Каскадное соединение и треугольное произведение линейных автоматов

Б. ПЛОТКИН, Т. ПЛОТКИНА

Еврейский университет в Иерусалиме,
Университет им. Бар-Илана, Израиль
e-mail: plotkin@macs.biu.ac.il

УДК 519.713

Ключевые слова: линейный автомат, каскадное соединение, сплетение, треугольное произведение.

Аннотация

В этой статье мы хотели бы вновь обратиться к основам треугольного произведения автоматов и ввести понятие сложности линейного автомата. Статья содержит три основных результата. 1. Для любых двух абстрактных автоматов мы рассмотрим категорию их каскадных соединений. Она содержит универсальный терминальный объект — сплетение автоматов. Поэтому каждое каскадное соединение допускает естественное вложение в сплетение автоматов. 2. Аналогичная теория построена для линейных автоматов, для которых мы соответственно рассматриваем категорию каскадных соединений. Она также содержит терминальный объект, этот объект является треугольным произведением линейных автоматов. 3. Треугольное произведение имеет различные приложения. Эта конструкция используется в теории разложения линейных автоматов, в определении сложности линейного автомата. Мы определяем понятие сложности линейного автомата и даём правило для её подсчёта.

Abstract

B. Plotkin, T. Plotkin, Cascade connections and triangular products of linear automata, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 175—186.

In this note, we want to resume attention to the basics of triangular product of automata construction and to introduce the notion of linear automata complexity. It contains three main results. (1) For any two pure automata we consider the category of their cascade connections. It possesses the universal terminal object. This object is the wreath product of the automata. Hence, every cascade connection admits a natural embedding into wreath product of automata. (2) A similar theory is built for linear automata, where we also consider the category of cascade connections. It also has the terminal object. This object is the triangular product of linear automata. (3) Triangular products have various applications. This construction is used in linear automata decomposition theory, in the definition of complexity of a linear automaton. We consider a special linear complexity and give the rule for its calculation.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 7, с. 175—186.

Введение

Мотивация

Эта статья посвящена треугольному произведению автоматов. Цель статьи — краткое изложение конструкции треугольного произведения, введение точных определений, а также формулировка теоремы, показывающей место этой конструкции среди других конструкций алгебраической теории автоматов (параллельных и последовательных соединений, каскадных соединений и сплетений).

В отличие от сплетений, которые описаны во многих книгах по алгебре и в теоретических источниках по информатике, конструкция треугольного произведения слабо освещена в литературе, например, книга [14], в которой впервые появились треугольные произведения, была опубликована только на русском языке. Вскоре вышла отдельная книга по треугольным произведениям [16]. Тем не менее эта конструкция играет решающую роль в проблемах декомпозиции многосортных систем [14,16] и особенно в теории декомпозиции линейных автоматов [12]. В этой статье мы хотим обратить внимание на основы конструкции треугольного произведения автоматов и надеемся, что она подготовит почву для различных дальнейших применений, особенно в теории сложности автоматов и языков, в теории баз данных и в теории алгоритмов. Следует отметить, что в значительной степени эта статья стимулирована публикацией книги Дж. Роудза и Б. Стейнберга [15], в которой конструкция треугольного произведения применяется к очень общей ситуации полуколец.

Основные результаты и значение

С формальной точки зрения основными результатами этой статьи являются уточнение определения треугольного произведения линейных автоматов и теорема, утверждающая, что треугольные произведения представляют собой универсальные объекты при каскадном соединении линейных автоматов. Значение треугольного произведения объяснено ниже в этом разделе.

Мы различаем абстрактные, полугрупповые и линейные автоматы (см. раздел 2). В абстрактном автомате набор состояний представляет собой неструктурированное множество. В полугрупповом автомате сигналы формируют полугруппу (моноид). Каждый абстрактный (полугрупповой) автомат взаимодействует с различными внешними условиями и действует по наложенным ими правилам. Классические результаты алгебраической теории автоматов относятся, как правило, к автоматам такого типа.

Основным объектом наших исследований является линейный автомат, т. е. автомат, снабжённый дополнительными операциями, основанными на понятии линейного пространства. Наличие таких операций обогащает структуру автомата и делает её более интересной. Это может быть использовано в различных ситуациях, связанных с линейностью. Теория разложения линейных автоматов построена в работе [12]. В ней активно используется треугольное произведение линейных автоматов. Оказывается, что треугольное произведение тесно связано с каскадным соединением автоматов.

