Определяемость вполне разложимой блочно жёсткой абелевой группы без кручения её группой автоморфизмов

В. К. ВИЛЬДАНОВ
Нижегородский государственный педагогический университет имени Козьмы Минина
e-mail: kadirovi4@googlemail.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа без кручения, группа автоморфизмов.

Аннотация

Рассматривается вопрос определяемости группы её группой автоморфизмов в некоторых классах абелевых групп. Получен критерий определяемости блочно жёсткой группы её группой автоморфизмов в классе вполне разложимых блочно жёстких абелевых групп без кручения.

Abstract

V. K. Vildanov, Determinability of a completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian group by its automorphism group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 13—19.

In this paper, we consider the question of determinability of an Abelian group by its automorphism group in the class of completely decomposable block-rigid torsion-free Abelian groups.

В [1] рассматривается вопрос определяемости вполне разложимой абелевой группы ранга 2 её группой автоморфизмов. В настоящей работе получен критерий определяемости блочно жёсткой группы её группой автоморфизмов в классе блочно жёстких вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга.

Определение 1. Будем говорить, что абелева группа A определяется её группой автоморфизмов в классе групп $\mathbf{X}$, если из того, что $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, где $B \in \mathbf{X}$, всегда следует, что $A \cong B$.

Введём необходимые обозначения:

$\mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ — класс вполне разложимых абелевых групп без кручения,

$[y_{ij}]$ — матрица с элементами y_{ij},

$[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — блочно диагональная (диагональная) матрица с элементами a_i на диагонали,

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 13—19.

I_n — единичная матрица порядка n,
$\mathrm{E}(A)$ — кольцо эндоморфизмов абелевой группы A,
$\mathrm{End}(A)$ — аддитивная группа эндоморфизмов абелевой группы A,
$\mathrm{r}(A)$ — ранг вполне разложимой абелевой группы без кручения A,
$\tau(A)$ — тип однородной абелевой группы без кручения A,
A_τ — группа без кручения типа τ ранга 1,
A^τ — однородная компонента группы A типа τ,
Ω_A — множество всех различных типов прямых слагаемых вполне разложимой абелевой группы без кручения A,
$\mathrm{Z}(G)$ — центр группы G,
$\mathrm{C}_G(M)$ — централизатор множества M в некоторой группе G.

Другие обозначения будут вводиться по ходу изложения.

Определение 2. Группу $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ назовём блочно жёсткой, если типы из Ω_A попарно несравнимы.

Обозначим $\mathbf{F}_{\mathrm{br}}$ класс вполне разложимых блочно жёстких абелевых групп без кручения конечного ранга.

Пусть $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{br}}$. Тогда

$$\mathrm{Aut}\, A \cong \prod_{\tau\in\Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^\tau,$$

где

$$\mathrm{Aut}\, A^\tau \cong \mathrm{GL}_{n(\tau)}(R), \quad R = \mathrm{E}(A_\tau), \quad n(\tau) = \mathrm{r}(A^\tau).$$

В дальнейшем, когда это удобно, мы будем отождествлять группу $\mathrm{Aut}\, A$ и группу соответствующих матриц.

Лемма 1. *Пусть группы $A, B \in \mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ конечного ранга и*

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^\tau \overset{\varphi}{\cong} \prod_{\tau\in\Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^\tau.$$

Тогда

1) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = n$;
2) $|\Omega_A| = |\Omega_B| = k$;
3) *для любого $\tau \in \Omega_A$, $\mathrm{r}(A^\tau) > 1$, найдётся такой $\omega \in \Omega_B$, что $\varphi\colon K_{\tau,A} \to K_{\omega,B}$ и $\mathrm{r}(A^\tau) = \mathrm{r}(B^\omega)$, где*

$$K_{\tau,A} = \Big\{\beta \in \prod_{\tau\in\Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^\tau : \beta^2 = 1,\ \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_{i(\tau)}, \ldots, \beta_k],\ \beta_{i(\tau)} \in \mathrm{Z}(\mathrm{Aut}\, A^\tau)\Big\}$$

и $K_{\tau,A}$ состоит из диагональных инволюций.

