Периодические IF-группы*

С. Я. ГРИНШПОН
Томский государственный университет
e-mail: grinshpon@math.tsu.ru

М. М. НИКОЛЬСКАЯ
Томский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: mary_s83@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, IF-группа, вполне характеристическая подгруппа, инварианты Ульма—Капланского, периодически полная группа, допустимая последовательность.

Аннотация

В статье исследуются периодические группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе, так называемые IF-группы. Вводится понятие допустимой последовательности инвариантов Ульма—Капланского для примарных групп, с помощью которого получено описание IF-групп в некоторых важных классах p-групп.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, M. M. Nikolskaya, Torsion IF-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 47—58.

In this paper, we study torsion groups containing proper fully invariant subgroups isomorphic to the group itself, the so-called IF-groups. We introduce the concept of an admissible sequence of Ulm—Kaplansky invariants for primary groups by use of which a description of IF-groups is obtained in some important classes of p-groups.

Исследованию абелевых групп, содержащих собственные подгруппы, изоморфные самой группе, посвящён ряд работ. Например, в [6] рассматривались следующие группы:

I-группы — группы, изоморфные собственной подгруппе;

IP-группы — группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе;

ID-группы — группы, изоморфные собственному прямому слагаемому.

*Исследование выполнено при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы» (государственный контракт П937 от 20 августа 2009 года) и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.В37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображения-ми»). Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238 от 7 июля 2009 года.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 47—58.

В частности, в [6] доказано, что если G — редуцированная абелева группа, такая что G/pG — конечная группа для любого простого числа p, то G не является ID-группой.

В [9] исследуются абелевы p-группы, не содержащие собственных сервантных плотных подгрупп, изоморфных самой группе.

В [8] рассматриваются квазиминимальные группы (абелева группа A называется квазиминимальной, если она изоморфна всем её подгруппам той же мощности, что и сама группа A). В [8] доказано, в частности, что если G — бесконечная абелева p-группа, то G — квазиминимальная группа тогда и только тогда, когда $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ или G является прямой суммой циклических групп порядка p.

В настоящей статье исследуются абелевы группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Определение 1. Абелеву группу назовём IF-группой, если она содержит собственную изоморфную себе вполне характеристическую подгруппу.

Всюду далее в этой статье под группой будем понимать аддитивно записанную абелеву группу.

Для исследования IF-групп нам понадобятся следующие результаты.

Теорема 2 [7, теорема 2.8]. *Пусть $B = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^k)$. L — вполне характеристическая подгруппа группы B тогда и только тогда, когда $L = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} p^{n_k}B_k$, где*

1) *$n_k \leqslant k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;*
2) *$n_k \leqslant n_{k+r} \leqslant n_k + r$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$.*

Теорема 3. *Если $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ и S — вполне характеристическая подгруппа группы A, то $S = \bigoplus\limits_{i\in I}(S \cap A_i)$, где $S \cap A_i$ — вполне характеристическая подгруппа группы A_i для каждого $i \in I$.*

Эту теорему можно доказать, обобщая рассуждения, проведённые в [4] при доказательстве леммы 9.3.

Рассмотрим вначале случай ограниченных групп.

Теорема 4. *Никакая ограниченная p-группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть B — ограниченная p-группа и p^m — наибольший из порядков элементов группы B. Тогда $B = \bigoplus\limits_{k=1}^{m} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^k)$ [4, с. 107]. Пусть L — вполне характеристическая подгруппа группы B. Тогда по теореме 2

$$L = p^{n_1}B_1 \oplus p^{n_2}B_2 \oplus \ldots \oplus p^{n_m}B_m,$$

где n_k удовлетворяют неравенствам 1) и 2) этой теоремы. Если $n_m = 0$, то из того, что $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_m = 0$, получаем, что $L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_m = B$, а следовательно, L не является собственной подгруппой группы B. Значит, $n_m \geqslant 1$.