Для лучшего понимания последующего изложения следует кратко напомнить основные понятия хорошо известной теории разложения абстрактных (полугрупповых) автоматов Крона—Роудза (см., например, [1—5, 9, 11, 12]).

Пусть имеется (конечный) полугрупповой автомат $\mathcal{A}$. Согласно теории Крона—Роудза (1965 г.) любой автомат такого типа можно построить путём каскадного соединения простых групповых автоматов, делящих $\mathcal{A}$, с некоторыми тривиальными автоматами, так называемыми триггерами. Мы предпочитаем следующую формулировку теоремы Крона—Роудза: любой полугрупповой автомат можно разложить на каскадное соединение неприводимых блоков. Нет никакой необходимости обсуждать хорошо известные преимущества такого разложения; упомянем только ключевое понятие сложности (конечного полугруппового) автомата Крона—Роудза (см., например, [7, 10]).

Перейдём к рассмотрению линейных, а не абстрактных автоматов, т. е. предположим, что множества состояний и выходов имеют линейную структуру. Например, они могут представлять собой конечномерные линейные пространства или модули над кольцами. Мы хотим построить для автоматов такого типа теорию, аналогичную теории Крона—Роудза, и, кроме того, ввести инструмент, подобный сплетению в случае абстрактных (полугрупповых) автоматов. Основная метатеорема утверждает, что именно треугольное произведение автоматов является такой конструкцией. Аналогия между сплетением и треугольным произведением объясняет (хоть и не полностью) значение последнего и помогает во многих различных задачах, подходах и приложениях. Продвигаясь в области линейных автоматов, мы можем сочетать треугольные произведения со сплетениями, действующими на полугруппах, получая окончательное разложение линейного автомата.

Для двух автоматов возможно большое количество различных каскадных соединений. Они образуют категорию. В случае линейных автоматов категория каскадных соединений содержит универсальный терминальный объект, и им является именно треугольное произведение автоматов. Другими словами, любое каскадное соединение линейных автоматов можно вложить в их треугольное произведение единственным образом. Подобная теорема о категориях верна и для абстрактных автоматов. Это означает, что любой результат, сформулированный для сплетений абстрактных автоматов, можно переформулировать для линейных автоматов, используя треугольное произведение.

Кроме теории декомпозиции автоматов, существует много других вопросов, связанных с алгебраической теорией автоматов. Например, в [6] обсуждаются языки, связанные с детерминированными и недетерминированными автоматами, автоморфизмы автоматов и т. д. Конструкция треугольного произведения приводит к решению следующих вопросов:

1) изучить тождества линейных автоматов;
2) найти тождества треугольного произведения автоматов, если тождества

сомножителей известны. Другими словами, какое многообразие порождает треугольное произведение автоматов, если многообразия, порождённые сомножителями, известны.

Мы также пытаемся применить треугольные произведения автоматов к модели базы данных и модели базы знаний и к проблеме их информационной эквивалентности (см., например, [13]).

1. Автоматы

Начнём с рассмотрения абстрактных автоматов. Они представляют собой тройки вида (A, X, B), где A — набор состояний автомата, X — система входных сигналов, а B — набор внешних состояний, отождествленных с выходными сигналами, для которых определены две операции: $a \circ x \in A$ для $a \in A$, $x \in X$ и $a * x = b \in B$.

Обозначим через S_A полугруппу трансформаций множества A, а через $\mathrm{Fun}(A, B)$ — множество всех отображений из A в B. Отображение $X \to S_A$ соответствует операции $\circ$, если $*$ определяет отображение $X \to \mathrm{Fun}(A, B)$.

Возьмём декартово произведение $S(A, B) = S_A \times \mathrm{Fun}(A, B)$. Разумеется, оно является полугруппой с операцией умножения, определённой по правилу $(\sigma_1, \varphi_1)(\sigma_2, \varphi_2) = (\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\varphi_2)$ для (σ_1, φ_1) и (σ_2, φ_2) из $S(A, B)$. Также рассмотрим отображение $X \to S(A, B)$. Если мы рассмотрим свободную полугруппу $S = S(X)$ над множеством X, то мы получим гомоморфизм $S \to S(A, B)$. Он определяет действия S на A и из A в B, так что выполняются соотношения $a \circ s_1s_2 = (a \circ s_1) \circ s_2$ и $a * s_1s_2 = (a \circ s_1) * s_2$, где s_1 и s_2 лежат в S.

