Векторные группы с изоморфными голоморфами*

И. Э. ГРИНШПОН
Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники
e-mail: irina-grinshpon@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: голоморф, векторная группа, голоморфно изоморфные группы, характеристическая подгруппа, группа гомоморфизмов.

Аннотация

В статье исследуются векторные группы, голоморфы которых изоморфны. В связи с исследуемым вопросом вводятся понятия полухарактеристического и $\Gamma(G)$-разложения группы. Описываются свойства таких разложений. Найдены условия изоморфизма голоморфно изоморфных векторных групп.

Abstract

I. E. Grinshpon, Vector groups with isomorphic holomorphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 21—30.

In this paper, vector groups whose holomorphs are isomorphic are studied. In connection with the studied problem, the concepts of a semi-characteristic and $\Gamma(G)$-decomposition of a group are introduced. The properties of such decompositions are described. Isomorphism conditions of holomorphically isomorphic vector groups are found.

Голоморфом группы G называется полупрямое расширение группы G с помощью группы её автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Голоморф $\Gamma(G)$ группы G можно рассматривать как множество всех упорядоченных пар (g,φ), где $g\in G$, $\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$ с групповой операцией, определённой по правилу $(g,\varphi)+(h,\psi)=(g+\varphi h,\varphi\psi)$ для любых элементов $(g,\varphi),(h,\psi)\in\Gamma(G)$. Нейтральным элементом в $\Gamma(G)$ является элемент $(0,\varepsilon)$ (ε — тождественный автоморфизм), а элементом, противоположным элементу (g,φ), — элемент $(-\varphi^{-1}g,\varphi^{-1})$. Элементы вида (g,ε) образуют в голоморфе $\Gamma(G)$ нормальную подгруппу, изоморфную группе G, а элементы вида $(0,\varphi)$ — подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Aut}(G)$. Часто вместо того, чтобы записывать элементы группы $\Gamma(G)$ в виде (g,ε) и $(0,\varphi)$, будем просто писать g и φ соответственно. Для групповой операции в группе $\mathrm{Aut}(G)$ пользуемся мультипликативной записью, а для групповых операций в G и $\Gamma(G)$ — аддитивной записью.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»).

Если G и H — изоморфные группы, то их голоморфы $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ также изоморфны. Однако из изоморфизма голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ не всегда следует изоморфизм групп G и H. Группы с изоморфными голоморфами называются *голоморфно изоморфными*. Исследованию голоморфно изоморфных групп посвящён ряд работ У. Миллса, Дж. А. Миллера и других алгебраистов. Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [11]. Среди вопросов, связанных с голоморфами абелевых групп, важное место занимает вопрос об определяемости групп своим голоморфом. У. Миллс [12] показал, что всякая конечно порождённая абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порождённых абелевых групп. Ряд интересных результатов о свойствах голоморфов абелевых групп и об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [1—5].

Будем говорить, что группа G определяется в классе $\mathfrak{A}$ своим голоморфом, если для любой группы H из этого класса из голоморфного изоморфизма групп G и H (т. е. из изоморфизма голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$) следует изоморфизм самих групп G и H.

Известно, что всякая абелева группа G является максимальной абелевой нормальной подгруппой в своём голоморфе. Если S — нормальная абелева подгруппа в $\Gamma(G)$ и S_1 и Φ — множества всех первых и вторых компонент элементов группы S соответственно, то S_1 — характеристическая подгруппа группы G, Φ — нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$. Если $S \neq 0$, то $S_1 \neq 0$ [6].

Подгруппа S голоморфа $\Gamma(G)$ называется *голоморфно разложимой*, если для любого элемента $(g,\varphi) \in S$ следует, что $(g,\varepsilon) \in S$ и $(0,\varphi) \in S$, т. е. $S = S_1 \oplus \Phi$, где S_1 и Φ — множества всех первых и вторых компонент элементов группы S соответственно. Понятие голоморфной разложимости групп было введено И. Х. Беккером [5].

Так как всякая максимальная абелева нормальная подгруппа голоморфа абелевой группы без элементов порядка 2 голоморфно разложима, то любая абелева группа без кручения голоморфно разложима [5].

