Определяемость абелевых групп без кручения своими голоморфами и почти голоморфный изоморфизм*

С. Я. ГРИНШПОН
Томский государственный университет
e-mail: grinshpon@math.tsu.ru

И. Э. ГРИНШПОН
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
e-mail: irina-grinshpon@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: голоморф, голоморфно изоморфные группы, подобие групп, однородные группы, транзитивные группы.

Аннотация

В статье исследуются голоморфно изоморфные абелевы группы, т. е. абелевы группы с изоморфными голоморфами. Изучается также обобщение понятия голоморфного изоморфизма — почти голоморфный изоморфизм, тесно связанный с нормальными абелевыми подгруппами голоморфов абелевых групп. Выделены абелевы группы без кручения из различных классов, которые определяются своим голоморфом. В частности, установлено, что всякая однородная сепарабельная группа определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, I. E. Grinshpon, Determinateness of torsion-free Abelian groups by their holomorphs and almost holomorphic isomorphism, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 35—46.

In this paper, we study holomorphically isomorphic Abelian groups, i.e., Abelian groups with isomorphic holomorphs. We also study a generalization of the concept of holomorphic isomorphism, namely, almost holomorphic isomorphism, which is deeply connected with normal Abelian subgroups of holomorphs of Abelian groups. Torsion-free Abelian groups that are determined by their holomorphs are highlighted from different classes. In particular, it has been found that any homogeneous separable group can be determined by its holomorph in the class of all Abelian groups.

Пусть G — абелева группа, $\Gamma(G)$ — её голоморф, т. е. полупрямое расширение группы G с помощью группы её автоморфизмов $\mathrm{Aut}(G)$. Для групповой операции в группе $\mathrm{Aut}(G)$ пользуемся мультипликативной записью, а для групповых

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

операций в G и $\Gamma(G)$ аддитивной записью. Группу $\Gamma(G)$ можно рассматривать как множество всех упорядоченных пар (g, φ), где $g \in G$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Групповая операция в $\Gamma(G)$ задаётся по правилу

$$(g, \varphi) + (h, \psi) = (g + \varphi h, \varphi\psi)$$

для любых $(g, \varphi), (h, \psi) \in \Gamma(G)$. Нейтральным элементом в $\Gamma(G)$ является элемент $(0, \varepsilon)$ (ε — тождественный автоморфизм), а элементом, противоположным элементу (g, φ), — элемент $(-\varphi^{-1}g, \varphi^{-1})$. Элементы вида (g, ε) образуют в голоморфе $\Gamma(G)$ нормальную подгруппу, изоморфную группе G, а элементы вида $(0, \varphi)$ — подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Aut}(G)$. Будем отождествлять эти подгруппы с группами G и $\mathrm{Aut}(G)$ соответственно. Понятно, что

$$G \cap \mathrm{Aut}(G) = \{(0, \varepsilon)\}.$$

Часто вместо того чтобы записывать элементы группы $\Gamma(G)$ в виде (g, ε) и $(0, \varphi)$, будем писать просто g и φ соответственно.

В настоящей статье рассматриваются вопросы, связанные с определяемостью абелевых групп своим голоморфом.

Две группы называются *голоморфно изоморфными*, если голоморфы этих групп изоморфны. Говорят, что группа A *определяется своим голоморфом* в некотором классе групп $\mathfrak{R}$, если любая группа B из этого класса, голоморфно изоморфная группе A, изоморфна группе A. Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [12]. Однако ситуация меняется при переходе к абелевым группам. В [14] В. Миллс показал, что всякая конечно порождённая абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порождённых абелевых групп. Ряд интересных результатов о свойствах голоморфов абелевых групп и об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [1—6].

Обобщением понятия голоморфного изоморфизма является понятие почти голоморфного изоморфизма. Группы A и B называются *почти голоморфно изоморфными*, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Понятно, что если две группы являются голоморфно изоморфными, то они почти голоморфно изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно. Почти голоморфно изоморфные конечно порождённые абелевы группы исследовались в [14]. Почти голоморфно изоморфные абелевы p-группы изучались в [6, 8].

Важную роль при изучении голоморфов абелевых групп играют нормальные абелевы подгруппы таких голоморфов. Справедлив следующий результат.

Лемма 1 [13]. *Если S — нормальная абелева подгруппа в $\Gamma(G)$, $(a, \sigma) \in S$, $g \in G$, то*

$$\sigma a - a \in S, \quad (2a, \varepsilon) \in S, \quad (0, \sigma^2) \in S; \tag{1}$$

$$\sigma g - g \in S; \tag{2}$$

$$\sigma(\sigma g - g) = \sigma g - g; \tag{3}$$

$$\sigma^n g = g + n(\sigma g - g); \tag{4}$$

$$n(a,\sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n\right); \tag{5}$$

$$2(\sigma a - a) = 0. \tag{6}$$

Заметим, что для группы без кручения G формула (5) из леммы 1 принимает вид

$$n(a,\sigma) = (na, \sigma^n). \tag{7}$$

В [7] показано, что при исследовании изоморфизма почти голоморфно изоморфных и голоморфно изоморфных групп без кручения можно ограничиться редуцированными группами.

Рассмотрим связи между типами элементов почти голоморфно изоморфных абелевых групп без кручения.

Напомним некоторые обозначения и термины из теории абелевых групп без кручения.

Пусть A — абелева группа, $a \in A$. Наибольшее неотрицательное число k, для которого уравнение $p^k x = a$ имеет решение, называется *p-высотой* элемента a в группе A (обозначение: $\mathrm{h}_p^A(a)$ или $\mathrm{h}_p(a)$). Если уравнение $p^k x = a$ имеет решение при любом k, то a называется *элементом бесконечной p-высоты*, т. е. $\mathrm{h}_p(a) = \infty$.