Определим понятие полугруппового автомата. Это автомат (A, Γ, B), где Γ — полугруппа. В нём выполняются следующие аксиомы: $a \circ \gamma_1\gamma_2 = (a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2$, $a * \gamma_1\gamma_2 = (a \circ \gamma_1) * \gamma_2$. Очевидно, автомат $(A, S(A, B), B)$ удовлетворяет этим соотношениям. Если $s = (\sigma, \varphi)$, то $a \circ s = a\sigma$ и $a * s = a\varphi$. Этот автомат является универсальным. Это означает, что произвольный полугрупповой автомат (A, Γ, B) задаётся представлением $\Gamma \to S(A, B)$. Теперь определим каскадное соединение автоматов, которое обобщает понятия параллельного и последовательного соединений.

Определение 1.1. Пусть (A_1, X_1, B_1) и (A_2, X_2, B_2) — два абстрактных автомата. Определим автомат $(A_1 \times A_2, X, B_1 \times B_2)$ по отображениям $\alpha\colon X \times A_2 \to X_1$ и $\beta\colon X \to X_2$ для некоторого X. Положим

$$(a_1, a_2) \circ x = \big(a_1 \circ \alpha(x, a_2), a_2 \circ \beta(x)\big),$$
$$(a_1, a_2) * x = \big(a_1 * \alpha(x, a_2), a_2 * \beta(x)\big),$$

где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $x \in X$. Получившийся автомат является каскадным соединением (A_1, X_1, B_1) и (A_2, X_2, B_2), определённым тройкой (X, α, β).

Рассмотрим категорию таких троек и соответственно категорию каскадных соединений для данных (A_1, X_1, B_1) и (A_2, X_2, B_2). Морфизмы этой категории определяются диаграммами

$$
\begin{tikzcd}
X \times A_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\mu"'] & X_1 \\
& X' \times A_2 \arrow[u, "\alpha'"']
\end{tikzcd},
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\mu"'] & X_2 \\
& X' \arrow[u, "\beta'"']
\end{tikzcd},
$$

где $(x,a)^\mu = (x^\mu, a)$ для $x \in X$ и $a \in A$.

Аналогичная конструкция применима и к полугрупповым автоматам. Пусть даны автоматы (A_1, Γ_1, B_1) и (A_2, Γ_2, B_2). Рассмотрим тройки (Γ, α, β), где $\beta\colon \Gamma \to \Gamma_2$ — гомоморфизм полугрупп, а $\alpha\colon \Gamma \times A_2 \to \Gamma_1$ удовлетворяет условию

$$\alpha(\gamma_1\gamma_2, a) = \alpha(\gamma_1, a)\alpha\big(\gamma_2, a \circ \beta(\gamma_1)\big),$$

$\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $a \in A_2$. Тогда каскадное соединение $(A_1 \times A_2, \Gamma, B_1 \times B_2)$ является полугрупповым автоматом, и, кроме того, мы можем говорить о категории каскадных соединений для данной пары полугрупповых автоматов.

Рассмотрим ещё один пример каскадного соединения — сплетение автоматов. Пусть даны автоматы (A_1, Γ_1, B_1) и $(A_2,\ \Gamma_2, B_2)$. Определим полугруппу $\Gamma = \Gamma_1^{A_2} \times \Gamma_2$. Каждый элемент этой полугруппы — пара $(\bar{\gamma}_1, \gamma_2)$, где $\gamma_2 \in \Gamma_2$ и $\bar{\gamma}_1$ — отображение $A_2 \to \Gamma_1$. Полугруппа Γ_2 естественным образом действует на множестве $\Gamma_1^{A_2}$: $(\gamma_2 \circ \bar{\gamma}_1)(a) = \bar{\gamma}_1(a \circ \gamma_2)$, где $a \in A_2$. Пусть $(\bar{\gamma}_1, \gamma_2)$ и $(\bar{\sigma}_1, \sigma_2)$ — два элемента из Γ. Определим их произведение как

$$(\bar{\gamma}_1, \gamma_2)(\bar{\sigma}_1, \sigma_2) = (\bar{\gamma}_1(\gamma_2 \circ \bar{\sigma}_1), \gamma_2\sigma_2).$$