Имеем $p^{n_m}B_m = \bigoplus \mathbb{Z}(p^{m-n_m})$, откуда следует, что в группе L нет циклических прямых слагаемых порядка p^m, и поэтому L не изоморфна B. $\square$

Лемма 5. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, *и пусть* $C = \bigoplus\limits_{i\in I} C_i = \bigoplus\limits_{i\in I} C'_i$, *где* C_i *и* C'_i *— подгруппы группы* A_i *для каждого* $i \in I$. *Тогда* $C_i = C'_i$ *для каждого* $i \in I$.

Доказательство. Покажем, что $C_i \subset C'_i$. Пусть $c_i \in C_i$. Тогда $c_i \in C$ и, следовательно, $c_i \in \bigoplus\limits_{i\in I} C'_i$. Имеем $c_i = c'_{i_1} + c'_{i_2} + \ldots + c'_{i_k}$, где $c'_{i_j} \in C'_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,k}$. Так как C_i и C'_i — подгруппы группы A_i для каждого $i \in I$, то $c_i \in A_i$, $c'_{i_j} \in A_{i_j}$. Учитывая, что A — прямая сумма групп A_i $(i \in I)$, получаем, что для некоторого j $(j = \overline{1,k})$ $i_j = i$ и $c'_{i_j} = c_i$, а для всех остальных j $c'_{i_j} = 0$. Значит, $c_i \in C'_i$. Аналогично $C'_i \subset C_i$ для каждого $i \in I$. Следовательно, $C_i = C'_i$ для каждого $i \in I$. $\square$

Теорема 6. *Пусть* $B = \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, *где* B_i *— вполне характеристическая подгруппа группы* B *для каждого* $i \in I$. B *является IF-группой тогда и только тогда, когда существует хотя бы один индекс* $i \in I$, *для которого группа* B_i *является IF-группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть S — собственная вполне характеристическая подгруппа группы B, такая что $B \cong S$. Имеем $S = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$, где $S_i = S \cap B_i$ — вполне характеристическая подгруппа группы B_i для каждого $i \in I$. Пусть φ — изоморфное отображение группы B на S. Отображение φ можно рассматривать как эндоморфизм группы B. Обозначим через φ_i $(i \in I)$ ограничение эндоморфизма на B_i. Так как B_i — вполне характеристическая подгруппа группы B, то φ_i — эндоморфизм группы B_i для каждого $i \in I$. Пусть $b \in B$, $b = b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}$, где $b_{i_j} \in B_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,k}$. Имеем

$$\varphi b = \varphi(b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}) = \varphi b_{i_1} + \varphi b_{i_2} + \ldots + \varphi b_{i_k} = \varphi_{i_1} b_{i_1} + \varphi_{i_2} b_{i_2} + \ldots + \varphi_{i_k} b_{i_k}.$$

Следовательно, $\varphi B = \sum\limits_{i\in I} \varphi_i B_i$. Так как $\varphi_i B_i \subset B_i$, то

$$\sum_{i\in I} \varphi_i B_i = \bigoplus_{i\in I} \varphi_i B_i$$

[4, с. 50]. Итак, $S = \varphi B = \bigoplus\limits_{i\in I} \varphi_i B_i$ и $S = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$, где $\varphi_i B_i$ и S_i — подгруппа группы B_i для каждого $i \in I$. По лемме 5 $\varphi_i B_i = S_i$. Так как φ — изоморфизм, то $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, и следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi_i = 0$ для каждого $i \in I$. Значит, φ_i — изоморфное отображение B_i на S_i. Учитывая, что $S \neq B$, получаем, что существует хотя бы один индекс $i_0 \in I$, такой что $B_{i_0} \cong S_{i_0}$ и $B_{i_0} \neq S_{i_0}$, т. е. группа B_{i_0} является IF-группой.