Пусть G и H — голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения ($\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$), и пусть $\mu\colon \Gamma(G) \to \Gamma(H)$ — изоморфное отображение группы $\Gamma(G)$ на группу $\Gamma(H)$. Следуя И. Х. Беккеру [5], рассмотрим прямые разложения групп G и H, индуцированные изоморфизмом голоморфов. Каждая из групп G и H, как максимальная абелева нормальная подгруппа своего голоморфа, изоморфна максимальной абелевой нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Поэтому $H' = \mu G$ и $G' = \mu^{-1}H$ — максимальные абелевы нормальные подгруппы голоморфов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ соответственно. Имеем, что $\mu G = H' = H_1 \oplus \Psi$, $\mu^{-1}H = G' = G_1 \oplus \Phi$, где G_1, H_1, Φ, Ψ — множества всех первых, вторых компонент групп G' и H' соответственно. Так как $G_1 = G \cap G'$, $H_1 = H \cap H'$, то

$$\mu G_1 = \mu(G \cap G') = \mu G \cap \mu G' = H' \cap H = H_1.$$

Следовательно, $H_1 \cong G_1$. Группы G_1 и H_1 — характеристические подгруппы групп G и H соответственно.

Подгруппы G_1 и H_1 выделяются прямыми слагаемыми в группах G и H соответственно. Действительно,

$$H = \mu G' = \mu(G_1 \oplus \Phi) = \mu G_1 \oplus \mu\Phi = H_1 \oplus H_2,$$

где $H_2 = \mu\Phi$. Аналогично получаем, что $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_2 = \mu^{-1}\Psi$. Таким образом, $H_2 \cong \Phi$, $G_2 \cong \Psi$.

Пусть $G = G_1 \oplus G_2$, $H = H_1 \oplus H_2$ — разложения групп G и H, индуцированные изоморфизмом голоморфов.

Заметим, что всякий автоморфизм $\varphi \in \Phi$ определяет некоторый гомоморфизм η группы G_2 в группу G_1. Действительно, если $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, то $\varphi g_1 = g_1$, $\varphi g_2 = g_2 + g_1'$, где $g_1' \in G_1$. Тогда полагаем $\eta g_2 = g_1'$. Обратно, всякий гомоморфизм $\eta \in \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$ определяет автоморфизм группы G, индуцирующий тождество на G_1 и отображающий всякий элемент $g_2 \in G_2$ на $g_2 + g_1'$, где $g_1' = \eta g_2$. Нетрудно убедиться в том, что $\Phi \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$. Группа Φ — максимальная абелева нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$, всякий элемент φ которой индуцирует тождество на G_1 и гомоморфизм группы G_2 в группу G_1 [1]. Аналогично для группы H получаем, что $\Psi \cong \mathrm{Hom}(H_2, H_1)$.

Итак, $G = G_1 \oplus G_2$, $H = H_1 \oplus H_2$, где G_1 и H_1 — характеристические подгруппы групп G и H соответственно, $G_1 \cong H_1$, $G_2 \cong \mathrm{Hom}(H_2, H_1)$, $H_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2, G_1), G_1) \cong \mathrm{Hom}(H_2, H_1) \cong G_2$.

Разложение $G = A \oplus B$ группы G назовём *полухарактеристическим* (*A-полухарактеристическим*), если подгруппа A — характеристическая подгруппа группы G, а подгруппа B не является характеристической подгруппой группы G.

Разложение $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, индуцированное изоморфизмом голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$, назовём *Γ-разложением*. В частности, G_1 может совпадать с G ($G_2 = 0$). Такое Γ-разложение будем называть *тривиальным*. Любое нетривиальное Γ-разложение группы G является G_1-полухарактеристическим разложением.

В данной статье рассматриваются голоморфы векторных групп и исследуется вопрос об их определяемости своими голоморфами в некоторых классах абелевых групп.

Векторной группой называется прямое произведение групп без кручения ранга 1 [10, с. 199].

Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ — редуцированная векторная группа, мощность которой неизмерима, $G = G_1 \oplus G_2$ — некоторое её Γ-разложение. Тогда $G_1 = \prod\limits_{\alpha \in I_1} G_\alpha$, $G_2 = \prod\limits_{\beta \in I_2} G_\beta$, где $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ [13].

При доказательствах теорем будут использоваться следующие утверждения.

