О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченная группа, интерполяционная группа, выпуклая направленная подгруппа, почти ортогональные элементы.

Аннотация

Рассматриваются свойства групп с интерполяционным условием (не обязательно направленных). Найдено необходимое и достаточное условие, при котором произвольная частично упорядоченная группа является интерполяционной группой, а также условие почти ортогональности элементов интерполяционных групп. Описываются свойства наименьших выпуклых направленных подгрупп интерполяционных групп, содержащих почти ортогональные элементы. Исследуются свойства выпуклых направленных подгрупп тех интерполяционных групп, в которых каждый элемент является частным двух почти ортогональных элементов.

Abstract

E. E. Shirshova, On convex subgroups of groups with the interpolation property, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 7, pp. 187—199.

Characteristics of groups with the interpolation relation (not necessarily directed) are considered. A necessary and sufficient condition for a partially ordered group to be an interpolation group is obtained. An almost orthogonality criterion for positive elements of an interpolation group is proved. Characteristics of minimal convex directed subgroups containing almost orthogonal elements are described. Properties of convex directed subgroups in the subclass of interpolation groups in which each element is a quotient of two almost orthogonal elements are investigated.

1. Введение

Пусть G — частично упорядоченная группа, e — единица группы G, множество $G^+ = \{x \in G \mid e \leqslant x\}$ — положительный конус группы G. Частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой* (см., например, [13]), если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает в себя классы решёточно упорядоченных групп (см. [1,3]) и групп Рисса (см. [3,12]).

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 7, с. 187—199.

Цель данной работы — характеризация зависимости между почти ортогональностью элементов и свойствами множества выпуклых направленных подгрупп интерполяционной группы.

В работе используется обычная для частично упорядоченных групп терминология (см., например, [3]).

Учитывая интерполяционное свойство, получаем следующий критерий.

Теорема 1. *Для частично упорядоченной группы G следующие условия равносильны*:

1) *G — интерполяционная группа*;
2) *если $x \leqslant ab$ для элементов $x, a, b \in G^+$, то $x = a_1 b_1$ для некоторых элементов $a_1, b_1 \in G^+$, удовлетворяющих неравенствам $a_1 \leqslant a$ и $b_1 \leqslant b$.*

Напомним, что подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ следует, что $g \in M$ для всех $a, b \in M$ и $g \in G$. Для множества всех выпуклых направленных подгрупп интерполяционной группы справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть G — интерполяционная группа, и $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы G. Если H — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп H_i, то H является выпуклой направленной подгруппой группы G.*

Приведём определение почти ортогональности элементов интерполяционной группы.

Определение 1. Положительные элементы a и b интерполяционной группы G будем называть почти ортогональными, если из неравенств $g \leqslant a, b$ следует справедливость неравенств $g^2 \leqslant a, b$ для любого элемента $g \in G$.

В частично упорядоченной группе G для каждого элемента $a \in G^+$ $(a \neq e)$ существует выпуклая направленная подгруппа $[a]$, положительный конус которой состоит из элементов $x \in G^+$, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant a^k$ для некоторого целого числа $k > 0$ (подробнее см. [8, 11]). В третьем разделе исследуются свойства таких подгрупп для почти ортогональных элементов интерполяционных групп.

Начнём со следующего критерия почти ортогональности для положительных элементов интерполяционных групп.

Теорема 3. *Пусть G — интерполяционная группа, a и b принадлежат множеству $G^+ \setminus \{e\}$ и $M = [a] \cap [b] \neq \{e\}$. Элементы a и b являются почти ортогональными элементами в том и только в том случае, когда неравенства $m < a, b$ справедливы для всех элементов $m \in M^+$.*

Следствием теоремы 3 является следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть G — интерполяционная группа. Если элементы a и b почти ортогональны в группе G, то подгруппа $[a] \cap [b]$ является выпуклой и направленной подгруппой группы G.*

Следующее утверждение является следствием теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть G — интерполяционная группа, элементы a и b почти ортогональны в группе G. Тогда выпуклая направленная подгруппа, порождённая множеством $[a] \cup [b]$, равна произведению подгрупп $[a][b] = [b][a]$.*

Гомоморфизм f частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H называется *о-гомоморфизмом*, если из неравенства $a \leqslant b$ следует верность неравенства $f(a) \leqslant f(b)$ для всех $a, b \in G$. Если существует о-гомоморфизм f^{-1}, то f называется *о-изоморфизмом*.