Определим для Γ отображения α и β как $\alpha\big((\bar{\gamma}_1, \gamma_2), a\big)$ и $\beta(\bar{\gamma}_1, \gamma_2) = \gamma_2$. Тройка (Γ, α, β) определяет сплетение автоматов $(A_1, \Gamma_1, B_1)\ \mathrm{wr}\ (A_2, \Gamma_2, B_2)$. Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.1. *Сплетение автоматов является терминальным объектом в категории каскадных соединений автоматов.*

Эта теорема означает, что каждое каскадное соединение автоматов (в частности, последовательные и параллельные соединения автоматов) можно рассматривать как подавтомат в сплетении автоматов. В аналогичной теореме для линейных автоматов используется конструкция треугольного произведения, которое является универсальным терминальным объектом в категории их каскадных соединений.

2. Линейные автоматы

Перейдём к определению линейных автоматов. Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, Mod-K — категория модулей над K.

Определение 2.1. Линейным автоматом в Mod-K называется алгебраическая структура, тройка (A, Γ, B), где A и B — модули из Mod-K, а Γ — полугруппа, действующая на A и B, а также из A в B. Возникающие при этом операции $\circ$, $\cdot$ и $*$ должны удовлетворять соотношениям

$$a \circ \gamma_1\gamma_2 = (a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2, \quad b \cdot \gamma_1\gamma_2 = (b \cdot \gamma_1) \cdot \gamma_2,$$
$$a * \gamma_1\gamma_2 = (a \circ \gamma_1) * \gamma_2 + (a * \gamma_1) \cdot \gamma_2, \quad a \in A, \quad b \in B, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

Мы можем сказать, что линейный автомат (A, Γ, B) задаётся представлениями $\rho_1\colon \Gamma \to \mathrm{End}(A)$, $\rho_2\colon \Gamma \to \mathrm{End}(B)$ и $\delta\colon \Gamma \to \mathrm{Hom}(A, B)$. Существует универсальный автомат $(A, \mathrm{End}(A, B), B)$, и произвольный автомат задаётся представлением $\Gamma \to \mathrm{End}(A, B)$. Заметим, что в [12] такие автоматы называются биавтоматами, потому что Γ также действует в B и все три действия согласованны.

Объясним структуру $\mathrm{End}(A, B)$ на матричном языке. Мы рассмотрим её в виде

$$\begin{pmatrix} \mathrm{End}(A) & \mathrm{Hom}(A, B) \\ 0 & \mathrm{End}(B) \end{pmatrix}.$$

Приходим к множеству матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

где α_{ij} не числа, а морфизмы категории Mod-K. Произведение таких матриц определяется так же, как и обычное произведение числовых матриц.

Полугруппу $\mathrm{End}(A, B)$ представим в матричном виде:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \mathrm{Hom}(A, B) \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь группы Γ_1 и Γ_2 действуют в пространствах A и B соответственно. Мы не предполагаем точности этого действия. Перейдём от $\gamma_1 \in \Gamma_1$ и $\gamma_2 \in \Gamma_2$ к точным действиям $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$. Элементы Γ при этом умножаются по правилу

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \varphi_1 \\ 0 & \gamma_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_2^1 & \varphi_2 \\ 0 & \gamma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2^1\gamma_2^2 & \overline{\gamma_1^1}\varphi_2 + \varphi_1\overline{\gamma_2^2} \\ 0 & \gamma_1^1\gamma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что Γ также является полугруппой с естественным гомоморфизмом в $\mathrm{End}(A, B)$. Это определяет линейный автомат (A, Γ, B).

3. Обобщённые матрицы

В этой части мы напомним стандартные понятия. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — элементы Mod-K и $A = A_1 + \ldots + A_n$ — их прямая сумма. Рассмотрим алгебру $\mathrm{End}(A) = \mathrm{End}(A_1, \ldots, A_n)$ над K. Определим матричное представление этой алгебры. Рассмотрим матрицы вида $M = M(\alpha_{ij})$, где $\alpha_{ij}\colon A_i \to A_j$ — морфизмы категории Mod-K. Сложение и умножение на скаляр таких матриц определяются покомпонентно. Умножение матриц также определяется стандартным образом, т. е. если $M_1 = (\alpha_{ij})$, $M_2 = (\beta_{ij})$, $M_1M_2 = (\tau_{ij})$, то $\tau_{ij} = \sum\limits_k \alpha_{ik}\beta_{kj}$,

$k = 1, \ldots, n$. Таким образом, мы построили матричную алгебру, изоморфную алгебре $\mathrm{End}(A)$. Мы отождествляем эти две алгебры.