Теорема 1 [10, теорема 94.5]. *Пусть G — узкая группа и A_i $(i \in I)$ — группы без кручения, причём множество I неизмеримо. Существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}\Big(\prod_{i\in I} A_i, G\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i, G).$$

Теорема 2 [9, теорема 43.1]. *Существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\Big) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A_i, B).$$

Теорема 3 [9, теорема 43.2]. *Существует естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{i\in I} B_i\Big) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Для векторных групп справедливо следующее условие их определяемости своим голоморфом.

Теорема 4. *Векторная группа G, мощность которой неизмерима, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда всякое её Γ-разложение $G = G_1 \oplus G_2$ обладает свойством $\mathrm{Hom}(G_2, G_1) \cong G_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть векторная группа G определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп, т. е. из изоморфизма голоморфов групп G и H следует изоморфизм самих групп. Так как группы G и H изоморфны, то H — векторная группа. Пусть $G = G_1 \oplus G_2$, $H = H_1 \oplus H_2$ — Γ-разложения групп G и H, индуцированные изоморфизмом голоморфов этих групп. Пусть $\mathrm{T}(G)$ и $\mathrm{T}(H)$ — множества всех различных типов в канонических разложениях групп G и H соответственно. Так как G_1 характеристична в G, H_1 характеристична в H, то $\mathrm{T}(G_1) \cap \mathrm{T}(G_2) = \varnothing$, $\mathrm{T}(H_1) \cap \mathrm{T}(H_2) = \varnothing$. Учитывая, что любые два разложения группы A в прямое произведение групп без кручения ранга 1 изоморфны [14], из $G \cong H$, $G_1 \cong H_1$ выводим $G_2 \cong H_2$. Но $H_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$, поэтому $G_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$.

Достаточность. Пусть G — векторная группа, H — произвольная абелева группа и $\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$. Этому изоморфизму соответствуют Γ-разложения $G = G_1 \oplus G_2$, $H = H_1 \oplus H_2$, причём $G_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$. По свойству Γ-разложений $H_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$, откуда следует, что $G_2 \cong H_2$. Так как $G_1 \cong H_1$, то $G = G_1 \oplus G_2 \cong H_1 \oplus H_2 = H$. Таким образом, группа G определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп. □

Заметим, что достаточные условия теоремы справедливы для любых абелевых групп, т. е. произвольная абелева группа G, Γ-разложение которой удовлетворяет условию $G_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.

Пусть $G = \prod\limits_{i\in I} G_i$ — редуцированная векторная группа, $G = G_1 \oplus G_2$ — некоторое её Γ-разложение, $G_1 = \prod\limits_{\alpha\in I_1} G_\alpha$, $G_2 = \prod\limits_{\beta\in I_2} G_\beta = \prod\limits_{\mathbf{t}\in \mathrm{T}(G_2)} G_2^{(\mathbf{t})}$, где $\mathrm{T}(G_2)$ —

множество всех различных типов канонического разложения группы G_2, $G_2^{(\mathbf{t})}$ — однородная группа типа $\mathbf{t}$.

Введём следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}(\mathbf{t}) = \{\beta \in I_2 \mid \mathbf{t}(G_\beta) = \mathbf{t}\},\\
&T(\alpha) = \{\mathbf{t} \in \mathrm{T}(G_2) \mid \mathbf{t} \leqslant \mathbf{t}(G_\alpha)\},\\
&I_1' = \{\alpha \in I_1 \mid \mathrm{Hom}(G_2, G_\alpha) \neq 0\},\\
&I(\alpha) = \{\beta \in I_2 \mid \mathbf{t}(G_\beta) \leqslant \mathbf{t}(G_\alpha)\}.
\end{aligned}$$

Опишем некоторые свойства Γ-разложений векторной группы.

Рассмотрим группы $\mathrm{Hom}(G_2, G_1)$ и $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2, G_1), G_1)$.