Пусть $\mathbf{X}$ — множество всех последовательностей вида $v = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots)$, где k_i — целое неотрицательное число или символ ∞ ($i \in \mathbb{N}$). Такие последовательности будем называть *характеристиками*.

В множестве $\mathbf{X}$ естественным образом вводится частичный порядок, а именно $\bigl(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \ldots, k_n^{(1)}, \ldots\bigr) \leqslant \bigl(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \ldots, k_n^{(2)}, \ldots\bigr)$ тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \mathbb{N}$ выполняется условие $k_i^{(1)} \leqslant k_i^{(2)}$. Относительно этого частичного порядка множество $\mathbf{X}$ является полной решёткой.

Пусть $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$ — множество всех простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. Если A — абелева группа без кручения и $a \in A$, то *характеристика* $\chi_A(a)$ (или $\chi(a)$) элемента a в группе A — это характеристика $\chi = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$, в которой каждое k_i есть p_i-высота $\mathrm{h}_{p_i}^A(a)$ элемента a в группе A [11, с. 129]. Заметим, что согласно определению характеристика нулевого элемента — это последовательность $(\infty, \ldots, \infty, \ldots)$.

Две характеристики $v_1 = \bigl(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \ldots, k_n^{(1)}, \ldots\bigr)$ и $v_2 = \bigl(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \ldots, k_n^{(2)}, \ldots\bigr)$ считаются *эквивалентными* в том и только в том случае, когда множество $M = \bigl\{n \in \mathbb{N} \mid k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}\bigr\}$ конечно, причём если $k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}$, то $k_n^{(1)} \neq \infty$ и $k_n^{(2)} \neq \infty$.

Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если характеристика элемента a абелевой группы без кручения A принадлежит типу $\mathbf{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\mathbf{t}$ (это записывается следующим образом: $\mathbf{t}_A(a) = \mathbf{t}$ или $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}$, если понятно, о какой группе идёт речь).

Множество типов будем рассматривать как частично упорядоченное множество относительно естественного отношения порядка (т. е. $\mathbf{t}_1 \leqslant \mathbf{t}_2$ тогда и только тогда, когда существуют характеристики v_1 и v_2, принадлежащие типам $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ соответственно, такие что $v_1 \leqslant v_2$). Частично упорядоченное множество всех типов является полной решёткой.

Абелева группа без кручения, все ненулевые элементы которой имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$, называется *однородной* [11, с. 130—131]. Чтобы подчеркнуть, что все ненулевые элементы однородной группы A имеют фиксированный тип $\mathbf{t}$, будем говорить, что A — *однородная группа типа* $\mathbf{t}$, и записывать это так: $\mathbf{t}(A) = \mathbf{t}$. Очевидно, что всякая группа без кручения ранга 1 является однородной.

Для абелевой группы без кручения A обозначим через $\mathrm{T}(A)$ множество всех типов элементов группы A.

Лемма 2. *Пусть S — нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G. Тогда для любого типа $\mathbf{t} \in \mathrm{T}(S)$ существует тип $\mathbf{t}' \in \mathrm{T}(G)$, такой что $\mathbf{t}' \geqslant \mathbf{t}$.*

Доказательство. Пусть тип $\mathbf{t}$ принадлежит множеству типов группы S. Тогда существует ненулевой элемент $(a,\sigma) \in S$, такой что его характеристика принадлежит типу $\mathbf{t}$ $\big(\chi\big((a,\sigma)\big) \in \mathbf{t}\big)$. Эта характеристика имеет вид $\chi\big((a,\sigma)\big) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$.

Пусть $a \neq 0$. Обозначим тип a через $\mathbf{t}'$. Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(x_n, \eta_n) \in S$, такой что $p_n^{k_n}(x_n,\eta_n) = (a,\sigma)$. Тогда, учитывая формулу (7), имеем $(p_n^{k_n}x_n, \eta_n^{p_n^{k_n}}) = (a,\sigma)$. Получили, что $p_n^{k_n}x_n = a$. Значит, уравнение $a = p_n^{k_n}x_n$ разрешимо в группе G. Поэтому $\mathrm{h}_{p_n}^{(G)}(a) \geqslant k_n$. Если $k_n = \infty$, то для любого натурального числа m существует такой элемент $(y_m, \xi_m) \in S$, что уравнение $p_n^m(y_m,\xi_m) = (a,\sigma)$ разрешимо в S, а значит, уравнение $p_n^m y_m = a$ разрешимо в G. Поэтому $\mathrm{h}_{p_n}^{(G)}(a) = \infty$.

Таким образом, $\chi_{(G)}(a) \geqslant \chi_{(S)}\big((a,\sigma)\big)$, и значит, $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}' \geqslant \mathbf{t}$.

Пусть $a = 0$. Тогда $\sigma \neq \varepsilon$. Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(0,\eta_n) \in S$, такой что $p_n^{k_n}(0,\eta_n) = (0,\sigma)$, или $\eta_n^{p_n^{k_n}} = \sigma$. Так как $\sigma \neq \varepsilon$, то существует элемент $g \in G$, такой что $\sigma g \neq g$. Согласно формуле (4) имеем $\sigma g = \eta_n^{p_n^{k_n}} g = g + p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Отсюда следует, что $\sigma g - g = p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Уравнение $\sigma g - g = p_n^{k_n} x$ разрешимо в G. Значит, $\mathrm{h}_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) \geqslant k_n$.