Матрица M действует в A согласно следующему правилу: если $a = a_1 + \ldots + a_n \in A$, $b = b_1 + \ldots + b_n = aM$, то $b_k = \sum\limits_i a_i \alpha_{ik}$. Самым важным здесь является возможность сложения морфизмов и их умножения на скаляр в категории Mod-K. Это аддитивная категория.

4. Треугольные матрицы

Рассмотрим треугольные матрицы в $\mathrm{End}(A)$. Такие матрицы образуют подалгебру в $\mathrm{End}(A)$, обозначаемую как $\mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_n) = \mathrm{Trg}(A)$. Если $M_1 = (\alpha_{ij})$, $M_2 = (\beta_{ij})$ и $M_1 M_2 = (\tau_{ij})$, то $(\tau_{ij}) = \sum\limits_k \alpha_{ik}\beta_{kj}$, $i \leqslant k \leqslant j$.

Теперь рассмотрим последовательность подмодулей в A:

$$A^1 = A_1 + \ldots + A_n,\ A^2 = A_2 + \ldots + A_n, \ldots,\ A^k = A_k + \ldots + A_n, \ldots,\ A^n = A_n.$$

Имеем, что $A^1 \supset A^2 \supset \ldots \supset A^n$ и элементы этой серии инвариантны относительно действия алгебры $\mathrm{Trg}(A)$. Заметим, что если все элементы a_{ii} обратимы в алгебре $\mathrm{End}(A_i)$, то соответствующая матрица M обратима в кольце $\mathrm{End}(A)$. Если все a_{ii} — единицы, то это унитреугольная матрица. Все такие матрицы M составляют унитреугольную часть в $\mathrm{End}(A)$. Она является нильпотентной подгруппой в группе $\mathrm{Aut}(A)$.

Разделим треугольную матрицу $M = (\alpha_{ij})$, $\alpha_{ij} = 0$ для $1 \leqslant i < j \leqslant m-1$ и $\alpha_{ij} = 0$ для $m \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, на четыре блока:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m-1} & \alpha_{1,m} & \cdots & \alpha_{1,n} \\
0 & \cdots & \alpha_{2,m-1} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{2,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \alpha_{m-1,m-1} & \alpha_{m-1,m} & \cdots & \alpha_{m-1,n} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & \alpha_{mm} & \cdots & \alpha_{mn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{nn}
\end{array}\right).$$

Верхний левый треугольник связан с алгеброй $\mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_{m-1})$, а нижний правый — с алгеброй $\mathrm{Trg}(A_m, \ldots, A_n) = \mathrm{Trg}(A^m)$. Верхний правый прямоугольник даёт $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_1 + \ldots + A_{m-1}; A^m)$. Имеем также гомоморфизмы $\mu\colon \mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_n) \to \mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_{m-1})$ и $\nu\colon \mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_n) \to \mathrm{Trg}(A_m, \ldots, A_n)$. Несложно понять, какие идеалы в $\mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_n)$ служат ядрами этих гомоморфизмов.

Далее рассмотрим изоморфизмы $\delta\colon A/A^m \to A_1 + \ldots + A_{m-1}$. Каждый такой изоморфизм связан с действием алгебры $\mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_n)$ на A/A^m и действием $\mathrm{Trg}(A_1, \ldots, A_{m-1})$ на $A_1 + \ldots + A_{m-1}$.

5. Треугольное произведение представлений

Начнём с представлений полугрупп, алгебр над K и групп. Пусть A — элемент Mod-K. Возьмём пару (A,Γ), где Γ — алгебра или полугруппа. Если Γ — K-алгебра, то её представление задаётся гомоморфизмом $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{End}(A)$. Если же Γ — полугруппа, то $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{End}(A)$ — это гомоморфизм полугрупп, а если Γ — группа, то имеем гомоморфизм групп $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{Aut}(A)$. Дальнейшие рассуждения действительны для всех трёх случаев, но мы займёмся только одним из них, а именно представлением полугрупп.

Определим треугольное произведение представлений.