Достаточность. Пусть $B = \bigoplus\limits_{i\in I} B_i$, где B_i — вполне характеристическая подгруппа группы B для каждого $i \in I$. Пусть для некоторого $i_0 \in I$ B_{i_0} —

IF-группа. Докажем, что B — IF-группа. Так как B_{i_0} — IF-группа, то существует собственная вполне характеристическая подгруппа S_{i_0} группы B_{i_0}, такая что $S_{i_0} \cong B_{i_0}$. Пусть

$$S = S_{i_0} + \left(\bigoplus_{\substack{j \in I, \\ j \neq i_0}} B_j \right).$$

По свойствам прямых сумм [4, с. 50] получаем, что

$$S = S_{i_0} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in I, \\ j \neq i_0}} B_j \right).$$

Так как $S_{i_0} \neq B_{i_0}$, то S — собственная подгруппа группы B. Из того, что $S_{i_0} \cong B_{i_0}$, получаем, что

$$S = S_{i_0} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in I, \\ j \neq i_0}} B_j \right) \cong B_{i_0} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j \in I, \\ j \neq i_0}} B_j \right) = \bigoplus_{i \in I} B_i = B,$$

т. е. $S \cong B$. Пусть η — произвольный эндоморфизм группы B и $s \in S$. Тогда $s = s_{i_0} + b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}$, где $b_{i_j} \in B_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,k}$, $s_{i_0} \in S_{i_0}$. Имеем

$$\eta s = \eta(s_{i_0} + b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots + b_{i_k}) = \eta s_{i_0} + \eta b_{i_1} + \eta b_{i_2} + \ldots + \eta b_{i_k}.$$

Так как B_{i_j} — вполне характеристические подгруппы группы B для каждого $j = \overline{1,k}$, то $\eta b_{i_j} \in B_{i_j}$. S_{i_0} является вполне характеристической подгруппой группы B_{i_0}, а B_{i_0} является вполне характеристической подгруппой группы B. Значит, S_{i_0} — вполне характеристическая подгруппа группы B, и поэтому $\eta s_{i_0} \in S_{i_0}$. Получили, что $\eta s_{i_0} \in S_{i_0}$ для произвольного элемента $s \in S$, и следовательно, S — вполне характеристическая подгруппа группы B. Таким образом, B содержит собственную вполне характеристическую подгруппу S, такую что $S \cong B$, т. е. B — IF-группа. $\square$

Следствие 7. *Периодическая группа является IF-группой тогда и только тогда, когда некоторая её p-компонента является IF-группой.*

Доказательство. Действительно, пусть A — периодическая группа. Тогда $A = \bigoplus\limits_{p} A_p$ [4, с. 55], где A_p — p-компоненты группы A. A_p являются вполне характеристическими подгруппами группы A. По теореме 6 получаем утверждение следствия. $\square$

Теорема 8. *Никакая ограниченная группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть B — ограниченная группа. Тогда B — периодическая группа. Понятно, что любая p-компонента группы B также ограниченная p-группа. Поскольку по теореме 4 ограниченные p-группы не являются IF-группами, то в силу следствия 7 группа B не является IF-группой. $\square$

Рассмотрим нередуцированные и делимые p-группы.

Пусть A — p-группа. Через $A[p^k]$, где k — целое неотрицательное число, обозначим, как обычно [4, с. 15], следующую подгруппу группы A: $\{a \in A \mid p^k a = 0\}$; если $k = \infty$, то полагаем $A[p] = A$. Если a — элемент порядка p^k группы A, то через $e(a)$ обозначим его экспоненту, т. е. $e(a) = k$. Далее нам понадобится следующий результат, в котором мы используем то, что всякую абелеву группу A можно представить в виде $A = R \oplus D_0 \oplus \Bigl(\bigoplus\limits_p D_p\Bigr)$, где R — редуцированная группа, D_0 — делимая группа без кручения, D_p — делимые p-группы (p пробегает множество всех простых чисел; некоторые из групп R, D_0, D_p могут быть нулевыми).

Теорема 9 [2]. *Пусть A — абелева группа, $A = R \oplus D_0 \oplus \Bigl(\bigoplus\limits_p D_p\Bigr)$, где R — редуцированная группа, D_0 — делимая группа без кручения, D_p — делимые p-группы. Подгруппа S группы A вполне характеристична в A тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих двух видов:*