Доказательство. 1. Пусть K — множество диагональных инволюций из $\operatorname{Aut} A$. Тогда $|K| = 2^n$, $n = \mathrm{r}(A) = \sum\limits_{\tau\in\Omega_A} \mathrm{r}(A^\tau)$. Известно, что каждый автоморфизм $\alpha \in \operatorname{Aut} A$ продолжается единственным образом до автоморфизма делимой оболочки $D(A)$ группы A, причём $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}\big(D(A)\big)$. Значит,

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau < \operatorname{Aut} D(A) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q}).$$

В группе $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ всякая система коммутирующих инволюций содержит не более 2^n инволюций [2, с. 72], значит, это верно и для $\prod\limits_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau$. Так как коммутирующие инволюции при изоморфизме сохраняются, то $\prod\limits_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau$ содержит систему $\varphi(K)$ коммутирующих инволюций порядка 2^n. Значит, $\mathrm{r}(A) \leqslant \mathrm{r}(B)$.

Рассматривая систему диагональных инволюций в группе $\prod\limits_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau$, получим, что $\mathrm{r}(A) \geqslant \mathrm{r}(B)$. Следовательно, $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.

2. Рассмотрим в группах $\prod\limits_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau$ и $\prod\limits_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau$ системы центральных инволюций J и J'. Заметим, что $|J| = 2^{|\Omega_A|}$, $|J'| = 2^{|\Omega_B|}$. Так как образ центральной инволюции при изоморфизме есть центральная инволюция, то $|\Omega_A| = |\Omega_B| = k$.

3. На множестве $K < \prod\limits_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau$ диагональных инволюций действует группа перестановок $S = \prod\limits_{\tau\in\Omega_A} \mathrm{S}_{n(\tau)}$, где $\mathrm{S}_{n(\tau)}$ — симметрическая группа степени $n(\tau)$, действующая на множестве диагональных инволюций из $\operatorname{Aut} A^\tau$.

Рассмотрим $\varphi(K) < \prod\limits_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau$. Пусть $\beta \in \varphi(K)$. Тогда $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_k]$, $\beta^2 = I$ и, значит, $\beta_i^2 = 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, k$. Из условий 1) и 2) леммы следует, что множеству $\varphi(K)$ соответствует множество $2^{\mathrm{r}(B^\tau)}$ коммутирующих инволюций $\bar{K}_\tau \subset \operatorname{Aut} B^\tau$ для каждого $\tau \in \Omega_B$. Так как $\operatorname{Aut} B^\tau < \mathrm{GL}_{\mathrm{r}(B^\tau)}(\mathbf{Q})$, то существует матрица $g_\tau \in \mathrm{GL}_{\mathrm{r}(B^\tau)}(\mathbf{Q})$, такая что $g_\tau \bar{K}_\tau g_\tau^{-1}$ — множество диагональных инволюций.

Таким образом,

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \overset{\psi}{\cong} \prod_{\tau\in\Omega_B} g_\tau \operatorname{Aut} B^\tau g_\tau^{-1},$$

причём изоморфизм ψ сохраняет диагональный вид инволюции. Тогда на множестве $\psi(K)$ также действует группа перестановок S.

Пусть $\tau' \in \Omega_A$, $\mathrm{r}(A^{\tau'}) > 1$ и $K_{\tau',A} \subset K$. Покажем, что $\varphi\colon K_{\tau',A} \to K_{\omega,B}$.

На множестве $K_{\tau',A}$ действует группа перестановок S, причём $S^* < S$, $S^* \cong \mathrm{S}_{n(\tau')}$, действует на $K_{\tau,A}$ тождественно, т. е. для любого $\alpha \in K_{\tau,A}$ и любого $\sigma \in S^*$, $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha$. На $\psi(K_{\tau',A})$ тривиально действует S^*, значит, для некоторого $Y_{\tau'} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ и каждой диагональной инволюции $[a_{ij}] \in \psi(K_{\tau',A})$ имеем $a_{xx} = a_{yy} = \pm 1$ для всех $x \neq y$, где $x, y \in Y_{\tau'}$, $|Y_{\tau'}| = n(\tau')$. Так как на элементах a_{yy} $(y \in Y)$ действует группа S^*, то они находятся в одном блоке.