Определение 5.1. Пусть даны (B,Γ_2) и (A,Γ_1). Определим новое представление
$$(A\oplus B,\Gamma) = (B,\Gamma_2)\,\nabla\,(A,\Gamma_1).$$
Полугруппа Γ является полугруппой матриц вида
$$\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1 & \varphi\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix},$$
где $\gamma_2\in\Gamma_2$, $\gamma_1\in\Gamma_1$, $\varphi\in\mathrm{Hom}(A,B)$. Определим действие Γ в пространстве $A\oplus B$:
$$\big(a+b\big)\begin{pmatrix}\gamma_1 & \varphi\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix} = \big(a\gamma_1 + (a\varphi + b\gamma_2)\big)\,.$$
Эти формулы определяют треугольное произведение $(B,\Gamma_2)\,\nabla\,(A,\Gamma_1)$ представлений (B,Γ_2) и (A,Γ_1).

Свяжем понятие треугольного произведения представлений с определением автомата. Определим автомат (A,Γ,B) по представлению $(A\oplus B,\Gamma) = (B,\Gamma_2)\,\nabla\,(A,\Gamma_1)$. Из этого равенства следует, что $a\circ\gamma = a\circ\gamma_1$, $b\cdot\gamma = b\cdot\gamma_2$ и $a*\gamma = a\varphi$. Условия на $\circ$ и $\cdot$ очевидны. Проверим, что
$$a*\gamma^1\gamma^2 = (a\circ\gamma^1)*\gamma^2 + (a*\gamma^1)\cdot\gamma^2.$$
Мы имеем
$$a*\gamma^1\gamma^2 = a(\overline{\gamma_1^1}\varphi_2 + \varphi_1\overline{\gamma_2^2}) = (a\circ\gamma_1^1)*\gamma^2 + (a*\gamma^1)\cdot\gamma_2^2 = (a\circ\gamma^1)*\gamma^2 + (a*\gamma^1)\cdot\gamma^2.$$
Следовательно, автомат (A,Γ,B) соответствует треугольному произведению $(B,\Gamma_2)\nabla(A,\Gamma_1)$. Попробуем обобщить эту конструкцию. Пусть даны представления $(A_1,\Gamma_1),\dots,(A_n,\Gamma_n)$, где A_i, $i=1,\dots,n$, — элементы Mod-K. Рассмотрим матрицы
$$\gamma = \left(\begin{array}{ccccc|ccc}
\gamma_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1,m-1} & \alpha_{1,m} & \cdots & \alpha_{1,n}\\
0 & \gamma_2 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,m-1} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{2,n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{m-1} & \alpha_{m-1,m} & \cdots & \alpha_{m-1,n}\\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \gamma_m & \cdots & \alpha_{mn}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_n
\end{array}\right).$$

Произведение матриц такого типа определяется очевидным правилом. Пусть γ имеет вид $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \alpha_{ij})$. Для данных

$$\gamma^1 = (\gamma_1^1, \ldots, \gamma_n^1, \alpha_{ij}), \quad \gamma^2 = (\gamma_1^2, \ldots, \gamma_n^2, \beta_{ij})$$

мы определим их произведение как

$$\gamma^1\gamma^2 = (\gamma_1^1\gamma_1^2, \ldots, \gamma_n^1\gamma_n^2, \tau_{ij}),$$

где

$$\tau_{ij} = \sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj} = \overline{\gamma_i^1}\beta_{ij} + \ldots + \alpha_{ij}\overline{\gamma_j^2}, \quad i \leqslant k \leqslant j.$$

Все такие γ образуют полугруппу, обозначаемую $\operatorname{Trg}\big((A_1, \Gamma_1), \ldots, (A_n, \Gamma_n)\big)$. Эта полугруппа действует естественным образом на алгебре $A = A_1 + \ldots + A_n$, она образует треугольное произведение со всеми (A_i, Γ_i) в обратном порядке. Далее возьмём $A_1 + \ldots + A_{m-1} = A^{1m}$ и $A_m + \ldots + A_n = A^{2m}$. Обозначим через Γ_1 и Γ_2 полугруппы матриц, стоящих в левом верхнем и правом нижнем углах матриц γ соответственно. Рассмотрим представления $(A_1 + \ldots + A_{m-1}, \Gamma_1)$ и $(A_m + \ldots + A_n, \Gamma_2)$. Треугольное произведение второго представления с первым даёт первоначальное действие полугруппы $\Gamma = \operatorname{Trg}\big((A_1, \Gamma_1) \ldots (A_n, \Gamma_n)\big)$ на модуле $A_1 + \ldots + A_n$. Это верно для любого $m < n$. Перейдём теперь к автоматам $(A_1 + \ldots + A_{m-1}, \Gamma, A_m + \ldots + A_n)$. Мы получили серию автоматов с одной и той же действующей полугруппой. Из этого следует ассоциативность операции ∇. Треугольное произведение представлений рассматривается также в [14—16].