В четвёртом разделе статьи исследуются некоторые свойства гомоморфизмов интерполяционных групп. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть G — интерполяционная группа. Если элементы a и b почти ортогональны в группе G, то верны следующие утверждения*:

1) *существует сюръективный о-гомоморфизм интерполяционной группы $[a]$ на интерполяционную группу $[a][b]/[b]$ с ядром $[a] \cap [b]$;*
2) *интерполяционная группа $[a]/[a] \cap [b]$ о-изоморфна интерполяционной группе $[a][b]/[b]$.*

В пятом разделе рассматриваются некоторые свойства выпуклых направленных подгрупп pl-групп. Начнём с определений.

Напомним, что подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *изолированной*, если из $x^n \in M$ следует, что $x \in M$ для любого элемента $x \in G$ и любого целого числа $n > 0$.

Определение 2. Интерполяционная группа G называется pl-группой, если каждый элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G.

В пятом разделе работы содержатся доказательства следующих теорем.

Теорема 6. *Всякая выпуклая направленная подгруппа pl-группы является её изолированной подгруппой.*

Теорема 7. *Пусть G — pl-группа и $M \neq \{e\}$ — выпуклая направленная подгруппа группы G, для которой из включений $\{e\} \subset L \subseteq M$ следует, что $L = M$ для любой выпуклой направленной подгруппы L группы G. Тогда M — линейно упорядоченная группа. Кроме того, для любых $a, b \in M^+$ найдутся целые числа $k > 0$, $l > 0$, для которых справедливы неравенства $a \leqslant b^k$ и $b \leqslant a^l$.*

2. Некоторые свойства интерполяционных групп

Данный раздел статьи содержит доказательства теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Пусть G — интерполяционная группа и $x \leqslant ab$ для элементов $x, a, b \in G^+$. Тогда справедливы неравенства $e, xb^{-1} \leqslant a, x$. По интерполяционному свойству в группе G существует элемент a_1, для которого справедливы неравенства $e, xb^{-1} \leqslant a_1 \leqslant a, x$. В этом случае для элемента $b_1 = {a_1}^{-1}x$ верны соотношения $x = a_1b_1$ и $b_1 \leqslant b$.

Обратно, пусть частично упорядоченная группа G удовлетворяет условию 2) и $a, b \leqslant c, d$ для элементов $a, b, c, d \in G$.

Положив $x = ba^{-1}$, $y = ca^{-1}$, $z = da^{-1}$, получим верные неравенства $e, x \leqslant y, z$. Следствием данных неравенств являются соотношения $e \leqslant y \leqslant (zx^{-1})y = z(x^{-1}y)$, где $e \leqslant z$ и $e \leqslant x^{-1}y$. В этом случае согласно условию 2) существуют элементы $u, v \in G^+$, удовлетворяющие условиям $u \leqslant z$ и $v \leqslant x^{-1}y$, т. е. $u^{-1}y \leqslant x^{-1}y$, поэтому $x \leqslant u$.

Таким образом, справедливы неравенства $e, x \leqslant u \leqslant y, z$. Умножив справа на элемент a, получим верные неравенства $a, b \leqslant ua \leqslant c, d$ для элемента $ua \in G$. Следовательно, G — интерполяционная группа. Теорема доказана полностью. □

Соответствующее утверждение для направленных интерполяционных групп доказано в [12] (см. теорему 2.3; см. также [3, § 13]).

Из теоремы 1 по индукции выводим справедливость следующего утверждения.

Следствие 2. *Если в интерполяционной группе G элемент $a \in G^+$ удовлетворяет неравенству $a \leqslant b_1b_2 \ldots b_n$, где $b_i \in G^+$, то в группе G существуют такие элементы $c_i \in G^+$, что $a = c_1c_2 \ldots c_n$ и $c_i \leqslant b_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Нетрудно проверить, что из определения интерполяционной группы по индукции выводится следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть G — интерполяционная группа. Из справедливости неравенств $a_i \leqslant b_j$ для элементов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ группы G следует существование элемента $z \in G$, для которого имеют место соотношения $a_i \leqslant z \leqslant b_j$ для всех индексов $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее предложение.

Предложение 2 [3, с. 23, предложение 1]. *Если G — частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны*:

1) *G является направленной группой*;
2) *для элемента e и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань*;
3) *любой элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = ab^{-1}$*, где $a, b \in G^+$.

Доказательство теоремы 2. Если $x \in H$, то $x = x_{\alpha_1}x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_n}$ для некоторых элементов $x_{\alpha_j} \in H_{\alpha_j}$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда по предложению 2 существуют элементы $z_{\alpha_j} \in {H_{\alpha_j}}^+$, для которых $x_{\alpha_j} \leqslant z_{\alpha_J}$. В этом случае $x \leqslant z$, где $z = z_{\alpha_1}z_{\alpha_2} \ldots z_{\alpha_n}$, и $e \leqslant z$. Значит, z является верхней гранью элементов e и x в группе H. Следовательно, по предложению 2 H — направленная группа.