1) *$S = R' \oplus \Bigl(\bigoplus\limits_p D_p[p^{k_p}]\Bigr)$, где $R' = \bigoplus\limits_p R'_p$ — периодическая вполне характеристическая подгруппа группы R (R'_p — p-компонента группы R') и $k_p \geqslant \sup\{e(r) \mid r \in R'_p\}$ (k_p — целое неотрицательное число или символ ∞);*
2) *$S = R' \oplus D_0 \oplus \Bigl(\bigoplus\limits_p D_p\Bigr)$, где R' — вполне характеристическая подгруппа группы R.*

Теорема 10. *Нередуцированная p-группа A является IF-группой тогда и только тогда, когда её редуцированная часть является IF-группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — нередуцированная p-группа. Тогда она имеет вид $A = R \oplus D_p$, где D_p — делимая p-группа, R — редуцированная p-группа. Пусть A — IF-группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S \cong A$ и $S \neq A$. По теореме 9 S имеет один из следующих двух видов:

1) $S = R' \oplus D_p[p^{k_p}]$, где $k_p \geqslant \sup\{e(r) \mid r \in R'\}$, R' — вполне характеристическая подгруппа группы R;
2) $S = R' \oplus D_p$, R' — вполне характеристическая подгруппа группы R.

Рассмотрим первый случай. Пусть $k_p \neq \infty$. Тогда $D_p[p^{k_p}] = \{d \in D_p \mid p^{k_p} d = 0\}$ — ограниченная группа, а значит, она не содержит делимых подгрупп. Следовательно, S — редуцированная группа. Так как A — нередуцированная группа и $S \cong A$, то получаем противоречие.

Если $k_p = \infty$, то первый случай совпадает со вторым.

Рассмотрим второй случай. Пусть $S = R' \oplus D_p$, где R' — вполне характеристическая подгруппа группы R. Так как $A = R \oplus D_p$ и $S \cong A$, то получаем, что $R' \cong R$ и R' — собственная подгруппа группы R. Значит, R — IF-группа.

Достаточность. Пусть A — нередуцированная p-группа вида $A = R \oplus D_p$. Пусть R — IF-группа. Тогда существует вполне характеристическая подгруппа R' группы R, такая что $R' \cong R$ и $R' \neq R$. Рассмотрим группу $S = R' \oplus D_p$.

S — собственная вполне характеристическая подгруппа группы A, и $S \cong A$. Следовательно, A — IF-группа. $\square$

Теорема 11. *Делимая p-группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — делимая p-группа. Тогда $A = D_p$. Предположим противное, пусть A — IF-группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A, что $S \cong A$ и $S \neq A$. Тогда по теореме 9 имеют место следующие случаи:

1) $S = D_p[p^{k_p}]$, где k_p — любое целое неотрицательное число или ∞;
2) $S = D_p$.

Рассмотрим первый случай. Если $k_p \neq \infty$, то $S = D_p[p^{k_p}] = \{d \in D_p \mid p^{k_p}d = 0\}$ — ограниченная группа, а значит, она не является делимой группой. Так как A — делимая p-группа и $S \cong A$, то получаем противоречие.

Если $k_p = \infty$, то $S = D_p$ и первый случай совпадает со вторым.

Рассмотрим второй случай. Пусть $S = D_p$. Так как $A = D_p$, то S не является собственной подгруппой группы A. Значит, A не является IF-группой. $\square$

Теорема 12. *Делимая периодическая группа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — делимая периодическая группа. Тогда $A = \bigoplus\limits_p A_p$, где A_p — делимые p-группы. Применяя теорему 11 и следствие 7, получаем, что A не является IF-группой. $\square$

Теорема 13. *Для нередуцированной периодической группы A следующие условия эквивалентны*:

1) *A является IF-группой*;
2) *некоторая p-компонента группы A не является делимой группой и имеет редуцированную часть, которая является IF-группой*;
3) *редуцированная часть группы A является IF-группой.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть A — нередуцированная периодическая группа, являющаяся IF-группой. Тогда по следствию 7 некоторая её p-компонента является IF-группой, причём по теореме 11 эта p-компонента не является делимой группой. Применяя теорему 10, получаем, что в этой p-компоненте редуцированная часть является IF-группой.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Каждую из p-компонент A_p группы A можно записать в виде $A_p = R_p \oplus D_p$, где R_p — редуцированная p-группа, а D_p — делимая p-группа. Тогда редуцированная часть R группы A может быть записана в виде $R = \bigoplus\limits_p R_p$. Так как хотя бы одна из групп R_p в силу условия 2) является IF-группой, то по следствию 7 группа R является IF-группой.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть R_p и D_p соответственно редуцированная и делимая части p-компоненты A_p группы A, т. е. $A_p = R_p \oplus D_p$. Тогда $A = \Big(\bigoplus\limits_p R_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus\limits_p D_p\Big)$. Понятно, что $\bigoplus\limits_p R_p$ — редуцированная часть группы A.

