Абелева группа
как прямое слагаемое группы умножений

А. А. АГАФОНОВ
Нижегородский государственный педагогический университет
e-mail: agafkaaa@mail.ru

А. М. СЕБЕЛЬДИН
Нижегородский государственный педагогический университет
e-mail: amseb@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, прямое слагаемое.

Аннотация

В данной работе рассматривается вопрос о выделении абелевой группы прямым слагаемым в группе умножений.

Abstract

A. A. Agafonov, A. M. Sebeldin, An Abelian group as a direct summand of the multiplication group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 9—12.

In this work, the question of extraction an Abelian group by direct summand in the multiplication groupe is considered.

Обозначения и определения из [3, 4] считаем стандартными. Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы.

Определение 1. Будем говорить, что группа A из некоторого класса абелевых групп $\mathbf{X}$ определяется группой своих умножений $\operatorname{Mult} A$ в этом классе, если в нём не существует группы B, такой что $\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Mult} B$ и A не изоморфна B. Класс всех таких групп будем обозначать через $\mathbf{X}(\mathrm{Mult})$. Если $\mathbf{X}(\mathrm{Mult}) = \mathbf{X}$, то класс $\mathbf{X}$ будем называть Mult-классом. Через $\mathrm{D}(A)$ и $\mathrm{R}(A)$ будем обозначать соответственно делимую и редуцированную части группы A, $A = \mathrm{R}(A) \oplus \mathrm{D}(A)$, где $\mathrm{R}(A)$ определяется с точностью до изоморфизма. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ — вполне разложимая абелева группа без кручения, где прямые слагаемые ранга 1 A_i имеют тип $\tau(A_i)$. Рассмотрим её каноническое разложение

$$A = \bigoplus_{\tau \in \Omega(A)} A^{\tau},$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 9—12.

где $\Omega(A)$ — множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 и

$$A^\tau = \bigoplus_{i\in I(\tau)} A_i, \quad I(\tau) = \{i \in I\colon \tau(A_i) = \tau\}.$$

Прежде всего сделаем полезные замечания, касающиеся строения группы $\mathrm{Mult}\, A$ для вполне разложимой абелевой группы без кручения A. Поскольку

$$\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Hom}\bigl(A, \mathrm{Hom}(A, A)\bigr) \cong \prod_{i,j\in I}\prod \mathrm{Hom}\bigl(A_i, \mathrm{Hom}(A_j, A)\bigr),$$

то, учитывая [5], можем сформулировать следующее замечание.

Замечание 1.

$$\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Hom}\bigl(A, \mathrm{Hom}(A, A)\bigr) \cong \prod\prod \bigoplus_{i,j,k\in I} \mathrm{Hom}\bigl(A_i, \mathrm{Hom}(A_j, A_k)\bigr).$$

Ввиду [1, теорема 1] можем отметить следующее.

Замечание 2. Если A — группа без кручения ранга $\mathrm{r}(A)$, то $\mathrm{D}(\mathrm{Mult}\, A) \cong$ $\cong \bigoplus_\alpha \mathbf{Q}$, где $\alpha = \mathrm{r}(A)^2\mathrm{r}\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$, если ранг $\mathrm{r}(A)$ конечен, и $\alpha = 2^{\mathrm{r}(A)}$, если этот ранг бесконечен.

Следствие. *Делимая часть группы без кручения A всегда является прямым слагаемым в группе $\mathrm{Mult}\, A$. Таким образом, для поставленной задачи достаточно рассматривать только редуцированный случай.*

Теорема 1. *Вполне разложимая абелева группа без кручения A выделяется прямым слагаемым в группе умножений $\mathrm{Mult}\, A$ тогда и только тогда, когда множество минимальных типов в $\Omega(A)$ конечно и состоит только из идемпотентных типов.*

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ и $\Omega_m(A)$ — конечное множество минимальных идемпотентных типов. Рассмотрим каноническое разложение

$$A = \bigoplus_{\tau\in\Omega(\tau)} A^\tau.$$

Известно [3], что $\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Hom}\bigl(A, \mathrm{Hom}(A, A)\bigr)$. Следовательно,

$$\mathrm{Mult}\, A \cong \prod_{\tau\in\Omega(\tau)} \mathrm{Hom}\bigl(A^\tau, \mathrm{Hom}(A, A)\bigr).$$