Пусть для элемента $g \in G$ и элементов $x, y \in H$ справедливы неравенства $x \leqslant g \leqslant y$. Тогда верны неравенства $e \leqslant gx^{-1} \leqslant yx^{-1}$ для элемента $yx^{-1} \in H^+$. Из предыдущих рассуждений можно сделать вывод, что, не теряя общности, можно считать, что $yx^{-1} = u_{\alpha_1}u_{\alpha_2}\dots u_{\alpha_n}$ для некоторых элементов $u_{\alpha_j} \in {H_{\alpha_j}}^+$ при $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда по следствию 2 найдутся элементы $g_{\alpha_j} \in G$, для которых верны соотношения $g = g_{\alpha_1}g_{\alpha_2}\dots g_{\alpha_n}$ и $e \leqslant g_{\alpha_j} \leqslant u_{\alpha_j}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Значит, $g_{\alpha_j} \in H_{\alpha_j}$, так как подгруппы H_{α_j} выпуклые для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, $g \in H$ и H — выпуклая подгруппа группы G. Теорема доказана полностью. □

3. Почти ортогональность в интерполяционных группах

Теорема 8. *В интерполяционной группе G для положительных элементов a и b следующие условия эквивалентны*:

1) *элементы a и b почти ортогональны в группе G*;
2) *если $c \leqslant a, b$, то $c^n \leqslant a, b$ для любого целого числа $n > 0$ и любого элемента $c \in G$.*

Доказательство. Так как в доказательстве теоремы 2 в [10] нигде не используется свойство направленности группы, то можно считать данное утверждение справедливым. □

Учитывая теорему 8, можно воспользоваться следующими известными фактами.

Предложение 3 [10, лемма 1]. *Если G — частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны*:

1) *элементы a и b удовлетворяют условию 2) теоремы 8 в группе G*;
2) *элементы $x^{-1}ax$ и $x^{-1}bx$ удовлетворяют условию 2) теоремы 8 для любого элемента $x \in G$.*

Предложение 4 [10, лемма 2]. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Тогда справедливо равенство подгрупп $x^{-1}[a]x = [x^{-1}ax]$ для любых элементов $x \in G$ и $a \in G^+$.*

Предложение 5 [10, лемма 3]. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Если элементы a и b удовлетворяют условию 2) теоремы 8 в группе G, то справедливы равенства подгрупп $[a] = [b^{-1}ab] = [bab^{-1}]$.*

Предложение 6 [10, лемма 4]. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Если элементы $a \neq e$ и $b \neq e$ удовлетворяют условию 2) теоремы 8 в группе G, то эти элементы несравнимы.*

Прежде чем доказать теорему 3, докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть G — интерполяционная группа. Если элементы a и b почти ортогональны в группе G, то для любого элемент $c \in [a] \cap [b]$ справедливы неравенства $c < a, b$.*

Доказательство. Если $c \leqslant e$, то утверждение справедливо, так как $a, b \in G^+$ и по предложению 6 элементы a и b несравнимы.

Пусть $e < c$. Так как $c \in [a]$, то по определению подгруппы $[a]$ существует целое число $k > 0$, для которого $c \leqslant a^k$. Согласно следствию 2 найдутся элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k \in G^+$, для которых $c = a_1 a_2 \ldots a_k$; при этом $a_i \leqslant a$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$.

Так как $c \in [b]$, то существует целое число $l > 0$, для которого справедливо неравенство $c \leqslant b^l$. Тогда справедливы неравенства $a_i \leqslant a, b^l$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. В этом случае по предложению 1 найдётся элемент $x \in G$, удовлетворяющий соотношениям $a_i \leqslant x \leqslant a, b^l$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. По следствию 2 найдутся элементы $b_1, b_2, \ldots, b_l \in G^+$, для которых $x = b_1 b_2 \ldots b_l$; при этом $b_j \leqslant b$ для всех $j = 1, 2, \ldots, l$.

Таким образом, $b_j \leqslant a, b$ для всех $j = 1, 2, \ldots, l$. В этом случае по предложению 1 найдётся элемент $y \in G$, удовлетворяющий соотношениям $b_j \leqslant y \leqslant a, b$ для всех $j = 1, 2, \ldots, l$. Значит, $x \leqslant y^l$.

Из определения почти ортогональности следует, что

$$y^2 \leqslant a, b, \quad y^4 \leqslant a, b, \quad y^8 \leqslant a, b, \ldots,$$

т. е. если $l = 2n$ для некоторого целого числа $n > 0$, то $y^l \leqslant a, b$.

Если же $l = 2n + 1$, то $y^l \leqslant y^{2(n+1)} \leqslant a, b$. Значит, $x \leqslant a, b$.

Рассуждая аналогично, покажем, что неравенство $c \leqslant x^k$ влечёт верность неравенств $c \leqslant a, b$, но из предложения 6 следует, что равенства невозможны.