Пусть эти элементы находятся в блоке, соответствующем типу $\omega \in \Omega_B$. Тогда на $\psi(K_{\tau',A})$ действует группа перестановок, изоморфная

$$S_1 = \prod_{\tau \in \Omega_B \setminus \{\omega\}} \mathrm{S}_{n(\tau)} \times \mathrm{S}_{n(\tau')} \times \mathrm{S}_{n(\omega)-n(\tau')}.$$

Так как $S_1 \cong S$, то $n(\omega) = n(\tau')$. Получили, что $g_\omega \bar{K}_\omega g_\omega^{-1}$ — множество центральных инволюций в $\mathrm{GL}_{\mathrm{r}(B^\omega)}(\mathbf{Q})$ и $\mathrm{r}(A^{\tau'}) = \mathrm{r}(B^\omega)$. Тогда $\bar{K}_\omega \subset Z(\mathrm{Aut}\, B^\omega)$, и значит, $\varphi\colon K_{\tau',A} \to K_{\omega,B}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть группы* $A, B \in \mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ *конечного ранга,* $2A = A$, $2B = B$ *и*

$$\prod_{\tau \in \Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^\tau \overset{\varphi}{\cong} \prod_{\tau \in \Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^\tau.$$

Тогда для любого $\tau \in \Omega_A$, $\mathrm{r}(A^\tau) > 1$, *найдётся* $\omega \in \Omega_B$, *такой что*

$$\mathrm{End}(A^\tau) \cong \mathrm{End}(B^\omega).$$

Доказательство. Пусть $\tau' \in \Omega_A$, $\mathrm{r}(A^{\tau'}) > 1$. Обозначим

$$\Gamma(A) = \prod_{\tau \in \Omega_A} \mathrm{Aut}\, A^\tau, \quad \Gamma(B) = \prod_{\tau \in \Omega_B} \mathrm{Aut}\, B^\tau.$$

Если $K_{\tau',A} \subset K$, то по лемме 1 имеем, что $\varphi\colon K_{\tau',A} \to K_{\omega,B}$. Следовательно, $\varphi\colon \mathrm{C}_{\Gamma(A)}(K_{\tau',A}) \to \mathrm{C}_{\Gamma(A)}(K_{\omega,B})$. Далее вместо $\mathrm{C}_{\Gamma(A)}(K_{\tau',A})$ будем писать $\mathrm{C}(K_{\tau',A})$. Имеем

$$\mathrm{C}(K_{\tau',A}) \cong \mathrm{Aut}\, A^{\tau'} \times \prod_{\tau \in \Omega_A \setminus \{\tau'\}} P_\tau, \quad \mathrm{C}(K_{\omega,B}) \cong \mathrm{Aut}\, B^\omega \times \prod_{\tau \in \Omega_B \setminus \{\omega\}} R_\tau,$$

где P_τ — подгруппа диагональных матриц из $\mathrm{Aut}\, A^\tau$, R_τ — некоторая коммутативная подгруппа $\mathrm{Aut}\, B^\tau$ ($g_\tau R_\tau g_\tau^{-1}$ — подгруппа диагональных матриц в $g_\tau \,\mathrm{Aut}\, B^\tau g_\tau^{-1}$). Таким образом,

$$\begin{gathered}
\mathrm{C}(K_{\tau',A}) \cong \mathrm{C}(K_{\omega,B}),\\
\mathrm{C}(K_{\tau',A})/\mathrm{Z}\big(\mathrm{C}(K_{\tau',A})\big) \cong \mathrm{C}(K_{\omega,B})/\mathrm{Z}\big(\mathrm{C}(K_{\omega,B})\big),\\
\mathrm{Aut}\, A^{\tau'}/\mathrm{Z}(\mathrm{Aut}\, A^{\tau'}) \cong \mathrm{Aut}\, B^\omega/\mathrm{Z}(\mathrm{Aut}\, B^\omega),\\
\mathrm{PGL}_{n(\tau')}\big(\mathrm{E}(A_{\tau'})\big) \cong \mathrm{PGL}_{n(\omega)}\big(\mathrm{E}(B_\omega)\big).
\end{gathered}$$

Тогда если $\mathrm{r}(A^{\tau'}) > 2$, то $\mathrm{E}(A_{\tau'}) \cong \mathrm{E}(B_\omega)$, $n(\tau') = n(\omega)$ [2]. Следовательно, $\mathrm{End}(A^\tau) \cong \mathrm{End}(B^\omega)$.