Если $k_n = \infty$, то $\mathrm{h}_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) = \infty$. Таким образом, $\chi_{(G)}(\sigma g - g) \geqslant \chi_{(S)}\big((0,\sigma)\big)$. Следовательно, $\mathbf{t}(\sigma g - g) = \mathbf{t}' \geqslant \mathbf{t}$. □

Теорема 3. *Пусть S — нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G и S_1 — множество первых компонент элементов группы S. Тогда*

1) *для любого типа $\mathbf{t} \in \mathrm{T}(S)$ существует тип $\mathbf{t}' \in \mathrm{T}(S_1)$, такой что $\mathbf{t}' \geqslant \mathbf{t}$;*
2) *для любого типа $\mathbf{t} \in \mathrm{T}(S)$ существует тип $\mathbf{t}'' \in \mathrm{T}(G \cap S)$, такой что $\mathbf{t}'' \geqslant \mathbf{t}$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $(a,\sigma) \in S$, $(a,\sigma) \neq (0,\varepsilon)$ и $\mathbf{t}\big((a,\sigma)\big) = \mathbf{t}$. Пусть $\sigma \neq \varepsilon$. Тогда для любого элемента $g \in G$ имеем, что

$\sigma g - g \in S$ (формула (2)), и значит, $\sigma g - g \in S_1$. Обозначим тип элемента $\sigma g - g$ через $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}' \in \mathrm{T}(S_1)$. Из доказательства леммы 2 вытекает, что $\mathbf{t}' \geqslant \mathbf{t}$.

Если же $\sigma = \varepsilon$, то $a \neq 0$, $a \in S_1$. Из доказательства леммы 2 вытекает, что $\mathbf{t}(a) \geqslant \mathbf{t}$.

Докажем утверждение 2). Пусть $(a, \sigma) \in S$ и $\mathbf{t}\big((a, \sigma)\big) = \mathbf{t}$. По формуле (1) имеем, что $2a \in S$, и значит, $2a \in G \cap S$. Тогда $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(2a) = \mathbf{t}''$. Применяя лемму 2, получаем, что $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(2a) = \mathbf{t}'' \geqslant \mathbf{t}$ и $\mathbf{t}'' \in \mathrm{T}(G \cap S)$. □

Теорема 4. *Пусть G и H — почти голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения, G — однородная группа, а группа H обладает свойством, что для любых элементов $b_1, b_2 \in H$, таких что $\mathbf{t}(b_1)$ сравним с $\mathbf{t}(b_2)$, имеем $\mathbf{t}(b_1) = \mathbf{t}(b_2)$. Тогда H — однородная группа и $\mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(H)$.*

Доказательство. Пусть тип однородной группы G равен $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}_1 \in \mathrm{T}(H)$. Группы G и H почти голоморфно изоморфны, значит, $H \cong G'$, где G' — нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$, и $G \cong H'$, где H' — нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $\mathbf{t}_1 \in \mathrm{T}(G')$. Тогда по лемме 2 получаем, что тип $\mathbf{t}$ удовлетворяет условию $\mathbf{t} \geqslant \mathbf{t}_1$. Так как $G \cong H'$, то $\mathbf{t} \in \mathrm{T}(H')$. Согласно лемме 2 для типа $\mathbf{t}$ существует тип $\mathbf{t}_2 \in \mathrm{T}(H)$, такой что $\mathbf{t}_2 \geqslant \mathbf{t}$. Получили, что $\mathbf{t}_2 \geqslant \mathbf{t} \geqslant \mathbf{t}_1$. Так как $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in \mathrm{T}(H)$, то существуют элементы $b_1, b_2 \in H$, такие что $\mathbf{t}(b_1) = \mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}(b_2) = \mathbf{t}_2$. Тогда $\mathbf{t}(b_2) \geqslant \mathbf{t}(b_1)$, т. е. типы элементов b_1 и b_2 сравнимы. Учитывая условие теоремы на типы элементов группы H, получаем, что $\mathbf{t}(b_1) = \mathbf{t}(b_2)$, т. е. $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$. Следовательно, $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}$. В силу произвольности выбора типа $\mathbf{t}_1$ получаем, что H — однородная группа и её тип равен $\mathbf{t}$. □

Следствие 5. *Если G и H — однородные почти голоморфно изоморфные группы, то $\mathbf{t}(G) = \mathbf{t}(H)$.*

Теорема 6. *Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\bar{\mathbf{t}} \in T_2} H_{\bar{\mathbf{t}}}$, где $G_{\mathbf{t}}$ и $H_{\bar{\mathbf{t}}}$ — однородные группы типов $\mathbf{t}$ и $\bar{\mathbf{t}}$ соответственно, T_1 и T_2 — множества, состоящие из попарно несравнимых типов. Если G и H — почти голоморфно изоморфные группы, то $T_1 = T_2$.*

Доказательство. Группы G и H почти голоморфно изоморфны, т. е. $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' — нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно.

Пусть $\mathbf{t}_0 \in T_1$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H следует, что $\mathbf{t}_0 \in \mathrm{T}(H')$. По лемме 2 существует тип $\bar{\mathbf{t}}_0 \in \mathrm{T}(H)$, такой что $\bar{\mathbf{t}}_0 \geqslant \mathbf{t}_0$.

Предположим, что $\bar{\mathbf{t}}_0 \in \mathrm{T}(H) \setminus T_2$. Тогда $\bar{\mathbf{t}}_0 = \inf\{\bar{\mathbf{t}}_\beta \mid \bar{\mathbf{t}}_\beta \in T_2'\}$, где $T_2' \subset T_2$ и $|T_2'| \geqslant 2$. Значит, для любого $\beta \in T_2'$ справедливо $\bar{\mathbf{t}}_0 \leqslant \bar{\mathbf{t}}_\beta$. Если существует тип $\bar{\mathbf{t}}_\beta \in T_2'$, такой что $\bar{\mathbf{t}}_0 = \bar{\mathbf{t}}_\beta$, то получим, что $\bar{\mathbf{t}}_0 \in T_2$, что противоречит предположению $\bar{\mathbf{t}}_0 \in \mathrm{T}(H) \setminus T_2$. Следовательно, $\bar{\mathbf{t}}_0 < \bar{\mathbf{t}}_\beta$.