Допустим, что элементы e и c несравнимы. По определению подгрупп $[a]$ и $[b]$ найдутся целые числа $k > 0$ и $l > 0$, для которых справедливы неравенства $e, c \leqslant a^k, b^l$. Из условия теоремы следует существование элемента $d \in G$, удовлетворяющего соотношениям $e, c \leqslant d \leqslant a^k, b^l$. Из доказанного следует верность неравенств $c \leqslant d < a, b$. □

Из теоремы 9 следует справедливость следующего утверждения.

Следствие 3. *Пусть G — интерполяционная группа. Если элементы a и b почти ортогональны в группе G, то элементы a^k и b^l почти ортогональны для любых целых чисел $k > 0$, $l > 0$.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что $[a^k] = [a]$ и $[b^l] = [b]$.

Пусть элемент $x \in G$ удовлетворяет неравенствам $x \leqslant a^k, b^l$. Если $x \leqslant e$, то $x^2 \leqslant x \leqslant a^k, b^l$.

Если $e < x$, то $x \in [a] \cap [b]$, так как обе подгруппы выпуклы в группе G. Тогда по теореме 9 $x^2 < a, b$, поэтому $x^2 < a^k, b^l$.

Пусть элемент x несравним с e. Тогда найдётся элемент $c \in G$, для которого верны соотношения $e, x \leqslant c \leqslant a^k, b^l$. Из доказанного следует справедливость неравенств $x^2 \leqslant c^2 < a^k, b^l$. □

Для направленных интерполяционных групп соответствующее утверждение было доказано ранее (см. [10, теорема 4]).

Доказательство теоремы 3. Необходимость условия следует из теоремы 9. Докажем достаточность.

Пусть $x \in G$ и $x \leqslant a, b$. Если $x \leqslant e$, то $x^2 \leqslant x \leqslant e < a, b$.

Если $e < x$, то $x \in [a]$ и $x \in [b]$, так как обе подгруппы выпуклы в группе G. Значит, $x \in M$ и $x^2 \in M$. Кроме того, $x < x^2$, т. е. $x^2 \in G^+$, поэтому $x^2 \in M^+ = M \cap G^+$. В этом случае по условию теоремы $x < a, b$.

Пусть элемент x несравним с e. Тогда найдётся элемент $z \in G$, удовлетворяющий соотношениям $e, x \leqslant z \leqslant a, b$. Из доказанного следует справедливость неравенств $x^2 \leqslant z^2 < a, b$.

Следовательно, элементы a и b почти ортогональны. Теорема доказана. $\square$

Доказательство следствия 1. Выпуклость подгруппы M следует из свойств выпуклых подгрупп (см. [3, ч. I, гл. II, § 4]).

Если $x \in M$, то по теореме 3 справедливы неравенства $e, x < a, b$. Тогда найдётся элемент $z \in G$, удовлетворяющий соотношениям $e, x \leqslant z \leqslant a, b$. В этом случае z — верхняя грань элементов e и x в группе M. Отсюда по предложению 2 выводим, что M — направленная группа. $\square$

Из предложений 3 и 4 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 10. *Пусть G — интерполяционная группа. Подгруппа K, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп $[a_i] \cap [b_i]$ для всех пар почти ортогональных элементов a_i и b_i группы G, является нормальной подгруппой группы G.*

Доказательство. Пусть элементы a и b составляют пару почти ортогональных элементов в группе G. Тогда по предложению 3 и теореме 8 элементы $x^{-1}ax$ и $x^{-1}bx$ также почти ортогональны для любого элемента $x \in G$. В этом случае в группе G существует подгруппа $M = [x^{-1}ax] \cap [x^{-1}bx]$. Из предложения 4 следует, что $M = x^{-1}[a]x \cap x^{-1}[b]x$.

Пусть $m \in M$. Тогда $m = x^{-1}ux = x^{-1}vx$ для некоторых элементов $u \in [a]$ и $v \in [b]$. Значит, $xmx^{-1} \in L = [a] \cap [b]$, поэтому $m \in x^{-1}Lx$, т. е. $M \subseteq x^{-1}Lx$.

Если $n \in L$, то $n \in [a]$ и $n \in [b]$. В этом случае $x^{-1}nx \in x^{-1}[a]x$ и $x^{-1}nx \in x^{-1}[b]x$. Отсюда по предложению 4 следует, что $x^{-1}nx \in [x^{-1}ax]$ и $x^{-1}nx \in [x^{-1}bx]$, т. е. $x^{-1}nx \in M$. Следовательно, $x^{-1}Lx \subseteq M$, и $x^{-1}Lx = M$.