Пусть теперь $\mathrm{r}(A^{\tau'}) = 2$ и $\mathrm{C}(K_{\tau',A}) \cong \mathrm{C}(K_{\omega,B})$. Рассмотрим

$$\begin{gathered}
\gamma \in \mathrm{C}(K_{\tau',A}), \quad \gamma(h) = [\gamma_1, \ldots, \gamma_{j(\tau')}, \ldots, \gamma_k],\\
\gamma_i = I_{n(i)} \ \text{ для всех } \ i \neq j, \quad \gamma_{i(\tau')} = T(h) = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{gathered}$$

$$\delta \in \mathrm{C}(K_{\tau',A}), \quad \delta = [\delta_1, \ldots, \delta_{j(\tau')}, \ldots, \delta_k],$$
$$\delta_i = I_{n(i)} \ \text{ для всех } \ i \neq j, \quad \delta_{j(\tau')} = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В [1] показано, что всякую нецентральную инволюцию в группе $\mathrm{Aut}\, B^\omega$ можно привести подходящим внутренним автоморфизмом к инволюции вида M_0. Таким образом, мы можем считать, что

$$\varphi(\delta) = [\pm I_{n(1)}, \ldots, M_0, \ldots, \pm I_{n(k)}].$$

При таком изоморфизме диагональные матрицы переходят в диагональные.

Имеем следующие уравнения:

$$(\gamma(h)\delta)^2 = I,$$
$$\gamma(h)\mu\gamma(h)\mu^{-1} = \mu\gamma(h)\mu^{-1}\gamma(h),$$

где μ — некоторая диагональная матрица. Так как $2A = A$, то для любого $h \in \in \mathrm{End}(A_{\tau'})$ имеем, что $h/2 \in \mathrm{End}(A_{\tau'})$ и $\gamma(h) = \gamma(h/2)^2$. Пусть

$$\varphi\bigl(\gamma(h/2)\bigr) = \nu = [\nu_1, \ldots, \nu_{j(\omega)}, \ldots, \nu_k].$$

Тогда из того, что $\bigl(\nu\varphi(\delta)\bigr)^2 = I$, получим, что $\nu_i^2 = I_{n(i)}$ для всех $i \neq j$. Следовательно,

$$\varphi\bigl(\gamma(h)\bigr) = \nu^2 = [I_1, \ldots, U, \ldots, I_{n(k)}], \quad U \in \mathrm{Aut}\, B^\omega.$$

Далее можем проводить вычисления только для матриц из $\mathrm{Aut}\, A^{\tau'}$ и $\mathrm{Aut}\, B^\omega$. Имеем $(UM_0)^2 = I$. Пусть

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x_1x_2 = x_2x_4, \quad x_3x_1 = x_4x_3, \quad x_1^2 - x_2x_3 = x_4^2 - x_3x_2 = 1.$$

Из уравнения $U\mu'U\mu'^{-1} = \mu'U\mu'^{-1}U$ для

$$\mu' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad z^2 \neq 1,$$

получаем, что $x_2x_3 = 0$. Если $x_2 \neq 0$, $x_3 = 0$, то $x_1 = x_4 = \pm 1$. Таким образом, $U = \pm T(h^*)$. Аналогично если $x_3 \neq 0$, $x_2 = 0$, то

$$U = \pm W(h^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h^* & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $x_3 = x_2 = 0$, то U — диагональная матрица, что невозможно.