Зафиксируем в A^τ для каждого типа $\tau \in \Omega_m(A)$ прямое слагаемое ранга 1 $A_i(\tau)$ типа τ и рассмотрим разложение

$$A = A' \oplus A'',$$

где

$$A' = \bigoplus_{\tau\in\Omega_m(A)} A_i(\tau).$$

Заметим, что
$$\mathrm{Mult}\, A' \cong A'.$$
Тогда
$$\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Hom}\big(A' \oplus A'', \mathrm{Hom}(A' \oplus A'', A)\big).$$
Поскольку A' — группа без кручения конечного ранга, то (см. [5])
$$\mathrm{Hom}(A', A) \cong A \oplus A^*.$$
Таким образом, получаем
$$\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Hom}\big(A' \oplus A'', \mathrm{Hom}(A' \oplus A'', A)\big) \cong A \oplus A^{**}.$$
Итак, снова получаем, что группа $\mathrm{Mult}\, A$ содержит прямое слагаемое, изоморфное группе A.

Докажем необходимость. Предположим вначале, что
$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n \text{ —}$$
группа конечного ранга и в $\Omega(A)$ существует минимальный неидемпотентный тип $\tau(A_m)$, $m \leqslant n$. Следовательно, чтобы имелось прямое слагаемое A_m, в $\mathrm{Mult}\, A$ должна существовать группа A_k, $k \leqslant n$, большего типа, чем $\tau(A_m)$. В свою очередь для группы A_k найдётся группа A_l, $l \leqslant n$, большего типа, чем $\tau(A_K)$. Таким образом, получаем бесконечную цепочку, что невозможно ввиду конечности ранга. В случае же бесконечного ранга существование минимального неидемпотентного типа также даёт бесконечную строго возрастающую цепочку неидемпотентных типов в $\Omega(A)$. Однако соответствующее прямое слагаемое бесконечного ранга является прямым произведением в $\mathrm{Mult}\, A$, и следовательно, соответствующего вполне разложимого прямого слагаемого в группе $\mathrm{Mult}\, A$ нет. Если же множество $\Omega_m(A)$ бесконечно, то снова получаем в группе $\mathrm{Mult}\, A$ прямое слагаемое, равное прямому произведению групп ранга 1, входящих в разложение группы A, и следовательно, группа $\mathrm{Mult}\, A$ не содержит A в качестве прямого слагаемого. □

Рассмотрим теперь случай, когда имеет место изоморфизм $\mathrm{Mult}\, A \cong A$.

Теорема 2. *Вполне разложимая абелева группа без кручения A изоморфна группе умножений $\mathrm{Mult}\, A$ тогда и только тогда, когда $A \cong \mathrm{Hom}(A, A)$.*

Доказательство. Достаточность очевидна.

Докажем необходимость. Если $A \cong \mathrm{Mult}\, A$, то согласно теореме 1 множество $\Omega_m(A)$ конечно и состоит из идемпотентных типов. Учитывая [2], получаем, что группа A конечного ранга и $\mathrm{card}\big(\Omega(A)\big) = \mathrm{r}\big(\mathrm{Hom}(A, A)\big)$. Кроме того, группа $\mathrm{Hom}(A, A)$ также содержит группу A в качестве прямого слагаемого. Следовательно, $\mathrm{card}\big(\Omega(A)\big) = \mathrm{r}(A)$. Из равенства $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}\big(\mathrm{Hom}(A, A)\big)$ вытекает равенство $\mathrm{card}\big(\Omega(A)\big) = \mathrm{card}\big(\Omega_m(A)\big) = \mathrm{r}(A)$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(A, A) \cong A$. □

Учитывая [2], сформулируем следующее замечание.

Замечание 3. Вполне разложимая абелева группа без кручения A изоморфна группе умножений $\mathrm{Mult}\,A$ тогда и только тогда, когда она разложима в конечную прямую сумму вполне характеристических подгрупп идемпотентных типов ранга 1.

Замечание 4. Класс абелевых групп, изоморфных аддитивной группе своего кольца эндоморфизмов, является Mult-классом.

Литература

[1] Агафонов А. А., Себельдин А. М. Определяемость абелевых групп группой умножений // Материалы Всероссийского симп. «Абелевы группы». — Бийск, 2010. — С. 13—16.

[2] Себельдин А. М. Группы гомоморфизмов вполне разложимых абелевых групп без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1973. — Т. 7. — С. 77—84.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[5] Sebeldin A. M. Isomorphisme naturel des groupes des homomorphismes des groupes abéliens // Ann. de L'IPGANC, Conakry. Sér. A. — 1982. — Vol. 8. — P. 155—158.