Таким образом, все подгруппы, сопряжённые в группе G с любой подгруппой $[a_i] \cap [b_i]$, включены в подгруппу K. Поэтому утверждение теоремы верно. $\square$

Напомним, что выпуклая направленная нормальная подгруппа частично упорядоченной группы называется *о-идеалом* данной группы.

Из предыдущей теоремы и теоремы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 4. *Пусть G — интерполяционная группа. Выпуклая направленная подгруппа K, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп $[a_i] \cap [b_i]$ для всех пар почти ортогональных элементов a_i и b_i группы G, является о-идеалом группы G.*

Для доказательства теоремы 4 нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 7 [2, гл. I, § 4]. *Если в произвольной группе G подгруппа A включена в нормализатор подгруппы B, то $AB = BA$ — подгруппа группы G и существует сюръективный гомоморфизм подгруппы A на фактор-группу AB/B с ядром $A \cap B$.*

Доказательство теоремы 4. Из теоремы 2 следует существование выпуклой направленной подгруппы K, порождённой множеством $[a] \cup [b]$ в группе G.

Пусть $x \in [a]^+$. Тогда $bx = uxb$, где $u = bxb^{-1}x^{-1}$, и справедливы неравенства $e, u \leqslant b, bxb^{-1}$. Найдётся элемент $y \in G$, удовлетворяющий соотношениям $e, u \leqslant y \leqslant b, bxb^{-1}$. Так как по предложению 5 подгруппы $[a]$ и $[bab^{-1}]$ равны, то из последних неравенств следует, что $y \in [a] \cap [b]$, т. е. по теореме 8 верны неравенства $y < a, b$. Поэтому $u < a, b$ и $u^2 < a, b$.

Таким образом, $bxb^{-1}x^{-1}bxb^{-1}x^{-1} < b$, следовательно, $x^{-1}bx < b^2$. Так как $x^{-1}bx > e$ (иначе приходим к противоречию с предложением 6), то $x^{-1}bx \in [b]$, так как $[b]$ — выпуклая подгруппа группы G. Таким образом, положительный конус $[x^{-1}bx]^+$ является подмножеством подгруппы $[b]$. Отсюда по предложению 2 следует, что $[x^{-1}bx] \subseteq [b]$, так как группа $[x^{-1}bx]$ является направленной.

Далее, $xb = bxv$, где $v = x^{-1}b^{-1}xb$, и справедливы неравенства $e, v \leqslant \leqslant b, b^{-1}xb$. Тогда найдётся элемент $z \in G$, удовлетворяющий соотношениям $e, v \leqslant z \leqslant b, b^{-1}xb$. Так как по предложению 5 подгруппы $[a]$ и $[b^{-1}ab]$ равны, то из данных неравенств следует, что $z \in [a] \cap [b]$, т. е. по теореме 8 справедливы неравенства $z < a, b$. Поэтому $v < a, b$ и $v^2 < a, b$. Отсюда следует, что $xbx^{-1} < b^2$, поэтому $b < (x^{-1}bx)^2$. Значит, $b \in [x^{-1}bx]$, так как $[x^{-1}bx]$ — выпуклая подгруппа группы G. Таким образом, положительный конус $[b]^+$ является подмножеством подгруппы $[x^{-1}bx]$. Отсюда по предложению 2 следует, что $[b] \subseteq [x^{-1}bx]$, так как группа $[b]$ является направленной.

Так как по предложению 4 подгруппы $x^{-1}[b]x$ и $[x^{-1}bx]$ равны, учитывая доказанное, заключаем, что $x^{-1}[b]x = [b]$. Следовательно, множество $[a]^+$ включено в нормализатор подгруппы $[b]$. Отсюда по предложению 2 следует, что подгруппа $[a]$ включена в нормализатор подгруппы $[b]$. В этом случае из предложения 7 следует существование подгруппы

$$L = [a][b] = [b][a].$$

Направленность подгруппы L следует из направленности подгрупп-сомножителей.

Рассмотрим неравенства $u \leqslant g \leqslant v$ для некоторых элементов $u, v \in L$ и $g \in G$. Тогда $e \leqslant gu^{-1} \leqslant vu^{-1} = m$, где $m \in L^+$. Не теряя общности, можно считать, что $m = xy$ для элементов $x \in [a]^+$ и $y \in [b]^+$.

Так как $e \leqslant g \leqslant xy$, то по теореме 1 существуют элементы $g_1, g_2 \in G^+$, удовлетворяющие условиям $g = g_1g_2$ и $g_1 \leqslant x$, и $g_2 \leqslant y$. Так как подгруппы $[a]$ и $[b]$ являются выпуклыми в группе G, то $g \in L$, т. е. L — выпуклая подгруппа группы G. Простые рассуждения показывают, что $L = K$. Теорема доказана. $\square$

4. Гомоморфизмы интерполяционных групп

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых подгрупп интерполяционных групп.