Пусть $\varphi\bigl(T(h)\bigr) = T(s)$ для некоторого $h \neq 0$. Тогда $\varphi\bigl(T(h')\bigr) = \pm T(s')$ для любого $h' \neq 0$. Предположим, что это не так: $\varphi\bigl(T(h')\bigr) = \pm W(s')$. Подействуем φ на обе части равенства $T(h)T(h') = T(h')T(h)$. Получим, что $T(s)W(s') = = W(s')T(s)$. Следовательно, $ss' = 0$, а значит, $\varphi\bigl(T(h)\bigr)$ или $\varphi\bigl(T(h')\bigr)$ — диагональная матрица. Тогда $h = 0$ или $h' = 0$, что невозможно. Таким образом,

$\varphi\big(T(h)\big) = \pm T(h^*)$. Если же $\varphi\big(T(h)\big) = \pm W(h^*)$, то рассмотрим композицию φ с внутренним автоморфизмом группы $\operatorname{Aut} B^\omega$, порождённым элементом $\lambda \in \operatorname{Aut} B^\omega$,

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda\varphi\big(T(h)\big)\lambda^{-1} = \pm T(h^*).$$

Таким образом, задано некоторое отображение $\sigma\colon h \mapsto h^*$.

Итак, можно считать, что

$$\varphi\big(T(x)\big) = \chi(x)T\big(\sigma(x)\big),$$

где

$$\sigma(x)\colon \mathrm{E}(A_\tau) \to \mathrm{E}(B_\omega), \quad \chi(x)\colon \mathrm{E}(A_\tau) \to \{\pm 1\}.$$

Так как $T(x)T(y) = T(x+y)$, то

$$\chi(x+y)T\big(\sigma(x+y)\big) = \chi(x)\chi(y)T\big(\sigma(x)\big)T\big(\sigma(y)\big) = \chi(x)\chi(y)T\big(\sigma(x)+\sigma(y)\big).$$

Получим, что $\chi(x)\chi(y) = \chi(x+y)$ и $T\big(\sigma(x+y)\big) = T\big(\sigma(x)+\sigma(y)\big)$, а значит, $\sigma(x+y) = \sigma(x)+\sigma(y)$.

Так как $\sigma(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то $\sigma(x)$ — инъективное отображение. Повторяя те же рассуждения для φ^{-1}, получаем, что $\sigma(x)$ — изоморфизм групп $\operatorname{End}(A_{\tau'})$ и $\operatorname{End}(B_\omega)$. Следовательно, $\operatorname{End}(A^\tau) \cong \operatorname{End}(B^\omega)$. □

Теорема. *Пусть $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{br}}$ и $2A = A$. Группа A определяется в классе 2-делимых групп из $\mathbf{F}_{\mathrm{br}}$ её группой автоморфизмов тогда и только тогда, когда A почти делимая и $\mathrm{r}(A^\tau) > 1$ для любого типа $\tau \in \Omega_A$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть A определяется её группой автоморфизмов. Предположим, что группа A не почти делимая. Тогда A не определяется её кольцом эндоморфизмов, а значит, не определяется и группой автоморфизмов. Пусть теперь A — почти делимая группа и найдётся $\tau' \in \Omega_A$, $\mathrm{r}(A^{\tau'}) = 1$. Так как $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{br}}$, то

$$\operatorname{Aut} A \cong \prod_{\tau \in \Omega_A \setminus \{\tau'\}} \operatorname{Aut} A^\tau \times \operatorname{Aut} A^{\tau'}.$$

Пусть

$$B = \bigoplus_{\tau \in \Omega_A \setminus \{\tau'\}} A^\tau \oplus B_\omega,$$

где B_ω — почти делимая группа и тип ω не сравним ни с одним типом из Ω_A. Тогда $A \not\cong B$ и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, а значит, группа A не определяется своей группой автоморфизмов.

Достаточность следует из леммы 2 и определяемости почти делимых групп их группами эндоморфизмов [3]. □

Литература

[1] Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестн. Нижегородск. унив. им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — Вып. 3 (1). — С. 174—177.

[2] О'Мира О. Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. — М.: Мир, 1976.

[3] Себельдин А. М. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов. I // Мат. заметки. — 1973. — Т. 14, № 6. — С. 867—878.