По следствию 7 для некоторого простого числа p группа R_p является IF-группой. Применяя теорему 10, получаем, что для этого простого числа p группа A_p является IF-группой, а тогда по следствию 7 и группа A является IF-группой. $\square$

Теоремы 12 и 13 сводят исследование периодических IF-групп к исследованию редуцированных примарных IF-групп.

Перейдём теперь к рассмотрению сепарабельных p-групп. Рассмотрим вначале прямые суммы циклических p-групп. Так как никакая ограниченная группа не является IF-группой, то нам нужно рассмотреть неограниченные группы.

Обозначим через $\mathbb{N}_0$ множество всех целых неотрицательных чисел, а через $f_A(k)$ k-й инвариант Ульма—Капланского p-группы A, т. е. ранг фактор-группы $p^kA[p]/p^{k+1}A[p]$. Нам понадобится следующее определение.

Определение 14. Пусть B — p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Строго возрастающую последовательность неотрицательных целых чисел $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ назовём допустимой для группы B, если для инвариантов Ульма—Капланского этой группы выполняется система равенств

$$f_A(k) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i), \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

Теорема 15. *Пусть B — неограниченная p-группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Группа B является IF-группой тогда и только тогда, когда для неё существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа B является IF-группой. Заметим, что последовательность всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию, является допустимой для любой сепарабельной p-группы, так как система равенств (1), определяющих допустимую последовательность, имеет в этом случае тривиальный вид: $f_A(k) = f_A(k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Предположим, что последовательность всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию, является единственной допустимой последовательностью для группы B. Если L — вполне характеристическая подгруппа группы B, то согласно теореме 2 она имеет вид

$$L = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} p^{n_k} B_k,$$

где n_k удовлетворяет неравенствам 1) и 2) теоремы 2. Имеем

$$\begin{aligned} f_L(n) &= \mathrm{r}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} p^{n_k} B_k \mid p^{n_k} B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^{n+1})\right) = \\ &= \mathrm{r}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} p^{n_k} B_k \mid k - n_k = n+1\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mathrm{r}(p^{n_k} B_k) \mid k - n_k = n+1) = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (\mathrm{r}(B_k) \mid k - n_k - 1 = n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (f_B(k-1) \mid k - n_k - 1 = n). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_L(n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (f_B(k-1) \mid k - n_k - 1 = n). \tag{2}$$

Из теоремы 2 следуют соотношения

$$(k+1) - n_k + 1 - 1 \geqslant (k+1) - (n_k+1) - 1 = k - n_k - 1, \tag{3}$$

$$(k+1) - n_k + 1 - 1 \leqslant (k+1) - n_k - 1 = (k - n_k - 1) + 1. \tag{4}$$

Пусть $i_n = \min\limits_{k\in\mathbb{N}}\{k-1 \mid k - n_k - 1 = n\}$. Тогда из (2)—(4) получаем

$$f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i). \tag{5}$$

Среди сумм правой части равенства (5) могут быть и вырожденные, т. е. состоящие из одного слагаемого (это получается, когда $i_{n+1} = i_n + 1$). Пусть $L \cong B$. Тогда с учётом равенства (5) для всякого целого неотрицательного числа n

$$f_B(n) = f_L(n) = \sum_{i=i_n}^{i_{n+1}-1} f_B(i).$$

Последовательность $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ является допустимой для группы B, и поэтому по условию теоремы $i_n = n$ для всякого n. Учитывая, что $i_n = \min\limits_{k\in\mathbb{N}}\{k-1 \mid k - n_k - 1 = n\}$, получаем, что $n_k = 0$ для всякого k, т. е. $L = B$. Это противоречит тому, что B является IF-группой.