Лемма 1. *Пусть G — интерполяционная группа и M — o-идеал группы G. Тогда фактор-группа G/M также является интерполяционной группой.*

Доказательство. Известно, что фактор-группа G/M является частично упорядоченной группой, в которой $aM \in (G/M)^+$, если существует элемент $a' \in \in aM \cap G^+$ (см., например, [1, гл. II, § 3, предложение 4]).

Пусть $aM, bM \leqslant cM, dM$ для некоторых элементов $a, b, c, d \in G$. Тогда в группе M найдутся элементы m_1, m_2, m_3, m_4, удовлетворяющие неравенствам $a \leqslant cm_1, dm_2$ и $b \leqslant cm_3, dm_4$.

Так как группа M направленная, то существуют элементы $m, n \in M$, для которых верны неравенства $m_1, m_3 \leqslant m$ и $m_2, m_4 \leqslant n$. Значит, справедливы неравенства $a, b \leqslant cm, dn$.

В группе G по условию леммы существует элемент x, для которого верны неравенства $a, b \leqslant x \leqslant cm, dn$. В этом случае в группе G/M имеют место соотношения $aM, bM \leqslant xM \leqslant cM, dM$. Следовательно, G/M — интерполяционная группа. □

Лемма 2. *Пусть G — интерполяционная группа и M — выпуклая подгруппа группы G. Тогда группа M также является интерполяционной группой.*

Доказательство. Пусть $a, b \leqslant c, d$ для некоторых элементов $a, b, c, d \in M$.

В группе G по условию существует элемент x, для которого верны неравенства $a, b \leqslant x \leqslant c, d$.

В силу выпуклости подгруппы M $x \in M$. □

Напомним некоторые свойства гомоморфизмов частично упорядоченных групп.

Предложение 8 [1, гл. II, § 3, предложение 3]. *Гомоморфизм f частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H является o-гомоморфизмом в том и только в том случае, когда $f(G^+) \subseteq H^+$.*

Предложение 9 [1, гл. II, § 3, теорема 3]. *Если f — o-гомоморфизм частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H, то ядро M этого гомоморфизма является выпуклой нормальной подгруппой группы G и существует изоморфизм $\varphi\colon G/M \to \operatorname{Im} f$, являющийся o-гомоморфизмом, для которого $\varphi(xM) = xf$ для любого $x \in G$.*

Доказательство теоремы 5. Из доказательства теоремы 4 следует, что подгруппа $[a]$ включена в нормализатор подгруппы $[b]$, поэтому подгруппа $[b]$ является нормальной подгруппой группы $[a][b]$, т. е. o-идеалом этой группы.

Так как по теореме 4 подгруппа $[a][b]$ выпуклая и направленная в интерполяционной группе, то по лемме 2 группа $[a][b]$ — интерполяционная группа. При этих условиях по лемме 1 существует интерполяционная группа K, равная фактор-группе группы $[a][b]$ по о-идеалу $[b]$.

Из леммы 2 следует, что $[a]$ — интерполяционная группа. Кроме того, по предложению 7 существует сюръективный гомоморфизм $f\colon [a] \to K$, определённый по правилу $f(x) = x[b]$ для любого $x \in [a]$) с ядром $M = [a] \cap [b]$. В этом случае по следствию 1 и предложению 9 M — о-идеал группы $[a]$. Согласно лемме 1 группа $L = [a]/M$ является интерполяционной.

Пусть $x \in ([a])^+$. Тогда $x[b] \in K^+$, т. е. $f(([a])^+) \subseteq K^+$. Значит, по предложению 8 функция f является о-гомоморфизмом.

По предложению 9 существует изоморфизм групп $\varphi\colon L \to K$ (определённый по правилу $\varphi(xM) = f(x)$ для любого $x \in [a]$), являющийся о-гомоморфизмом частично упорядоченных групп L и K.

Рассмотрим класс $X \in K^+$. Должен найтись элемент $x \in ([a][b])^+$, для которого $X = x[b]$. В этом случае $x = yz$ для некоторых элементов $y \in [a]$ и $z \in [b]$. По предложению 1 в направленных группах $[a]$ и $[b]$ найдутся элементы $a_1 \in [a]^+$ и $b_1 \in [b]^+$, для которых верны неравенства $y \leqslant a_1$ и $z \leqslant b_1$. Значит, справедливы неравенства $e \leqslant x \leqslant a_1 b_1$, из которых по теореме 1 следует существование элементов $u, v \in G^+$, удовлетворяющих условиям $x = uv$ и $u \leqslant a_1$, $v \leqslant b_1$. Так как подгруппы $[a]$ и $[b]$ выпуклы, то $u \in [a]$ и $v \in [b]$.

