Об одной проблеме теории абелевых групп, связанной с группами гомоморфизмов*

С. Я. ГРИНШПОН
Томский государственный университет
e-mail: grinshpon@math.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, группа гомоморфизмов, редуцированная группа, делимая группа.

Аннотация

В статье для всякой редуцированной абелевой группы A, ранг без кручения которой бесконечен, строится счётное множество $\mathfrak{A}(A)$ абелевых групп, определённым образом связанное с группой A и такое, что любые две различные группы B и C из множества $\mathfrak{A}(A)$ неизоморфны, но $\mathrm{Hom}(B, X) \cong \mathrm{Hom}(C, X)$ для всякой абелевой группы X. Построение такого множества абелевых групп тесно связано с проблемой 34 из монографии Л. Фукса «Бесконечные абелевы группы», том 1.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, On a problem related to homomorphism groups in the theory of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 31—34.

In this paper, for any reduced Abelian group A whose torsion-free rank is infinite, we construct a countable set $\mathfrak{A}(A)$ of Abelian groups connected with the group A in a definite way and such that for any two different groups B and C from the set $\mathfrak{A}(A)$ the groups B and C are isomorphic but $\mathrm{Hom}(B, X) \cong \mathrm{Hom}(C, X)$ for any Abelian group X. The construction of such a set of Abelian groups is closely connected with Problem 34 from L. Fuchs' book "Infinite Abelian Groups," Vol. 1.

Л. Фукс в [1] формулирует следующую проблему (проблема 34): существует ли такое множество $\mathfrak{X}$ абелевых групп X, что для любых групп A и B из того, что $\mathrm{Hom}(A, X) \cong \mathrm{Hom}(B, X)$ для всякой группы $X \in \mathfrak{X}$, вытекает, что $A \cong B$. В [2] П. Хилл строит пример двух неизоморфных абелевых p-групп A и B, таких что $\mathrm{Hom}(A, X) \cong \mathrm{Hom}(B, X)$ для любой абелевой группы X. Понятно, что этот пример даёт отрицательное решение проблемы 34.

*Исследование выполнено при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы» (государственный контракт П937 от 20 августа 2009 года) и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями». Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238 от 7 июля 2009 года.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 31—34.

Возникает естественный вопрос, насколько широк класс пар абелевых групп (A, B), таких что группы A и B неизоморфны, но $\mathrm{Hom}(A, X) \cong \mathrm{Hom}(B, X)$ для любой группы X. Любая пара таких групп даёт отрицательное решение проблемы 34.

Для абелевых групп, ранг без кручения которых бесконечен, получен следующий результат, показывающий, что класс пар групп с вышеуказанным свойством достаточно широк.

Теорема. *Для всякой редуцированной абелевой группы A, ранг без кручения которой бесконечен, существует счётное множество $\mathfrak{A}(A) = \{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ таких абелевых групп, что каждая группа A_k содержит прямое слагаемое, изоморфное группе A, $A_i \ncong A_j$ при $i \neq j$, но $\mathrm{Hom}(A_i, X) \cong \mathrm{Hom}(A_j, X)$ для любой абелевой группы X. Если A и B — неизоморфные редуцированные абелевы группы, ранг без кручения которых бесконечен, и G и H — произвольные группы из множеств $\mathfrak{A}(A)$ и $\mathfrak{A}(B)$ соответственно, то $G \ncong H$.*

Доказательство. Для всякого $k \in \mathbb{N}$ полагаем $A_k = A \oplus \Big(\bigoplus\limits_k Q\Big)$, где $\bigoplus\limits_k Q$ — прямая сумма k групп, изоморфных полной рациональной группе Q. Пусть C — произвольная абелева группа. Известно, что C можно представить в виде прямой суммы $C = C_1 \oplus C_2$, где C_1 — редуцированная группа, а C_2 — делимая группа. Группы C_1 и C_2 называют *редуцированной* и *делимой* частью группы C соответственно. Делимая часть C_2 в свою очередь раскладывается в прямую сумму делимой периодической группы (делимая периодическая часть группы C) и делимой группы без кручения (делимая часть без кручения группы C). Будем обозначать через $R(C)$, $D(C)$, $D_1(C)$, $D_2(C)$ соответственно редуцированную часть, делимую часть, периодическую делимую часть, делимую часть без кручения группы C.

Для всякого $k \in \mathbb{N}$ имеем $A_k = R(A_k) \oplus D(A_k)$, где $D(A_k) = D_1(A_k) \oplus D_2(A_k)$. Пусть X — произвольная абелева группа. Имеем $X = R(X) \oplus D_1(X) \oplus D_2(X)$. Учитывая свойства группы гомоморфизмов, получаем

$$\mathrm{Hom}(A_k, X) \cong \mathrm{Hom}\big(A_k, R(X)\big) \oplus \mathrm{Hom}\big(A_k, D_1(X)\big) \oplus \mathrm{Hom}\big(A_k, D_2(X)\big). \quad (1)$$

В свою очередь

$$\mathrm{Hom}\big(A_k, R(X)\big) \cong \mathrm{Hom}\big(R(A_k), R(X)\big) \oplus \mathrm{Hom}\big(D(A_k), R(X)\big),$$

и, учитывая, что $\mathrm{Hom}\big(D(A_k), R(X)\big) = 0$, получаем, что

$$\mathrm{Hom}\big(A_k, R(X)\big) \cong \mathrm{Hom}\big(R(A_k), R(X)\big). \quad (2)$$