Имеем

$$\mathrm{Hom}(G_2, G_1) \cong \mathrm{Hom}\Big(G_2, \prod_{\alpha \in I_1} G_\alpha\Big) \cong \prod_{\alpha \in I_1'} \mathrm{Hom}(G_2, G_\alpha)$$

(теорема 3). Так как редуцированная группа без кручения ранга 1 является узкой группой [15], то

$$\prod_{\alpha \in I_1'} \mathrm{Hom}(G_2, G_\alpha) = \prod_{\alpha \in I_1'} \mathrm{Hom}\Big(\prod_{\beta \in I_2} G_\beta, G_\alpha\Big) \cong \prod_{\alpha \in I_1'} \bigoplus_{\beta \in I(\alpha)} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha)$$

(теорема 1). Таким образом,

$$\mathrm{Hom}(G_2, G_1) \cong \prod_{\alpha \in I_1'} \bigoplus_{\beta \in I(\alpha)} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha). \tag{1}$$

Группа $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) = G_{\alpha\beta}$ — группа без кручения ранга 1 типа $\mathbf{t}(G_{\alpha\beta}) = \mathbf{t}(G_\alpha) - \mathbf{t}(G_\beta)$, причём $\mathbf{t}(G_\alpha) \geqslant \mathbf{t}(G_{\alpha\beta})$ [7].

Заметим, что для любого $\beta \in I_2$ группа $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_1)$ отлична от нуля, т. е. существует хотя бы один индекс $\alpha \in I_1'$, такой что $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \neq 0$. Если предположить, что $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) = 0$ для любого индекса $\alpha \in I_1'$, то группа $\langle G', G_\beta \rangle$ будет нормальной абелевой подгруппой в $\Gamma(G)$, что противоречит максимальности подгруппы G' в голоморфе $\Gamma(G)$.

Теперь, используя теоремы 1—3, получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2, G_1), G_1) &\cong \mathrm{Hom}\Big(\prod_{\alpha \in I_1'} \bigoplus_{\beta \in I(\alpha)} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha), \prod_{\alpha' \in I_1} G_{\alpha'}\Big) \cong\\
&\cong \prod_{\alpha' \in I_1''} \bigoplus_{\alpha \in I_1'} \prod_{\beta \in I(\alpha)} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha), G_{\alpha'}) =\\
&= \prod_{\alpha' \in I_1''} \bigoplus_{\alpha \in I_1'} \prod_{\beta \in I(\alpha)} \mathrm{Hom}(G_{\alpha\beta}, G_{\alpha'}) = \bigoplus_{\alpha \in I_1'} \prod_{\beta \in I(\alpha)} \bar{G}_{\alpha\beta} \oplus B,
\end{aligned}$$

где $\bar{G}_{\alpha\beta} = \mathrm{Hom}(G_{\alpha\beta}, G_\alpha) \neq 0$ — группа без кручения ранга 1 типа $\mathbf{t}(\bar{G}_{\alpha\beta}) = \mathbf{t}(G_\alpha) - \mathbf{t}(G_{\alpha\beta})$,

$$B=\prod_{\substack{\alpha'\in I_1'',\\ \alpha'\neq\alpha}}\bigoplus_{\alpha\in I_1'}\prod_{\beta\in I(\alpha)}\mathrm{Hom}(G_{\alpha\beta},G_{\alpha'})$$

и

$$I_1''=\{\alpha'\in I_1\mid \mathrm{Hom}(G_{\alpha\beta},G_{\alpha'})\neq 0\}$$

(очевидно, что $I_1'\subset I_1''$). Таким образом,

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2,G_1),G_1)\cong\bigoplus_{\alpha\in I_1'}\prod_{\beta\in I(\alpha)}\bar{G}_{\alpha\beta}\oplus B. \tag{2}$$

Лемма 5. *Если редуцированная векторная группа G, мощность которой неизмерима, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп, то любое её нетривиальное Γ-разложение $G=G_1\oplus G_2$ обладает следующими свойствами*:

1) $|\mathrm{I}(\mathbf{t})|<\aleph_0$ *для всех типов* $\mathbf{t}\in\mathrm{T}(G_2)$;
2) $|T(\alpha)|<\aleph_0$ *для всех индексов* $\alpha\in I_1$;
3) $\mathrm{r}(G_2)<\aleph_0$;
4) *для любой группы G_{β_s} ($\beta_s\in I_2$) существует единственная группа G_{α_k} ($\alpha_k\in I_1'$), такая что $\mathrm{Hom}(G_{\beta_s},G_{\alpha_k})\neq 0$ и для любого простого числа p группа G_{α_k} p-делима тогда и только тогда, когда p-делима группа $\prod\limits_{\beta\in I(\alpha_k)}G_\beta$.*

Доказательство. Пусть векторная группа G определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп. Пусть H — абелева группа, $G=G_1\oplus G_2$ — Γ-разложение группы G, индуцированное изоморфизмом голоморфов групп G и H.

