

$$x_{i_1}x_n\ldots x_ix_jx_{j_1}\ldots x_{j_k} \equiv x_nx_{i_1}\ldots(x_ix_j)x_{j_1}\ldots x_{j_k} + x_n\ldots x_jx_ix_{j_1}\ldots x_{j_k}.$$

Несложная индукция по числу соседних пар образующих, индексы которых возрастают, позволяет установить, что любой моном выражается через элементы вида (5) и элементы вида $x_{i_1}x_n\ldots(x_ix_j)x_{j_1}\ldots x_{j_k}$. Заметим, что, дифференцируя последний элемент образующими $x_{j_1},\ldots,x_{j_k}$, получаем мономы вида (6), в которых дополнительно можно считать, что вторая слева образующая второго произведения является максимальной, т. е. индекс j_2 является максимальным среди индексов $j_1,j_2,\ldots,j_k$. Для завершения доказательства того, что элементы вида (5) и (6) порождают векторное пространство $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$, осталось заметить, что в силу тождества (4) образующие $x_{i_2},\ldots,x_{i_{n-k-1}}$, так же как и образующие $x_{j_3},\ldots,x_{j_k}$, в мономах вида (6) можно менять местами. Таким образом, получаем необходимые неравенства $i_1<n>i_2>\ldots>i_{n-k-1}$, $j_1<j_2>j_3>\ldots>j_k$.

Итак, пространство $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ является линейной оболочкой мономов вида (5) и (6). Докажем теперь, что это множество мономов является линейно независимым. Рассмотрим линейную комбинацию этих элементов и предположим, что она равна 0. Так как в относительно свободной алгебре любое равенство от свободных образующих является тождеством многообразия, то мы получаем, что в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ выполнено тождество

$$\sum_{i_1=1}^{n-1}\alpha_{i_1}x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}}+\sum\beta_{I,J,i_1,j_1}(x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k})\equiv 0, \tag{7}$$

где коэффициенты во второй сумме зависят от индексов i_1, j_1 и множеств $I=\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-k-1}\}$, $J=\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}$.

Если существует такой индекс i_1, что $\alpha_{i_1}\neq 0$, то, подставив в (7) вместо образующей x_{i_1} образующую x, а вместо остальных образующих — y, имеем в качестве следствия тождество энгелевости $xY^{n-1}\equiv 0$. Получили противоречие, так как в силу теоремы 1 кратность $m_{(n-1,1)}$ отлична от нуля. Таким образом, тождество (7) приобретает вид

$$\sum\beta_{I,J,i_1,j_1}(x_{i_1}x_nx_{i_2}\ldots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_k})\equiv 0, \tag{8}$$

где хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Переобозначим образующие (в частности, $x_n=x$, $x_{j_2}=y$) так, чтобы слагаемое с отличным от нуля коэффициентом имело вид

$$(xy_ky_{k+1}\ldots y_{n-2})(yy_1\ldots y_{k-1}).$$

Мы воспользовались антикоммутативностью и переставили первые пары в каждой скобке. В полученное тождество вместо образующей x подставим $z_1z_2x_1\ldots x_{k-1}$, а вместо образующей y подставим $z_3z_4x_{k+1}\ldots x_{n-2}$. Проальтернируем по парам образующих x_s, y_s, где $s=1,2,\ldots,n-2$. В силу тождеств (4) после произведённой подстановки и альтернирований все остальные слагаемые станут равны нулю, останется только выделенное слагаемое, и полученное следствие примет вид

$$(z_1z_2\bar{x}_1\ldots\tilde{x}_k\bar{\bar{y}}_{k+1}\ldots\tilde{\tilde{y}}_{n-2})(z_3z_4\bar{y}_1\ldots\tilde{y}_k\bar{\bar{x}}_{k+1}\ldots\tilde{\tilde{x}}_{n-2})\equiv 0.$$

Получили противоречие, так как это тождество не выполняется в многообразии $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$, иначе, например, кратность $m_{(p,p)}$ при нечётном $p>n+2$ была бы равна 0, а не 1, как было установлено в теореме 1.

Итак, все элементы вида (5) и (6) линейно независимы и образуют базис пространства $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$. Понятно, что количество элементов вида (5) равно $n-1$. Элементы вида (6) зависят от выбора индексов $j_1, \ldots, j_k$, а также от выбора i_1, j_1. Простые комбинаторные соображения позволяют выписать следующую формулу для коразмерностей:

$$c_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = (n-1) + \sum_{k=2}^{n-2} (k-1)(n-k-1)\binom{n-1}{k}.$$

Для завершения доказательства достаточно использовать следующие равенства, касающиеся биномиальных коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m, \quad \sum_{k=0}^{m} k\binom{m}{k} = m \cdot 2^{m-1}, \quad \sum_{k=0}^{m} k^2\binom{m}{k} = (m^2+m)\cdot 2^{m-2},$$

доказательства которых мы опускаем.

Теорема 4 полностью доказана. □

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-01-00103 а.

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1980.

[2] Мальцев А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Мат. сб. — 1950. — Т. 26 (68), № 1. — С. 19—33.

[3] Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. наук. — 1987. — № 6. — С. 39—43.

[4] Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 6 (276). — С. 25—45.

[5] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 122).