Имеем $\bar{\mathbf{t}}_\beta > \bar{\mathbf{t}}_0 \geqslant \mathbf{t}_0$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $\bar{\mathbf{t}}_\beta \in \mathrm{T}(G')$. По лемме 2 существует тип $\mathbf{t}_1 \in \mathrm{T}(G)$, такой что $\mathbf{t}_1 \geqslant \bar{\mathbf{t}}_\beta$.

Возможны два случая.

1. Пусть $\mathbf{t}_1 \in T_1$. Тогда $\mathbf{t}_1 \geqslant \bar{\mathbf{t}}_\beta > \bar{\mathbf{t}}_0 \geqslant \mathbf{t}_0$, т. е. $\mathbf{t}_1 > \mathbf{t}_0$. Получили, что типы $\mathbf{t}_0$ и $\mathbf{t}_1$ сравнимы. Это противоречит условию теоремы.

2. Пусть $\mathbf{t}_1 \in \mathrm{T}(G) \setminus T_1$. Тогда $\mathbf{t}_1 = \inf\{\mathbf{t}_\alpha \mid \mathbf{t}_\alpha \in T_1'\}$, где $T_1' \subset T_1$ и $|T_1'| \geqslant 2$. Аналогично ранее доказанному получаем, что $\mathbf{t}_\alpha > \mathbf{t}_1$. Имеем $\mathbf{t}_\alpha > \mathbf{t}_1 \geqslant \geqslant \bar{\mathbf{t}}_\beta > \bar{\mathbf{t}}_0 \geqslant \mathbf{t}_0$. Типы $\mathbf{t}_0$ и $\mathbf{t}_\alpha$ принадлежат T_1 и сравнимы между собой. Противоречие.

Значит, $\bar{\mathbf{t}}_0 \in T_2$, $\bar{\mathbf{t}}_0 \geqslant \mathbf{t}_0$.

Аналогично доказывается, что для типа $\bar{\mathbf{t}}_0 \in T_2$ существует тип $\mathbf{t}_2 \in T_1$, такой что $\mathbf{t}_2 \geqslant \bar{\mathbf{t}}_0$.

Итак, $\mathbf{t}_2 \geqslant \bar{\mathbf{t}}_0 \geqslant \mathbf{t}_0$. Так как типы в T_1 попарно несравнимы, то $\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_0$. Значит, $\bar{\mathbf{t}}_0 = \mathbf{t}_0$ и справедливо включение $T_1 \subset T_2$.

Обратное включение $T_2 \subset T_1$ доказывается аналогично.

Следовательно, $T_1 = T_2$. □

В дальнейшем нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 7. *Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T} G_\mathbf{t}$ — прямое произведение однородных абелевых групп без кручения, типы которых попарно несравнимы. Тогда для любого типа $\mathbf{t} \in T$ подгруппа $G_\mathbf{t}$ — характеристическая подгруппа группы G.*

Доказательство. Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T} G_\mathbf{t}$ — прямое произведение однородных абелевых групп без кручения и любые два типа $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2 \in T$ несравнимы.

Предположим противное. Пусть $\mathbf{t}_0 \in T$ — некоторый тип, для которого $G_{\mathbf{t}_0}$ не является характеристической подгруппой группы G. Тогда существуют автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ и элемент $g_0 \in G_{\mathbf{t}_0}$, такие что $\alpha g_0 \notin G_{\mathbf{t}_0}$.

Пусть для всякого типа $\mathbf{t} \in T$ $\pi_\mathbf{t}$ — проекция группы G на группу $G_\mathbf{t}$ и $\rho_\mathbf{t}$ — вложение группы $G_\mathbf{t}$ в группу G. Тогда существует такой тип $\mathbf{t}_i \in T$, $\mathbf{t}_i \neq \mathbf{t}_0$, что $\pi_\mathbf{t}(g_0) \neq 0$.

Рассмотрим гомоморфизм $\eta = \pi_{G_{\mathbf{t}_i}} \alpha|_{G_{\mathbf{t}_0}}$ ($\alpha|_{G_{\mathbf{t}_0}}$ — ограничение автоморфизма α на группу $G_{\mathbf{t}_0}$, т. е. $G_{\mathbf{t}_0} \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\pi_{\mathbf{t}_i}} G_{\mathbf{t}_i}$). Имеем $\eta \in \mathrm{Hom}(G_{\mathbf{t}_0}, G_{\mathbf{t}_i})$ и $\eta g_0 = g_i$.

Так как типы подгрупп $G_{\mathbf{t}_0}$ и $G_{\mathbf{t}_i}$ несравнимы, то $\mathrm{Hom}(G_{\mathbf{t}_0}, G_{\mathbf{t}_i}) = 0$. Значит, $\eta = 0$. Получили противоречие. Следовательно, подгруппа $G_{\mathbf{t}_0}$ — характеристическая подгруппа группы G. □

Лемма 8. *Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T} G_\mathbf{t}$, где $G_\mathbf{t}$ — однородная группа типа $\mathbf{t}$, T — множество попарно несравнимых типов. Тогда для любого ненулевого элемента $g \in G$ и любого типа $\mathbf{t} \in T$ выполнено неравенство $\mathbf{t}(g) \not> \mathbf{t}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют такой элемент $g_0 \in G$ и тип $\mathbf{t}_0 \in T$, для которых $\mathbf{t}(g_0) > \mathbf{t}_0$. Обозначим через $\pi_\mathbf{t}$ проекцию группы G на $G_\mathbf{t}$. Имеем $\mathbf{t}(g_0) = \inf\{\mathbf{t} \in T \mid \pi_\mathbf{t}(g_0) \neq 0\}$. Значит, для любого типа $\mathbf{t} \in T$, для которого $\pi_\mathbf{t}(g_0) \neq 0$, получаем $\mathbf{t} \geqslant \mathbf{t}(g_0) > \mathbf{t}_0$, что противоречит несравнимости типов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}_0$. □

В дальнейшем при рассмотрении прямых произведений $A = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T} A_{\mathbf{t}}$ мы будем отождествлять группу $A_{\mathbf{t}}$ с изоморфной ей подгруппой $\rho_{\mathbf{t}}\pi_{\mathbf{t}}A$ группы A, а любой элемент $a \in A_{\mathbf{t}}$ — с элементом $\rho_{\mathbf{t}}\pi_{\mathbf{t}}a$, где $\pi_{\mathbf{t}}$ — проекция группы A на группу $A_{\mathbf{t}}$, а $\rho_{\mathbf{t}}$ – координатное вложение группы A в группу $A_{\mathbf{t}}$.