Достаточность. Запишем группу B в виде $B = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k$, где $B_k = \bigoplus \mathbb{Z}(p^k)$. Пусть для группы B существует допустимая последовательность $r_0, r_1, r_2, \ldots$, отличная от допустимой последовательности $0, 1, 2, \ldots$. Тогда для всякого $m \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$f_B(m) = \sum_{r=r_m}^{r_{m+1}-1} f_B(r). \tag{6}$$

Возможны два случая:

1) $r_0 \neq 0$,
2) $r_0 = 0$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $r_0 \neq 0$. Построим подгруппу L группы B следующим образом:

$$\begin{aligned}L = pB_1 &\oplus p^2B_2 \oplus \ldots \oplus p^{r_0}B_{r_0} \oplus p^{r_0}B_{r_0+1} \oplus p^{r_0+1}B_{r_0+2} \oplus \ldots \oplus\\ &\oplus p^{r_1-1}B_{r_1} \oplus p^{r_1-1}B_{r_1+1} \oplus p^{r_1}B_{r_1+2} \oplus p^{r_1+1}B_{r_1+3} \oplus \ldots \oplus\\ &\oplus p^{r_2-2}B_{r_2} \oplus p^{r_2-2}B_{r_2+1} \oplus p^{r_2-1}B_{r_2+2} \oplus p^{r_2}B_{r_2+3} \oplus \ldots \oplus p^{r_3-3}B_{r_3} \oplus \ldots,\end{aligned}$$

т. е.

$$L = \bigoplus p^{n_k} B_k,$$

где $n_{r_j} = n_{r_{j+1}} = r_j - j$ ($j \in \mathbb{N}_0$), $n_{r_j+k} = r_j - j + k - 1$ ($1 < k < r_{j+1} - r_j + 1$). L — собственная подгруппа группы B. Используя теорему 2, получаем, что L — вполне характеристическая подгруппа группы B. Более того, $L \cong B$ в силу равенства соответствующих инвариантов Ульма—Капланского. Действительно, из построения группы L и с учётом равенств (1) получаем для всякого $m \in \mathbb{N}_0$

$$f_L(m) = f_B(r_m) + f_B(r_m + 1) + \ldots + f_B(r_{m+1} - 1) = f_B(m).$$

Значит, $L \cong B$, но $L \neq B$. Следовательно, B является IF-группой.

Рассмотрим второй случай. Пусть $r_0 = 0$. Обозначим через $k+1$ ($k \in \mathbb{N}_0$) наименьшее натуральное число, для которого $r_{k+1} > k+1$. Тогда $r_0 = 0$, $r_1 = 1, \ldots, r_k = k$ и допустимая последовательность имеет вид $0, 1, \ldots, k, r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots$. Равенства (6) для такой последовательности запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&f_B(0) = f_B(0),\\
&f_B(1) = f_B(1),\\
&\quad\ldots\\
&f_B(k-1) = f_B(k-1),\\
&f_B(k) = f_B(k) + f_B(k+1) + \ldots + f_B(r_{k+1} - 1),\\
&f_B(q) = f_B(r_q) + \ldots + f_B(r_{q+1} - 1) \text{ для всякого } q > k \quad (q \in \mathbb{N}_0).
\end{aligned} \tag{7}$$

Сумма, стоящая в правой части $(k+1)$-го равенства в (7), является первой невырожденной суммой в (7), т. е. суммой, состоящей из более чем одного слагаемого. Рассмотрим следующую подгруппу L группы B:

$$\begin{aligned}
L = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_k \oplus B_{k+1} \oplus pB_{k+2} \oplus \ldots \oplus\\
\oplus p^{r_{k+1}-k-1} B_{r_{k+1}} \oplus p^{r_{k+1}-k-1} B_{r_{k+1}+1} \oplus p^{r_{k+1}-k} B_{r_{k+1}+2} \oplus \ldots \oplus\\
\oplus p^{r_{k+2}-k-2} B_{r_{k+2}} \oplus p^{r_{k+2}-k-2} B_{r_{k+2}+1} \oplus p^{r_{k+2}-k-1} B_{r_{k+2}+2} \oplus \ldots \oplus\\
\oplus p^{r_{k+3}-k-3} B_{r_{k+3}} \oplus \ldots .
\end{aligned}$$