Докажем утверждение 1). Предположим, что в Γ-разложении $G=G_1\oplus G_2$ группы G существует такой тип $\mathbf{t}_0\in\mathrm{T}(G_2)$, что $|\mathrm{I}(\mathbf{t}_0)|\geqslant\aleph_0$.

Имеем

$$G_2=G_2^{(\mathbf{t}_0)}\oplus G_2'=\prod_{\beta\in\mathrm{I}(\mathbf{t}_0)}G_\beta\oplus G_2'.$$

Группа $\mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)},G_1\big)$ отлична от нуля. Допустив противное, получим, что $\big\langle G_2^{(\mathbf{t}_0)},G'\big\rangle$ — абелева подгруппа в $\Gamma(G)$. Это противоречит тому, что G' — максимальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$. Значит, $\mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)},G_{\alpha'}\big)\neq 0$ хотя бы для одного $\alpha'\in I_1$.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(G_2,G_1)&\cong\mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)}\oplus G_2',G_1\big)\cong\mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)},G_1\big)\oplus\mathrm{Hom}(G_2',G_1)\cong\\&\cong\mathrm{Hom}\Bigg(G_2^{(\mathbf{t}_0)},\prod_{\alpha\in I_1}G_\alpha\Bigg)\oplus\mathrm{Hom}(G_2',G_1)\overset{\text{теорема 2}}{\cong}\\&\cong\prod_{\alpha\in I_1'}\mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)},G_\alpha\big)\oplus\mathrm{Hom}(G_2',G_1)\cong\end{aligned}$$

$$\cong \mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)}, G_{\alpha'}\big) \oplus \prod_{\substack{\alpha\in I_1',\\ \alpha\neq\alpha'}} \mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)}, G_\alpha\big) \oplus \mathrm{Hom}(G_2', G_1) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)}, G_{\alpha'}\big) \oplus H_2',$$

где

$$H_2' = \prod_{\substack{\alpha\in I_1',\\ \alpha\neq\alpha'}} \mathrm{Hom}\big(G_2^{(\mathbf{t}_0)}, G_\alpha\big) \oplus \mathrm{Hom}(G_2', G_1).$$

Так как группа $G_{\alpha'}$ — редуцированная группа ранга 1, то она узкая [15], и из теорем 1 и 4 следует, что

$$G_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1) \cong \mathrm{Hom}\bigg(\prod_{\beta\in \mathrm{I}(\mathbf{t}_0)} G_\beta, G_{\alpha'}\bigg) \oplus H_2' \cong \bigoplus_{\beta\in \mathrm{I}(\mathbf{t}_0)} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_{\alpha'}) \oplus H_2'.$$

Так как $|\mathrm{I}(\mathbf{t}_0)| \geqslant \aleph_0$, то в векторной группе G_2 мы получили вполне разложимое прямое слагаемое $\bigoplus\limits_{\beta\in \mathrm{I}(t_0)} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_{\alpha'})$ бесконечного ранга, что невозможно [8]. Противоречие. Следовательно, $|\mathrm{I}(\mathbf{t})| < \aleph_0$ для всех типов $\mathbf{t} \in \mathrm{T}(G_2)$.

Докажем утверждение 2). Предположим, что в Γ-разложении $G = G_1 \oplus G_2$ группы G существует индекс $\alpha \in I_1$, такой что $|T(\alpha)| \geqslant \aleph_0$ и $G_1 = G_\alpha \oplus G_1'$, где $G_1' = \prod\limits_{\substack{\alpha'\in I_1,\\ \alpha'\neq\alpha}} G_{\alpha'}$. Тогда

$$\mathrm{Hom}(G_2, G_1) \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_\alpha \oplus G_1') \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_\alpha) \oplus \mathrm{Hom}(G_2, G_1') \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}\bigg(\prod_{\beta\in I_2} G_\beta, G_\alpha\bigg) \oplus \mathrm{Hom}(G_2, G_1') \cong \bigoplus_{\beta\in I_2} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \oplus \mathrm{Hom}(G_2, G_1') \cong$$

$$\cong \bigoplus_{\beta\in \mathrm{T}(G_2)} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \oplus \mathrm{Hom}(G_2, G_1')$$

по теореме 1, так как G_α — узкая группа.