Предложение 9. *Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T} G_t$, где $G_{\mathbf{t}}$ — однородная группа типа $\mathbf{t}$, T — множество попарно несравнимых типов. Если для некоторой абелевой группы без кручения H существует изоморфное отображение μ группы G на нормальную подгруппу H' голоморфа $\Gamma(H)$, то $\mu G_{\mathbf{t}}$ — нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$ для любого типа $\mathbf{t} \in T$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{t}_0$ — произвольный тип из T и $S = \mu G_{\mathbf{t}_0}$. Очевидно, что S — подгруппа группы H', состоящая в точности из всех элементов группы H', имеющих тип $\mathbf{t}_0$. Докажем, что S — нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$.

Пусть $(s,\omega) \in S$, $(b,\sigma) \in \Gamma(H)$ и $\chi\big((s,\omega)\big) = (k_1,k_2,\ldots,k_n,\ldots)$, где $\chi\big((s,\omega)\big) \in \mathbf{t}_0$. Для всякого натурального числа n, для которого $k_n < \infty$, существует такой элемент $(s_n,\omega_n) \in H'$, что $p_n^{k_n}(s_n,\omega_n) = (s,\omega)$. Тогда

$$p_n^{k_n}\big(-(b,\sigma)+(s_n,\omega_n)+(b,\sigma)\big) = \\ = -(b,\sigma)+p_n^{k_n}(s_n,\omega_n)+(b,\sigma) = -(b,\sigma)+(s,\omega)+(b,\sigma) \in H'.$$

Следовательно, p_n-высота элемента $-(b,\sigma)+(s,\omega)+(b,\sigma)$ в группе H' не меньше k_n. Понятно, что если $k_m = \infty$ для некоторого натурального числа m, то p_m-высота элемента $-(b,\sigma)+(s,\omega)+(b,\sigma)$ в группе H' также равна ∞. Значит, $\mathbf{t}\big(-(b,\sigma)+(s,\omega)+(b,\sigma)\big) \geqslant \mathbf{t}_0$. Применяя лемму 8, получаем $\mathbf{t}\big(-(b,\sigma)+ (s,\omega)+(b,\sigma)\big) = \mathbf{t}_0$. Следовательно, $-(b,\sigma)+(s,\omega)+(b,\sigma) \in S$ и поэтому S — нормальная подгруппа $\Gamma(H)$. □

Рассмотрим теперь почти голоморфно изоморфные группы без кручения, являющиеся прямыми произведениями однородных групп.

Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T_2} H_{\mathbf{t}}$ — прямые произведения однородных групп $G_{\mathbf{t}}$ и $H_{\mathbf{t}}$ соответственно, T_1 и T_2 — некоторые множества типов.

Группы G и H называются *подобными*, если $T_1 = T_2$ и для всякого типа $\mathbf{t} \in T_1$ ранг $\mathrm{r}(G_{\mathbf{t}})$ группы $G_{\mathbf{t}}$ равен рангу $\mathrm{r}(H_{\mathbf{t}})$ группы $H_{\mathbf{t}}$.

Редуцированная абелева группа без кручения G называется *транзитивной*, если для любых двух элементов $a,b \in G$, таких что $\chi(a) = \chi(b)$, существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, такой что $b = \varphi a$.

Теорема 10. *Пусть $G = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T_2} H_{\mathbf{t}}$, где $G_{\mathbf{t}}$ ($\mathbf{t} \in T_1$) и $H_{\mathbf{t}}$ ($\mathbf{t} \in T_2$) — транзитивные однородные группы и множества T_1 и T_2 состоят из попарно несравнимых типов. Если группы G и H почти голоморфно изоморфны, то они подобны.*

Доказательство. Так как группы G и H почти голоморфно изоморфны, то $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' — нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. Обозначим через μ изоморфное отображение группы G на группу H'.

Так как множества T_1 и T_2 состоят из попарно несравнимых типов, то по теореме 6 получаем, что множества T_1 и T_2 совпадают. Таким образом, можно записать $G = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\mathbf{t}\in T} H_{\mathbf{t}}$, где $T_1 = T_2 = T$.

Пусть $\mathbf{t}_0 \in T$ и $\mu G_{\mathbf{t}_0} = S$. Обозначим через H_1 и Ψ множества первых и вторых компонент группы H' соответственно, а через S_1 и Φ — множества первых и вторых компонент группы S соответственно. Очевидно, что S — подгруппа группы H'. Применяя предложение 9, получаем, что S — нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$. Значит, $S_1 \neq 0$ [10, лемма].

Докажем, что тип любого элемента $s \in S_1$ в группе H равен $\mathbf{t}_0$. Так как $s \in S_1$, то существует элемент $(s,\omega) \in S$. При изоморфизме тип элемента сохраняется, поэтому $\mathbf{t}_{H'}\big((s,\omega)\big) = \mathbf{t}_0$. Пусть $\chi\big((s,\omega)\big) = (k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$.

Пусть $k_n < \infty$. Тогда существует элемент $(x,\delta) \in H'$, такой что $p_n^{k_n}(x,\delta) = (s,\omega)$. По формуле (7) имеем $(s,\omega) = \big(p_n^{k_n}x, \delta^{p_n^{k_n}}\big)$. Тогда $s = p_n^{k_n}x$, откуда следует, что p_n-высота элемента s в группе H не меньше k_n.