Имеем

$$\mathrm{Hom}\big(A_k, D_1(X)\big) \cong \mathrm{Hom}\big(R(A_k), D_1(X)\big) \oplus \mathrm{Hom}\big(D(A_k), D_1(X)\big). \quad (3)$$

Из (1)—(3) выводим, что

$$\mathrm{Hom}(A_k, X) \cong \mathrm{Hom}\big(R(A_k), R(X)\big) \oplus \mathrm{Hom}\big(R(A_k), D_1(X)\big) \oplus \\ \oplus \mathrm{Hom}\big(D(A_k), D_1(X)\big) \oplus \mathrm{Hom}\big(A_k, D_2(X)\big). \quad (4)$$

Имеем $D(A_k) = \bigoplus\limits_k Q$. Так как делимые части изоморфных групп изоморфны и $\bigoplus\limits_i Q \ncong \bigoplus\limits_j Q$ при $i \neq j$ $(i, j \in \mathbb{N})$, то $A_i \ncong A_j$ при $i \neq j$.

Покажем, что для произвольной абелевой группы X

$$\mathrm{Hom}(A_i, X) \cong \mathrm{Hom}(A_j, X)$$

при $i \neq j$. Учитывая, что $A \cong R(A_k)$ для всякого $k \in \mathbb{N}$, получаем, что

$$\mathrm{Hom}\bigl(R(A_i), R(X)\bigr) \cong \mathrm{Hom}\bigl(R(A_j), R(X)\bigr),$$
$$\mathrm{Hom}\bigl(R(A_i), D_1(X)\bigr) \cong \mathrm{Hom}\bigl(R(A_j), D_1(X)\bigr).$$

Не умаляя общности, можно считать, что $i < j$. Пусть $j = qi + r$, где $q \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r < i$.

Согласно [1, § 47] для любой делимой группы D без кручения существует такое бесконечное кардинальное число $\mathfrak{N}$ $(\mathfrak{N} \geqslant 2^{\aleph_0})$, что

$$\mathrm{Hom}\bigl(D, D_1(X)\bigr) \cong \bigoplus_{\mathfrak{N}} Q.$$

Рассмотрим делимую группу

$$F = \bigoplus_{(q+1)i} Q = \bigoplus_{q+1} D(A_i).$$

Отождествляя изоморфные группы, можно считать, что $D(A_i) \subset D(A_j) \subset F$. Пусть

$$\mathrm{Hom}\bigl(D(A_i), D_1(X)\bigr) \cong \bigoplus_{\mathfrak{N}_1} Q.$$

Тогда

$$\mathrm{Hom}\bigl(F, D_1(X)\bigr) \cong \bigoplus_{(q+1)\mathfrak{N}_1} Q.$$

Так как $\mathfrak{N}_1$ — бесконечное кардинальное число, то $(q+1)\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1$ и

$$\mathrm{Hom}\bigl(F, D_1(X)\bigr) \cong \bigoplus_{\mathfrak{N}_1} Q.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Hom}\bigl(D(A_j), D_1(X)\bigr) \cong \bigoplus_{\mathfrak{N}_1} Q,$$

и значит,

$$\mathrm{Hom}\bigl(D(A_i), D_1(X)\bigr) \cong \mathrm{Hom}\bigl(D(A_j), D_1(X)\bigr).$$

Для всякой абелевой группы C обозначим через $\mathrm{r}_0(C)$ ранг без кручения группы C. Пусть $\mathrm{r}_0\bigl(D_2(X)\bigr) = \mathfrak{M}$. Имеем

$$\mathrm{Hom}\bigl(A_i, D_2(X)\bigr) \cong \prod_{\mathrm{r}_0(A_i)} \Bigl(\bigoplus_{\mathfrak{M}} Q\Bigr)$$

и

$$\mathrm{Hom}\bigl(A_j, D_2(X)\bigr) \cong \prod_{\mathrm{r}_0(A_j)} \Bigl(\bigoplus_{\mathfrak{M}} Q\Bigr)$$

(см. [1, § 43, пример 6]).

Учитывая строение групп A_i и A_j, получаем, что $\mathrm{r}_0(A_i) = \mathrm{r}_0(A) + i$ и $\mathrm{r}_0(A_j) = \mathrm{r}_0(A) + j$. Так как $\mathrm{r}_0(A)$ — бесконечное кардинальное число, то $\mathrm{r}_0(A_i) = \mathrm{r}_0(A_j) = \mathrm{r}_0(A)$. Значит, $\mathrm{Hom}\bigl(A_i, D_2(X)\bigr) \cong \mathrm{Hom}\bigl(A_j, D_2(X)\bigr)$.

Все доказанные выше изоморфизмы групп гомоморфизмов и соотношение (4) показывают, что $\mathrm{Hom}(A_i, X) \cong \mathrm{Hom}(A_j, X)$ для любой абелевой группы X, хотя по построению $A_i \ncong A_j$.

Пусть A и B — неизоморфные редуцированные абелевы группы, ранг без кручения которых бесконечен, $G \in \mathfrak{A}(A)$, $H \in \mathfrak{A}(B)$. Имеем $R(G) = A$, $R(H) = B$ и так как $A \ncong B$, то $R(G) \ncong R(H)$, и поэтому $G \ncong H$. □

Литература

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[2] Hill P. Two problems of Fuchs concerning tor and hom // J. Algebra. — 1971. — Vol. 19. — P. 379—383.