Таким образом, $X = uv[b] = u[b]$ для элемента $u \in [a]^+$ и $X = f(u) = \varphi(uM)$ для $uM \in L^+$, т. е. $\varphi^{-1}(X) \in L^+$. Значит, $\varphi^{-1}(K^+) \subseteq L^+$. Следовательно, по предложению 8 функция φ^{-1} — о-гомоморфизм, а функция φ — о-изоморфизм. Теорема доказана. □

Все утверждения теорем 4 и 5 остаются справедливыми, если подгруппы $[a]$ и $[b]$ заменить выпуклыми направленными подгруппами A и B интерполяционной группы соответственно (если подгруппа A содержится в нормализаторе подгруппы B). Поэтому справедливы следующие утверждения.

Теорема 11. *Пусть A и B — выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы G и подгруппа A содержится в нормализаторе подгруппы B. Тогда $AB = BA$ — выпуклая направленная подгруппа группы G.*

Теорема 12. *Пусть A и B — выпуклые направленные подгруппы интерполяционной группы G и подгруппа A содержится в нормализаторе подгруппы B. Тогда*

1) *существует сюръективный о-гомоморфизм интерполяционной группы A на интерполяционную группу AB/B с ядром $A \cap B$;*
2) *интерполяционная группа $A/A \cap B$ о-изоморфна интерполяционной группе AB/B.*

Для направленных интерполяционных групп соответствующие утверждения были получены ранее (см. [6,10]).

5. О подгруппах pl-групп

Прежде всего следует отметить, что о-идеал, о котором идёт речь в следствии 4, играет важную роль в теории pl-групп. В pl-группе, отличной от решёточно упорядоченной, такой о-идеал всегда существует и отличен от $\{e\}$. Фактор-группа по такому о-идеалу является решёточно упорядоченной группой (подробнее см. [5]).

Свойства о-гомоморфизмов pl-групп исследовались ранее в [9].

Доказательство теоремы 6. Пусть G — pl-группа, M — выпуклая направленная подгруппа группы G. Рассмотрим элемент $x \in G$ при условии, что $x^n \in M$ для некоторого целого числа $n > 0$.

Если $e \leqslant x$, то $x \leqslant x^n$, поэтому $x \in M$, так как M — выпуклая подгруппа группы G.

Если $x \leqslant e$, то $x^n \leqslant x$, поэтому $x \in M$, так как M — выпуклая подгруппа группы G.

Пусть x несравним с e. Тогда $x = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b группы G. В этом случае

$$x^n = (ab^{-1})^n = a(b^{-1}ab)(b^{-2}ab^2)\ldots(b^{-(n-1)}ab^{n-1})b^{-n} = uv^{-1},$$

где $u = a(b^{-1}ab)(b^{-2}ab^2)\ldots(b^{-(n-1)}ab^{n-1})$ и $v = b^n$.

Согласно предложению 3 и теореме 8 элементы $b^{-k}ab^k$ и b почти ортогональны в группе G для любого показателя степени $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Кроме того, по предложению 5 и теореме 8 справедливы равенства подгрупп

$$[a] = [b^{-1}ab] = [b^{-2}ab^2] = \ldots = [b^{-(n-1)}ab^{n-1}]. \tag{1}$$

Пусть $b \notin M$. Тогда по [4, теорема 1.1] существует максимальная выпуклая направленная подгруппа L группы G, удовлетворяющая условиям $b \notin L$ и $M \subseteq L$. В этом случае из [7, теорема 1.1] следует, что $a \in L$. Тогда по определению подгруппы $[a]$ положительный конус $[a]^+$ включается в L, поэтому по предложению 2 $[a] \subseteq L$.

В силу равенств (1) все элементы $b^{-k}ab^k$ принадлежат L, поэтому $u \in L$. Так как $x^n \in L$, то $b^n = v \in L$.

Так как верны неравенства $e \leqslant b \leqslant b^n$ и подгруппа L выпукла, то $b \in L$, но это противоречит выбору данной подгруппы.

Таким образом, $b \in M$, поэтому $v \in M$, и $u \in M$. Так как верны неравенства $e \leqslant a \leqslant u$ и подгруппа M выпуклая, то $a \in M$. Следовательно, $x \in M$. Теорема доказана. □

Напомним терминологию статьи [14].

Определение 3. Частично упорядоченная группа G называется $\mathcal{AO}$-группой, если любой элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = ab^{-1}$ для некоторых элементов a и b из G^+, удовлетворяющих условию 2) теоремы 8.

Нам понадобится следующее свойство частично упорядоченных групп.

Предложение 10 [14, лемма 2]. *Если M — выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы G, $m \in M$ и $m = ab^{-1}$ для некоторых элементов группы G, удовлетворяющих условию 2) теоремы 8, то $a \in M$ и $b \in M$.*

Для $\mathcal{AO}$-групп справедливо следующее утверждение.