Применив теорему 4, получили

$$G_2 \cong \bigoplus_{\beta\in \mathrm{T}(G_2)} \mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \oplus \mathrm{Hom}(G_2, G_1').$$

В векторной группе G_2 мы снова выделили вполне разложимое прямое слагаемое бесконечного ранга, что невозможно [8]. Следовательно, $|T(\alpha)| < \aleph_0$ для всех индексов $\alpha \in I_1$.

Чтобы проверить утверждение 3), докажем сначала, что множество I_1' конечно.

Так как $G_2 \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2, G_1), G_1)$, то по формуле (2)

$$G_2 \cong \bigoplus_{\alpha\in I_1'} \prod_{\beta\in I(\alpha)} \bar{G}_{\alpha\beta} \oplus B.$$

Предположим, что $|I_1'| \geqslant \aleph_0$. Из каждой группы $\prod\limits_{\beta \in I(\alpha)} \bar{G}_{\alpha\beta}$ выделим по одному прямому слагаемому ранга 1. Получим

$$G_2 \cong \bigoplus_{\alpha \in I_1'} \bar{G}_{\alpha\beta} \oplus \bigoplus_{\alpha \in I_1'} \prod_{\substack{\beta' \in I(\alpha),\\ \beta' \neq \beta}} \bar{G}_{\alpha\beta'} \oplus B.$$

В векторной группе G_2 снова выделили вполне разложимое прямое слагаемое бесконечного ранга, что невозможно [8]. Следовательно, I_1' — конечное множество.

Пусть $I_1' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Предположим, что ранг группы G_2 бесконечен, т. е. $|I_2| \geqslant \aleph_0$.

В этом случае имеем две возможности:

а) $|\mathrm{T}(G_2)| \geqslant \aleph_0$. Так как множество I_1' конечно, то существует такой индекс $\alpha \in I_1'$, что $|T(\alpha)| \geqslant \aleph_0$. Противоречие с пунктом 2) леммы;

б) $|\mathrm{T}(G_2)| < \aleph_0$. Так как ранг группы G_2 бесконечен, то существует такой тип $\mathbf{t} \in \mathrm{T}(G_2)$, что $|I(\mathbf{t}_0)| \geqslant \aleph_0$. Противоречие с пунктом 1) леммы.

Следовательно, в любом нетривиальном Г-разложении группы G $|I_2| < \aleph_0$, следовательно, и $\mathrm{r}(G_2) < \aleph_0$.

Пусть $I_2 = \{\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_m\}$.

Докажем утверждение 4). С учётом конечности множеств I_1' и I_2 формула (2) принимает вид

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2, G_1), G_1) \cong \bigoplus_{k=1}^{n} \prod_{\beta \in I(\alpha_k)} \bar{G}_{\alpha_k\beta} \oplus B \cong G_2 = \prod_{\beta \in I_2} G_\beta = \prod_{s=1}^{m} G_{\beta_s}.$$

Так как каждое $\beta_s \in I_2$ принадлежит некоторому $I(\alpha_k)$, то $|I_2| \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |I(\alpha_k)|$. Учитывая, что каждое $I(\alpha_k)$ — конечное подмножество в I_2, получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |I(\alpha_k)| \geqslant |I_2|$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} |I(\alpha_k)| = |I_2|$, и в силу конечности множества I_2 каждое $\beta \in I_2$ может принадлежать только одному $I(\alpha_k)$. Множество I_2 распадается на непересекающиеся множества $I(\alpha_1), I(\alpha_2), \ldots, I(\alpha_n)$.

Формулы (1) и (2) запишутся соответственно в виде

$$\mathrm{Hom}(G_2, G_1) \cong \prod_{k=1}^{n} \bigoplus_{\beta \in I(\alpha_k)} G_{\alpha_k\beta} \cong \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{\beta \in I(\alpha_k)} G_{\alpha_k\beta}, \tag{3}$$

$$G_2 \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(G_2, G_1), G_1) \cong \bigoplus_{k=1}^{n} \prod_{\beta \in I(\alpha_k)} \bar{G}_{\alpha_k\beta}, \tag{4}$$

и $\mathbf{t}(\bar{G}_{\alpha_k\beta}) = \mathbf{t}(G_{\alpha_k}) - \mathbf{t}(G_{\alpha_k\beta})$.