Если $k_n = \infty$, то получаем, что p_n-высота элемента s в группе H равна ∞.

Таким образом, $\chi(s) \geqslant \chi(s,\omega)$, и значит, $\mathbf{t}(s) \geqslant \mathbf{t}_0$. Так как согласно лемме 8 $\mathbf{t}(s) \not> \mathbf{t}_0$, то получаем, что $\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}_0$.

Докажем, что S_1 — подгруппа группы $H_{\mathbf{t}_0}$. Предположим противное. Пусть существует элемент $s \in S_1$, такой что $s \notin H_{\mathbf{t}_0}$, т. е. $\pi_{\mathbf{t}_j} s \neq 0$ для некоторого типа $\mathbf{t}_j \neq \mathbf{t}_0$ ($\mathbf{t}_j \in T$), где $\pi_{\mathbf{t}_j}$ — проекция группы H на группу $H_{\mathbf{t}_j}$. Из доказательства леммы 8 вытекает, что $\mathbf{t}(s) \leqslant \mathbf{t}_j$. Так как $\mathbf{t}(s) = \mathbf{t}_0$, то получаем, что $\mathbf{t}_0 \leqslant \mathbf{t}_j$. Получили противоречие с несравнимостью типов в T. Следовательно, S_1 — подгруппа группы $H_{\mathbf{t}_0}$.

Так как S — нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$, то, применив формулу (1), получим, что $2S_1 \subset S$. Следовательно,

$$\mathrm{r}(S_1) = \mathrm{r}(2S_1) \leqslant \mathrm{r}(S). \tag{8}$$

Докажем, что при любом автоморфизме $\lambda \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{t}_0})$ подгруппа $2S_1$ отображается в подгруппу S_1. Для автоморфизма $\lambda \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{t}_0})$ построим автоморфизм $\lambda' \in \mathrm{Aut}(H)$ следующим образом: для любого элемента $b \in H$ положим $\pi_{\mathbf{t}_0}\lambda' b = \lambda\pi_{\mathbf{t}_0} b$, $\pi_{\mathbf{t}_j}\lambda' b = \pi_{\mathbf{t}_j} b$, если $\mathbf{t}_j \neq \mathbf{t}_0$.

Рассмотрим элемент $(s,\omega) \in S$. Пусть $\lambda'(2s) = u$. Тогда $\mathbf{t}(u) = \mathbf{t}(2s) = \mathbf{t}(s) = \mathbf{t}_0$. Учитывая, что S_1 — подгруппа группы $H_{\mathbf{t}_0}$, получаем, что $\lambda'(2s) = \lambda(2s)$, и поэтому $u = \lambda(2s)$.

Так как H_1 — характеристическая подгруппа группы H [10, лемма] и $2s \in H_1$, то $u \in H_1$.

H' — нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$, и значит, $2s \in H'$ (формула (1)). Имеем, что $(0,\lambda') + (2s,\varepsilon) + (0,\lambda')^{-1} = (\lambda'(2s),\varepsilon) = (u,\varepsilon)$. Следовательно, $u \in H'$.

Так как $H' = \mu G$, то существует элемент $g \in G$, такой что $\mu g = u$. Так как изоморфизм сохраняет типы, то $\mathbf{t}(g) = \mathbf{t}_0$.

Из доказательства леммы 8 следует, что $g \in G_{\mathbf{t}_0}$. Значит, $u \in S$, поэтому $u \in S_1$. Этим доказано, что для любого элемента $s \in S_1$ и любого автоморфизма $\lambda \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{t}_0})$ имеем $\lambda(2s) \in S_1$.

Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — максимальная линейно независимая система элементов в $H_{\mathbf{t}_0}$. Так как $2S_1 \neq 0$, то существует элемент $x \in 2S_1$, $x \neq 0$. Группа $H_{\mathbf{t}_0}$ однородная, поэтому для любого $i \in I$ имеем $\mathbf{t}(a_i) = \mathbf{t}_0$. Так как $\mathbf{t}(x) = \mathbf{t}_0$, то существуют числа m_i, $n_i \in \mathbb{Z}$, такие что $\chi(m_i a_i) = \chi(n_i x)$.

Группа $H_{\mathbf{t}_0}$ транзитивна, поэтому существует автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(H_{\mathbf{t}_0})$, такой что $\varphi(n_i x) = m_i a_i$. Так как в силу доказанного ранее $\varphi(2S_1) \subset S_1$, получаем, что $m_i a_i \in S_1$ для любого $i \in I$.

Система $\{m_i a_i\}_{i \in I}$ — линейно независимая система элементов в группе S_1. Следовательно, $\mathrm{r}(S_1) \geqslant \mathrm{r}(H_{\mathbf{t}_0})$. Но S_1 — подгруппа группы $H_{\mathbf{t}_0}$, значит, $\mathrm{r}(S_1) \leqslant \leqslant \mathrm{r}(H_{\mathbf{t}_0})$. Из этих неравенств следует, что $\mathrm{r}(S_1) = \mathrm{r}(H_{\mathbf{t}_0})$.

Так как $S = \mu G_{\mathbf{t}_0}$, то $\mathrm{r}(G_{\mathbf{t}_0}) = \mathrm{r}(S)$. Применив неравенство (8), получим, что $\mathrm{r}(G_{\mathbf{t}_0}) = \mathrm{r}(S) \geqslant \mathrm{r}(S_1) = \mathrm{r}(H_{\mathbf{t}_0})$. Значит, $\mathrm{r}(G_{\mathbf{t}_0}) \geqslant \mathrm{r}(H_{\mathbf{t}_0})$.