Используя теорему 2, получаем, что L — вполне характеристическая подгруппа группы B. Учитывая строение группы B, имеем

$$\begin{aligned}
&f_L(0) = f_B(0),\\
&f_L(1) = f_B(1),\\
&\quad\ldots\\
&f_L(k-1) = f_B(k-1),\\
&f_L(k) = f_B(k) + f_B(k+1) + \ldots + f_B(r_k + 1 - 1),\\
&f_L(q) = f_B(r_q) + \ldots + f_B(r_{q+1} - 1) \text{ для всякого } q > k \quad (q \in \mathbb{N}_0).
\end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), получаем, что $L \cong B$. Так как $L \neq B$, то B является IF-группой. □

Перейдём теперь к рассмотрению произвольных сепарабельных p-групп.

Теорема 16. *Сепарабельная p-группа не является IF-группой, если её базисная подгруппа не является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — сепарабельная p-группа, у которой базисная подгруппа B не является IF-группой. Не умаляя общности, можно считать, что A — редуцированная p-группа. Если A — ограниченная группа, то в силу теоремы 8 A не является IF-группой (заметим, что в этом случае базисная подгруппа группы A совпадает с A). Пусть A — неограниченная группа. Предположим, что A — IF-группа. Тогда существует собственная вполне характеристическая подгруппа S группы A, такая что $S \cong A$. Так как A — редуцированная сепарабельная p-группа, то A не содержит элементов бесконечной высоты [5, с. 7]. S — неограниченная вполне характеристическая подгруппа группы A, и поэтому S — широкая подгруппа группы A [7, с. 423]. Следовательно, $S \cap B$ — базисная подгруппа группы S [7, с. 422]. □

Теорема 17. *Если неограниченная сепарабельная p-группа является IF-группой, то для неё существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Доказательство. Пусть A — неограниченная сепарабельная p-группа, являющаяся IF-группой, и пусть B — её базисная подгруппа. Тогда по теореме 16 B — IF-группа. Применяя теорему 15, получаем, что для группы B существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию. Так как $f_A(k) = f_B(k)$ для всякого $k \in \mathbb{N}_0$ [4, с. 186], то эта же последовательность будет допустимой и для группы A. □

Следствие 18. *Неограниченная сепарабельная p-группа не является IF-группой, если её инварианты Ульма—Капланского образуют возрастающую последовательность.*

Доказательство. Пусть A — неограниченная сепарабельная p-группа. Пусть последовательность инвариантов Ульма—Капланского группы A является возрастающей. Рассмотрим допустимую последовательность $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$. Тогда выполняются равенства (1). Рассмотрим равенство

$$f_A(k) = \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} f_A(i) = f_A(i_k) + f_A(i_k+1) + \ldots + f_A(i_{k+1}-1),$$

где k — произвольное неотрицательное целое число. Поскольку последовательность инвариантов Ульма—Капланского группы A возрастающая, то каждое такое равенство будет вырожденным, т. е. для каждого $k \in \mathbb{N}_0$ $f_A(k) = f_A(i_k)$, причём $i_k = k$. Таким образом, допустимая последовательность $i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots$ совпадает с последовательностью $0, 1, 2, \ldots$, а значит, по теореме 17 группа A не является IF-группой. □

Важную роль в теории абелевых p-групп играют периодически полные группы. Периодически полной p-группой называется периодическая часть $T(\bar{B})$ p-адического пополнения $\bar{B}$ прямой суммы B циклических p-групп [5, с. 22]. Впервые эти группы стал изучать Л. Я. Куликов, он называл их замкнутыми группами [3].