6. Каскадное соединение и треугольное произведение линейных автоматов

Пусть даны автоматы (A_1, Γ_1, B_1) и (A_2, Γ_2, B_2). Определим их треугольное произведение $(A_1, \Gamma_1, B_1) \nabla (A_2, \Gamma_2, B_2) = (A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$. Нам остаётся определить полугруппу Γ, а также операции $\circ$, $\cdot$ и $*$.

Определение 6.1. При определении треугольного произведения автоматов (A_1, Γ_1, B_1) и (A_2, Γ_2, B_2) предполагается, что определено треугольное произведение представлений (A_1, Γ_1) и (A_2, Γ_2), (B_1, Γ_1) и (B_2, Γ_2), так же как и треугольное действие из $A_1 \oplus A_2$ в $B_1 \oplus B_2$. Нам необходимо определить Γ. Начнём с модулей A_1, B_1, A_2, B_2 из Mod-K. Мы зададим полугруппу Γ матрицами

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \alpha_{12} & \tau_{13} & \tau_{14} \\ 0 & \gamma_1^2 & 0 & \tau_{24} \\ 0 & 0 & \gamma_2^1 & \beta_{12} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь матрицы

$$\begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \alpha_{12} \\ 0 & \gamma_1^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_2^1 & \beta_{12} \\ 0 & \gamma_2^2 \end{pmatrix}$$

отвечают автоматам (A_1, Γ_1, B_1) и (A_2, Γ_2, B_2) соответственно. Таким образом, $\gamma_1^1 \in \Gamma_1$ действует в A_1, $\gamma_1^2 \in \Gamma_1$ в B_1, а $\alpha_{12} \in \Gamma_1$ действует как элемент $\mathrm{Hom}(A_1, B_1)$. Соответственно, τ_{14} должен принадлежать $\mathrm{Hom}(A_1, B_2)$, τ_{13} лежит в $\mathrm{Hom}(A_1, A_2)$, а τ_{24} — в $\mathrm{Hom}(B_1, B_2)$.

Пусть (a_1, a_2) лежит в $A_1 \oplus A_2$, а (b_1, b_2) — в $B_1 \oplus B_2$. Операции $\circ$, $\cdot$ и $*$ в треугольном произведении $(A_1, \Gamma_1, B_1) \nabla (A_2, \Gamma_2, B_2) = (A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$ определяются через произведение матриц $(a_1, 0, a_2, 0)\gamma$ и $(0, b_1, 0, b_2)\gamma$.

Предположим, что даны представления $\rho_1 \colon \Gamma \to \Gamma_1$, $\rho_2 \colon \Gamma \to \Gamma_2$ и $\delta_1 \colon \Gamma \to \mathrm{Hom}(A_1, A_2)$, $\delta_2 \colon \Gamma \to \mathrm{Hom}(B_1, B_2)$ и $\delta_3 \colon \Gamma \to \mathrm{Hom}(A_1, B_2)$, где Γ — некоторая полугруппа. Они дают нам возможность определить соответствующий им автомат $(A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$. Действительно, мы будем отталкиваться от категории каскадных соединений данных (A_1, Γ_1, B_1) и (A_2, Γ_2, B_2) (ср. с разделом 2 для чистых автоматов).

Теорема 6.1. *Категория каскадных соединений линейных автоматов (A_1, Γ_1, B_1) и (A_2, Γ_2, B_2) содержит терминальный объект, причём он является треугольным произведением данных автоматов.*

7. Приложение: сложность линейных автоматов

Концепция треугольного произведения используется для решения проблемы разложения линейных автоматов. Мы применим её также и в вопросе оценки сложности линейных автоматов. Для абстрактных автоматов этот вопрос был решён в теории Крона—Роудза [10]. Напомним следующее определение.

Определение 7.1 [10]. Сложностью Крона—Роудза (групповой сложностью или просто сложностью) конечного абстрактного автомата с конечной полугруппой входных сигналов Γ называется наименьшее число групп в сплетении конечных групп и конечных ациклических полугрупп, для которых Γ является делителем.