Аналогично доказывается, что $\mathrm{r}(H_{\mathbf{t}_0}) \geqslant \mathrm{r}(G_{\mathbf{t}_0})$.

Сравнивая полученные неравенства, получаем, что $\mathrm{r}(G_{\mathbf{t}_0}) = \mathrm{r}(H_{\mathbf{t}_0})$.

Следовательно, группы G и H подобны. □

Теорема 11. *Пусть* $G = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T_1} G_{\mathbf{t}}$, $H = \prod\limits_{\bar{\mathbf{t}} \in T_2} H_{\bar{\mathbf{t}}}$, *где* $G_{\mathbf{t}}$ $(\mathbf{t} \in T_1)$ *и* $H_{\bar{\mathbf{t}}}$ $(\bar{\mathbf{t}} \in T_2)$ — *однородные вполне разложимые группы и множества* T_1 *и* T_2 *состоят из попарно несравнимых типов. Если группы* G *и* H *почти голоморфно изоморфны, то они изоморфны.*

Доказательство. Пусть A — произвольная однородная вполне разложимая группа, a_1, a_2 — ненулевые элементы группы A и $\chi(a_1) = \chi(a_2)$. Обозначим через $\langle a_1 \rangle_*$ и $\langle a_2 \rangle_*$ сервантные подгруппы, порождённые элементами a_1 и a_2 соответственно. Подгруппы $\langle a_1 \rangle_*$ и $\langle a_2 \rangle_*$ имеют ранг 1 и один и тот же тип. Значит, $\langle a_1 \rangle_* \cong \langle a_2 \rangle_*$. Так как A — однородная сепарабельная группа, то каждая из групп $\langle a_1 \rangle_*$ и $\langle a_2 \rangle_*$ выделяется в ней прямым слагаемым [11, предложение 87.2], т. е. $A = \langle a_1 \rangle_* \oplus A_1$, $A = \langle a_2 \rangle_* \oplus A_2$. Группы A_1 и A_2 — вполне разложимые группы [11, теорема 86.7], являющиеся однородными группами одного и того же типа и одинакового ранга. Следовательно, $A_1 \cong A_2$.

Понятно, что существует автоморфизм φ группы A, такой что $\varphi(a_1) = a_2$.

Так как любая группа $G_{\mathbf{t}}$ $(\mathbf{t} \in T_1)$ и любая группа $H_{\mathbf{t}}$ $(\mathbf{t} \in T_2)$ является однородной вполне разложимой группой, то эти группы транзитивны. Следовательно, по теореме 10 группы G и H подобны, т. е. $T_1 = T_2$ и $\mathrm{r}(G_{\mathbf{t}}) = \mathrm{r}(H_{\mathbf{t}})$ для всякого типа $\mathbf{t} \in T_1$. Так как $G_{\mathbf{t}}$ и $H_{\mathbf{t}}$ — однородные вполне разложимые группы одинакового ранга, то $G_{\mathbf{t}} \cong H_{\mathbf{t}}$ для всякого типа $\mathbf{t} \in T_1$. Значит, $G \cong H$. □

Обозначим через $\mathfrak{R}$ класс групп, состоящий из всех прямых произведений однородных групп с попарно несравнимыми типами, каждая однородная компонента которых является вполне разложимой.

Следствие 12. *Всякая группа из класса $\Re$ определяется своим голоморфом в этом классе.*

В заключение исследуем определяемость однородных вполне транзитивных групп своими голоморфами.

Напомним, что группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых элементов $a, b \in G$, таких что $\chi(a) \leqslant \chi(b)$, существует эндоморфизм η группы G, для которого $\eta(a) = b$.

Класс вполне транзитивных групп без кручения достаточно широк. Он содержит однородные сепарабельные, сильно однородные, однородные алгебраически компактные, квазисервантно инъективные группы, группы, полные в своей p-адической топологии, и другие группы [10].

Пусть G — абелева группа без кручения, $v = (k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots)$ — некоторая характеристика и $G(v) = \{g \in G \mid \chi(g) \geqslant v\}$. Понятно, что $G(v)$ является вполне характеристической подгруппой группы G.

Редуцированная абелева группа без кручения G называется *χ-группой*, если любая её вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = G(v)$, где v — некоторая характеристика [9]. Заметим, что однородная редуцированная абелева группа без кручения G является χ-группой тогда и только тогда, когда G вполне транзитивная группа [9].

Пусть G и H — голоморфно изоморфные группы без кручения ($\Gamma(G) \cong \Gamma(H)$), и пусть $\mu\colon \Gamma(G) \to \Gamma(H)$ — изоморфное отображение группы $\Gamma(G)$ на группу $\Gamma(H)$. Следуя И. Х. Беккеру, рассмотрим прямые разложения групп G и H, индуцированные изоморфизмом голоморфов. Каждая из групп G и H, как максимальная абелева нормальная подгруппа своего голоморфа, изоморфна максимальной абелевой нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Поэтому $H' = \mu G$ и $G' = \mu^{-1} H$ — максимальные абелевы нормальные подгруппы голоморфов $\Gamma(H)$ и $\Gamma(G)$ соответственно.

Группы G' и H' голоморфно разложимы [7], т. е. $G' = G_1 \oplus \Phi$, $H' = H_1 \oplus \Psi$, где G_1, H_1, Φ, Ψ — множества всех первых, вторых компонент групп G' и H'. Группы G_1 и H_1 — характеристические подгруппы групп G и H соответственно [14].

Имеем $\mu G = H' = H_1 \oplus \Psi$, $\mu^{-1} H = G' = G_1 \oplus \Phi$. Так как $G_1 = G \cap G'$, $H_1 = H \cap H'$, то $\mu G_1 = \mu(G \cap G') = \mu G \cap \mu G' = H' \cap H = H_1$. Следовательно, $H_1 \cong G_1$.