Теорема 19. *Для периодически полной p-группы A следующие условия эквивалентны*:

1) *A является IF-группой*;
2) *базисная подгруппа группы A является IF-группой*;
3) *A — неограниченная группа, для которой существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.*

Доказательство. Докажем, что эквивалентны условия 1) и 2). Учитывая теорему 16, нужно доказать только импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть A — периодически полная p-группа и B — её базисная подгруппа, являющаяся IF-группой. По теореме 2 B — неограниченная группа, и поэтому A также неограниченная группа. Так как B — IF-группа, то существует собственная вполне характеристическая подгруппа S группы B, такая что $B \cong S$. Понятно, что S является собственной широкой подгруппой группы B. Существует собственная широкая подгруппа S^* группы A, такая что $S^* \cap B = S$ [7, теорема 2.9], причём S — базисная подгруппа группы S^* [7, с. 422]. Как широкая подгруппа периодически полной группы, S^* является периодически полной группой [1]. Итак, получили, что в группе A есть собственная вполне характеристическая подгруппа S^*, такая что базисная подгруппа B группы A изоморфна базисной подгруппе S группы S^*. Так как A и S^* — периодически полные группы, то $A \cong S^*$, т. е. A является IF-группой.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть B — базисная подгруппа группы A, причём B является IF-группой. Если A — ограниченная группа, то $A = B$. Следовательно, B — ограниченная IF-группа, что противоречит теореме 8. Если же A — неограниченная группа, то B — неограниченная группа. Учитывая теорему 15 и то, что $f_A(k) = f_B(k)$ для каждого $k \in \mathbb{N}_0$, получаем, что для группы A существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть A — неограниченная группа, для которой существует допустимая последовательность, отличная от последовательности всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по возрастанию. Тогда её базисная подгруппа B обладает тем же свойством. По теореме 15 B является IF-группой, и с учётом эквивалентности условий 2) и 1) группа A также является IF-группой. $\square$

Будем говорить, что последовательность инвариантов Ульма—Капланского неограниченной сепарабельной p-группы A является периодической, если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство $f_A(n) = f_A(n+k)$.

Следствие 20. *Пусть A — периодически полная p-группа. Если последовательность инвариантов Ульма—Капланского группы A является периодической, то A — IF-группа.*

Доказательство. Пусть A — периодически полная p-группа и существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $n \in \mathbb{N}_0$ выполняется равенство $f_A(n) = f_A(n+k)$. Тогда для такой группы последовательность $k, k+1, k+2, \ldots$ является допустимой, и поэтому по теореме 19 A является IF-группой. □

Следствие 21. *Если для периодически полной p-группы A существует такое кардинальное число γ ($\gamma \neq 0$), что $f_A(n) = \gamma$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$, то A является IF-группой.*

Доказательство. Пусть A — периодически полная p-группа, и пусть для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ $f_A(n) = \gamma$, где γ — некоторое кардинальное число. Тогда такая последовательность инвариантов Ульма—Капланского является периодической, так как $f_A(n) = f_A(n+1)$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$. Применяя следствие 20, получаем, что A является IF-группой. □

Литература

[1] Гриншпон С. Я. О некоторых классах примарных абелевых групп почти изоморфных по вполне характеристическим подгруппам // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1976. — № 2. — С. 23—30.

[2] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1982. — С. 56—92.

[3] Куликов Л. Я. К теории абелевых групп произвольной мощности // Мат. сб. — 1945. — № 16. — С. 129—162.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[6] Beaumont R. A., Pierce R. S. Isomorphic direct summands of Abelian groups // Math. Ann. — 1964. — Vol. 153. — P. 21—37.

[7] Benabdallah K. M., Eisenstadt B. J., Irwin J. M., Poluianov E. W. The structure of large subgroups of primary Abelian groups // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1970. — Vol. 21, no. 3-4. — P. 421—435.

[8] Goldsmith B., Óhógáin S., Wallutis S. Quasi-minimal groups // Proc. Am. Math. Soc. — 2004. — Vol. 132, no. 8. — P. 2185—2195.

[9] Monk G. S. Abelian p-groups without proper isomorphic pure dense subgroups // Illinois J. Math. — 1970. — Vol. 14, no. 1. — P. 164—177.

[10] Pierce R. S. Homomorphisms of primary Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963. — P. 215—310.