Например, для любого n, большего 1, мультипликативная полугруппа для всех верхнетреугольных матриц размера $(n+1) \times (n+1)$ над фиксированным конечным полем имеет сложность n (см. [7, 8]).

Перейдём к определению сложности линейного автомата.

Определение 7.2. Пусть дан линейный автомат (A, Γ, B). Любой гомоморфный образ подавтомата (A, Γ, B) называется делителем (A, Γ, B).

Определение 7.3. Линейный автомат (A, Γ, B) называется простым, если выполняется одно из следующий условий:

1) $A = 0$ и представление (B, Γ) точно и неприводимо;
2) $B = 0$ и представление (A, Γ) точно и неприводимо.

Каждый автомат имеет простые делители. Мы рассмотрим вопрос определения сложности в случае, когда K — поле, а A, B — конечномерные пространства.

Теорема 7.1. *Линейный автомат (A, Γ, B) является делителем треугольного произведения его простых делителей.*

Пусть n, m — длины Γ-композиционных рядов для A и B соответственно. Может быть доказано, что число простых делителей в теореме 7.1 не меньше $n + m$.

Определение 7.4. Пусть дан линейный автомат (A, Γ, B). Число $n + m$ инвариантно для автомата (A, Γ, B) и называется его линейной сложностью.

Вместе с линейной сложностью автомата можно рассматривать и его общую сложность. Помимо разложения автомата в треугольное произведение простых множителей, используется конструкция сплетения вида $(A, \Gamma, B) \operatorname{wr} (Y, \Gamma')$, где Y — множество, а Γ' — полугруппа или группа, действующая на Y. Сплетение автоматов такого вида также линейный автомат. Простой (относительно треугольного произведения) автомат допускает дальнейшее разложение относительно сплетения. Это приводит к появлению новых делителей и к другой сложности.

Мы также можем сочетать линейную сложность (A, Γ, B) со сложностью Крона—Роудза действующей полугруппы Γ. На этом пути строится алгоритм декомпозиции линейного автомата и рассматриваются примеры вычисления сложности для таких автоматов.

Литература

[1] Algebraic Theory of Machines, Languages, and Semigroups / Arbib M. A., ed. — New York: Academic Press, 1968.

[2] Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. — New York: Academic Press, 1976.

[3] Gecseg F. Products of Automata. — Berlin: Springer, 1986. — (EATCS Monogr. on TCS).

[4] Gecseg F., Peak I. Algebraic Theory of Automata. — Akademiai Kiado, 1972.

[5] Holcombe M. Algebraic Automata Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982.

[6] Ito M. Algebraic Theory of Automata and Languages. — World Scientific, 2004.

[7] Kambites M. On the Krohn—Rhodes complexity of semigroups of upper triangular matrices // Int. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 1. — P. 187—201.

[8] Kambites M., Steinberg B. Wreath product decompositions for triangular matrix semigroups // Proc. Semigroups and Languages. Lisbon, 2005. — P. 129—144.

[9] Krohn K., Rhodes J. Algebraic theory of machines. I. Prime decomposition theorem for finite semigroups and machines // Trans. Am. Math. Soc. — 1965. — Vol. 116. — P. 450—464.

[10] Krohn K., Rhodes J. Complexity of finite semigroups // Ann. Math. — 1968. — Vol. 2, no. 88. — P. 128—160.

[11] Krohn K., Rhodes J., Tilson B. Lectures on finite semigroups // Algebraic Theory of Machines, Languages and Semigroups. — New York: Academic Press, 1968.

[12] Plotkin B., Greenglaz L., Gvaramija A. Algebraic Structures in Automata and Databases Theory. — Singapore: World Scientific, 1992.

[13] Plotkin B., Plotkin T. An algebraic approach to knowledge bases informational equivalence // Acta Appl. Math. — 2005. — Vol. 89. — P. 109—134.

[14] Plotkin B. I., Vovsi S. M. Varieties of Representations of Groups. — Zinatne, 1983.

[15] Rhodes J., Steinberg B. The q-Theory of Finite Semigroups: monograph. — To appear. — `http://mathstat.math.carleton.ca/~bsteinbg/qtheor.html`.

[16] Vovsi S. M. Triangular Products of Group Representations and Their Applications. — Birkhäuser, 1981. — (Progress Math.; Vol. 17).