Теорема 13. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа и $M \neq \{e\}$ — выпуклая направленная подгруппа группы G, для которой из включений $\{e\} \subset L \subseteq M$ следует, что $L = M$ для любой выпуклой направленной подгруппы L группы G. Если $m \in M$, то либо элементы e и m сравнимы, либо $m = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a, b \in G^+$, удовлетворяющих условию 2) теоремы 8. Кроме того, существуют целые числа $k > 0$ и $l > 0$, для которых верны неравенства $a \leqslant b^k$ и $b \leqslant a^l$.*

Доказательство. Пусть элемент $m \neq e$. Тогда в $\mathcal{AO}$-группе G $m = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a, b \in G^+$, удовлетворяющих условию 2) теоремы 8.

Так как M — выпуклая направленная подгруппа в группе G, то по предложению 10 $a, b \in M$. В этом случае по определению подгрупп $[a]$ и $[b]$ множества $[a]^+$ и $[b]^+$ включены в M, поэтому по предложению 2 $[a], [b] \subseteq M$.

Если $[a] = \{e\}$, то $a = e$, поэтому $m = b^{-1} \leqslant e$.

Если $[a] \neq \{e\}$, то по условию теоремы $M = [a]$, так как $[a]$ — выпуклая направленная подгруппа группы G.

Следовательно, $b \in [a]$. По определению подгруппы $[a]$ существует целое число $l > 0$, для которого верно неравенство $b \leqslant a^l$.

Если $[b] \neq \{e\}$, то по условию теоремы $M = [b]$, так как $[b]$ — выпуклая направленная подгруппа группы G. Но тогда $a \in [b]$, т. е. существует целое число $k > 0$, для которого верно неравенство $a \leqslant b^k$.

Если $[b] = \{e\}$, то $b = e$, поэтому $m = a \geqslant e$. □

Доказательство теоремы 7. Из определений 2 и 3 следует, что pl-группа G является $\mathcal{AO}$-группой, поэтому для группы G справедлива теорема 13.

Пусть элемент m несравним с единицей в группе M. Тогда по теореме 13 $m = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a, b \in G^+$, удовлетворяющих условию 2) теоремы 8. Из определения 2 и теоремы 8 следует, что в этом случае элементы a и b почти ортогональны в группе G.

По теореме 13 существуют целые числа $k > 0$ и $l > 0$, для которых верны неравенства $a \leqslant b^k$ и $b \leqslant a^l$.

Так как по определению 2 группа G интерполяционная, то по следствию 3 и теореме 8 элементы a и b^k (b и a^l) почти ортогональны в группе G. Но тогда по предложению 6 они несравнимы, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $e \leqslant m$ или $m \leqslant e$.

Пусть $u, v \in M^+$. Если $u \neq e$ и $v \neq e$, то $[u] \neq \{e\}$ и $[v] \neq \{e\}$. Тогда по определению подгрупп $[u]$ и $[v]$ положительные конусы этих подгрупп включены в подгруппу M, так как M — выпуклая подгруппа группы G. В этом случае по предложению 2 $[u] \subseteq M$ и $[v] \subseteq M$, так как $[u]$ и $[v]$ — выпуклые направленные подгруппы группы G. Значит, по условию теоремы $M = [u] = [v]$.

Из определения подгрупп $[u]$ и $[v]$ следует существование целых чисел $k > 0$ и $l > 0$, для которых верны неравенства $u \leqslant v^k$ и $v \leqslant u^l$. Теорема доказана полностью. $\square$

Литература

[1] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[2] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[3] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[4] Ширшова Е. Е. О псевдо структурно упорядоченных группах // Группы и модули. Теория игр: Сб. тр. МОПИ им. Н. К. Крупской. — М., 1973. — С. 10—18.

[5] Ширшова Е. Е. Ассоциированные подгруппы псевдо-решёточно упорядоченных групп // Алгебраические системы: Сб. тр. Ивановск. гос. унив. — Иваново, 1991. — С. 78—85.

[6] Ширшова Е. Е. Свойства гомоморфизмов групп Рисса // Успехи мат. наук. — 1991. — Т. 46, вып. 5 (281). — С. 157—158.

[7] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl-группы // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.

[8] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах pl-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 1. — С. 303—314.

[9] Ширшова Е. Е. Гомоморфизмы, сохраняющие p-ортогональность // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 939—952.

[10] Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 1. — С. 122—132.

[11] Conrad P. Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions // Acta Math. — 1966. — Vol. 116. — P. 199—221.

[12] Fuchs L. Riesz groups // Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa. — 1965. — Vol. 19, no. 3. — P. 1—34.

[13] Glass A. M. W. Polars and their application in directed interpolation groups // Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — Vol. 166. — P. 1—25.

[14] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.