Пусть для некоторого $\alpha_k \in I_1'$ группа G_{α_k} p-делима и существует группа G_β ($\beta \in I(\alpha_k)$), которая не делится на p. Тогда в правой части равенства (4) число p-делимых слагаемых равно $|I(\alpha_k)|$, а в левой части их не больше $|I(\alpha_k)| - 1$.

Полученное противоречие доказывает, что G_{α_k} и $\prod\limits_{\beta\in I(\alpha_k)} G_\beta$ одновременно p-делимы. □

Следующая теорема даёт критерий определяемости векторной группы своим голоморфом.

Теорема 6. *Векторная группа G, мощность которой неизмерима, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет одному из следующих условий*:

1) *G имеет только тривиальные Γ-разложения*;
2) *для любого нетривиального Γ-разложения группы $G = G_1 \oplus G_2$ ранг группы G_2 конечен и существует такая биекция η множества I_2 на себя, что $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \cong G_{\eta(\beta)}$ для некоторого $\alpha \in I_1'$.*

Доказательство. Если Γ-разложение группы G, индуцированное изоморфизмом голоморфов групп G и H, тривиально, то $G = G_1$. Тогда $G_2 = 0$, $H_2 = 0$, $H = H_1$ и $G \cong H$.

Пусть группа G имеет нетривиальное Γ-разложение $G = G_1 \oplus G_2$. Группа G определяется своим голоморфом, тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}(G_2, G_1) \cong G_2$ (теорема 4).

Из формулы (3) следует, что

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{\beta_s\in I(\alpha_k)} \mathrm{Hom}(G_{\beta_s}, G_{\alpha_k}) \cong G_2. \tag{5}$$

Так как любые два разложения вполне разложимой абелевой группы без кручения в прямую сумму групп ранга 1 изоморфны, то равенство (5) верно тогда и только тогда, когда существует биекция η множества I_2 на себя, такая что $\mathrm{Hom}(G_{\beta_s}, G_{\alpha_k}) \cong G_{\eta(\beta_s)}$. □

Следствие 7. *Векторная группа G, мощность которой неизмерима, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп, если она удовлетворяет одному из следующих условий*:

а) *группа G не имеет полухарактеристических разложений*;
б) *для любого G_1-полухарактеристического разложения $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, удовлетворяющего свойствам 1)—4) леммы 5, существует такая биекция η множества I_2 на себя, что $\mathrm{Hom}(G_\beta, G_\alpha) \cong G_{\eta(\beta)}$ для некоторого $\alpha \in I_1'$.*

Литература

[1] Беккер И. Х. О голоморфах нередуцированных абелевых групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1968. — № 8. — С. 3—8.

[2] Беккер И. Х. О голоморфах абелевых групп без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1974. — № 3. — С. 3—13.

[3] Беккер И. Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1975. — № 3. — С. 97—99.

[4] Беккер И. Х. Определяемость редуцированных абелевых групп без кручения своими относительными голоморфами // Абелевы группы и модули. — 1980. — С. 3—19.

[5] Беккер И. Х. Абелевы голоморфные группы // Междунар. конф. Всесибирские чтения по математике и механике. Избранные доклады. Т. 1. Математика. — 1997. — С. 43—47.

[6] Гриншпон И. Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 9—16.

[7] Кишкина З. М. Эндоморфизмы p-примитивных абелевых групп без кручения // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1945. — № 9. — С. 201—232.

[8] Мишина А. П. О прямых слагаемых полных прямых сумм абелевых групп без кручения ранга 1 // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 244—249.

[9] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[10] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[11] Miller G. A. On the multiple holomorph of a group // Math. Ann. — 1908. — Vol. 66. — P. 133—142.

[12] Mills W. H. On the non-isomorphism of certain holomorphs // Trans. Am. Math. Soc. — 1953. — Vol. 74, no. 3. — P. 428—443.

[13] O'Neill J. D. Direct summands of vector groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1990. — Vol. 55, no. 3-4. — P. 207—209.

[14] Sasiada E. On the isomorphism of decomposition of torsion-free Abelian groups into complete direct sum of group of rang one // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1959. — No. 3. — P. 145—149.

[15] Sasiada E. Proof that every countable and reduced torsion-free Abelian groups is slender // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1959. — No. 3. — P. 143—144.