Подгруппы G_1 и H_1 выделяются прямыми слагаемыми в группах G и H соответственно. Действительно,

$$G = \mu^{-1} H' = \mu^{-1}(H_1 \oplus \Psi) = \mu^{-1} H_1 \oplus \mu^{-1} \Psi = G_1 \oplus G_2,$$

где $G_2 = \mu^{-1} \Psi$. Аналогично получаем, что $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_2 = \mu \Phi$.

Пусть $G = G_1 \oplus G_2$, $H = H_1 \oplus H_2$ — разложения групп G и H, индуцированные изоморфизмом голоморфов.

Заметим, что всякий автоморфизм $\varphi \in \Phi$ определяет некоторый гомоморфизм η группы G_2 в группу G_1. Действительно, если $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, то

$\varphi g_1 = g_1$, $\varphi g_2 = g_2 + g_1'$, где $g_1' \in G_1$ (см. [7]). Тогда полагаем $\eta g_2 = g_1'$. Обратно, всякий гомоморфизм $\eta \in \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$ определяет автоморфизм группы G, индуцирующий тождество на G_1 и отображающий всякий элемент $g_2 \in G_2$ на $g_2 + g_1'$, где $g_1' = \eta g_2$. Нетрудно убедиться в том, что $\Phi \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$. Группа Φ — максимальная абелева нормальная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(G)$, всякий элемент φ которой индуцирует тождество на G_1 и гомоморфизм группы G_2 в группу G_1 [2].

Итак, $G = G_1 \oplus G_2$, $H = H_1 \oplus H_2$, где G_1 и H_1 — характеристические подгруппы групп G и H соответственно, и

$$G_1 \cong H_1, \tag{9}$$

$$G_2 \cong \mathrm{Hom}(H_2, H_1), \tag{10}$$

$$H_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1). \tag{11}$$

Прямое разложение $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, индуцированное изоморфизмом голоморфов групп G и H, назовём Γ-*разложением*.

Теорема 13. *Всякая однородная вполне транзитивная группа определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Доказательство. Пусть G — однородная вполне транзитивная группа типа $\mathbf{t}$, H — произвольная абелева группа и группы G и H голоморфно изоморфны.

Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ и $H = H_1 \oplus H_2$ — Γ-разложения групп G и H.

Рассмотрим Γ-разложение группы G. G_1 — характеристическая подгруппа группы G. Заметим, что $G_1 \neq 0$. Это следует из формулы (2). Так как G_1 — прямое слагаемое группы G и G_1 — характеристическая подгруппа группы G, то G_1 — вполне характеристическая подгруппа группы G [11, с. 299]. Так как G является χ-группой, то $G_1 = G(v)$ для некоторой характеристики v.

Покажем, что $G_1 = G$.

Пусть g — произвольный ненулевой элемент группы G и $\chi(g)$ — характеристика элемента g.

Так как $G_1 \neq 0$, то существуют характеристика $\chi_1 \in \mathbf{t}$ и элемент $a \in G_1$ ($a \neq 0$), такие что $\chi_1 \geqslant v$ и $\chi(a) = \chi_1$. Так как группа G однородная, то характеристики $\chi(g)$ и $\chi(a)$ могут отличаться лишь на конечном числе мест. Следовательно, существует такое натуральное число n, что $\chi(ng) \geqslant \chi_1$, и поэтому $ng \in G_1$. Так как $g \in G_1 \oplus G_2$, то $g = g_1 + g_2$, где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$. Тогда $ng = ng_1 + ng_2$ и $ng_2 = ng - ng_1$. Следовательно, $ng_2 \in G_1 \cap G_2$, и поэтому $ng_2 = 0$. Так как G — группа без кручения, то $g_2 = 0$. Значит, $g = g_1$. Итак, мы получили, что $G = G_1$ и $G_2 = 0$.

Для Γ-разложений $G = G_1 \oplus G_2$ и $H = H_1 \oplus H_2$ голоморфно изоморфных групп G и H из (11) выводим, что $H_2 = 0$. Итак, $G = G_1$, $H = H_1$, и из (9) получаем, что $G \cong H$. □

Следствие 14. *Всякая однородная сепарабельная группа определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Следствие 15. *Всякая группа без кручения, полная в своей p-адической топологии, определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп.*

Литература

[1] Беккер И. Х. О голоморфах абелевых групп // Сиб. мат. журн. — 1964. — Т. 5, № 6. — С. 1228—1238.

[2] Беккер И. Х. О голоморфах нередуцированных абелевых групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1968. — № 8. — С. 3—8.

[3] Беккер И. Х. О голоморфах абелевых групп без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1974. — № 3. — С. 3—13.

[4] Беккер И. Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1975. — № 3. — С. 97—99.

[5] Беккер И. Х. Абелевы голоморфные группы // Междунар. конф. Всесибирские чтения по математике и механике. Избранные доклады. Т. 1. Математика. — 1997. — С. 43—47.

[6] Беккер И. Х., Гриншпон С. Я. Почти голоморфно изоморфные примарные абелевы группы // Группы и модули. Межвуз. темат. сб. науч. тр. — 1976. — С. 90—103.

[7] Гриншпон И. Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 9—16.

[8] Гриншпон С. Я. Почти голоморфно изоморфные абелевы группы // Тр. ТГУ. Вопросы математики. — 1975. — Т. 220, вып. 3. — С. 78—84.

[9] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1982. — С. 56—92.

[10] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 407—473.

[11] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[12] Miller G. A. On the multiple holomorph of a group // Math. Ann. — 1908. — Vol. 66. — P. 133—142.

[13] Mills W. H. Multiple holomorphs of finitely generated Abelian groups // Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — Vol. 71, no. 3. — P. 379—392.

[14] Mills W. H. On the non-isomorphism of certain holomorphs // Trans. Am. Math. Soc. — 1953. — Vol. 74, no. 3. — P. 428—443.