О некоторых классах хопфовых абелевых групп*

Е. В. КАЙГОРОДОВ
Томский государственный университет
e-mail: gazetaintegral@gmail.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, делимая группа, редуцированная группа, циклическая группа, аддитивная группа кольца, E-кольцо, артиново кольцо.

Аннотация

В настоящей работе приводится описание хопфовых групп в некоторых классах абелевых групп. Полностью описаны хопфовы делимые группы; на основе этого описания исследование хопфовости произвольных абелевых групп сведено к исследованию хопфовости редуцированных групп. Охарактеризованы также прямые суммы циклических групп, являющиеся хопфовыми группами. Наконец, рассматриваются конкретные примеры колец, аддитивные группы которых хопфовы.

Abstract

E. V. Kaygorodov, Some classes of Hopfian Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 59—61.

This paper describes the Hopfian groups in some classes of Abelian groups. The complete description of Hopfian divisible groups is presented; on the basis of this description, the study of Hopficity of arbitrary Abelian groups is reduced to the study of Hopficity of reduced groups. Direct sums of cyclic groups that are Hopfian groups are characterized. Finally, the paper looks at specific examples of rings whose additive groups are Hopfian.

В 1932 г. швейцарский математик Х. Хопф поставил вопрос о существовании конечно порождённой группы, изоморфной некоторой своей собственной фактор-группе. Группы, не обладающие таким свойством, получили название хопфовых.

Определение 1. Группа G называется хопфовой, если она не имеет собственных изоморфных себе фактор-групп.

Используется также и другое определение хопфовой группы.

Определение 2. Группа G называется хопфовой, если всякий эпиморфизм группы G на себя является автоморфизмом.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 59—61.

Понятие хопфовости можно ввести для различных алгебраических систем: модулей, колец, решёток, упорядоченных множеств, топологических и функциональных пространств. Изучение хопфовых алгебраических систем представляется важной и интересной задачей современной алгебры. В настоящей работе описываются хопфовы группы в некоторых классах абелевых групп.

Получены следующие результаты.

Теорема 1 [2]. *Делимая группа хопфова тогда и только тогда, когда она является прямой суммой конечного числа копий группы* $\mathbb{Q}$.

Следствие [2]. *Абелева группа является хопфовой тогда и только тогда, когда её редуцированная часть есть хопфова группа, а делимая часть, если она ненулевая, есть конечная прямая сумма копий рациональной группы* $\mathbb{Q}$.

Таким образом, проблема изучения хопфовых абелевых групп сводится к изучению и описанию хопфовых редуцированных абелевых групп.

Теорема 2 [2]. *Пусть* A *— прямая сумма циклических групп*:

$$A = \bigoplus A_{p_i} \oplus A_0,$$

где A_{p_i} *— прямая сумма циклических* p_i*-групп,* A_0 *— прямая сумма циклических групп бесконечного порядка. Тогда группа* A *хопфова, если и только если все группы* A_{p_i} *конечны, а группа* A_0 *имеет конечный ранг.*

Интересные примеры хопфовых абелевых групп появляются при изучении аддитивных групп отдельных колец. Для удобства чтения напомним необходимые определения.

Определение 3 [3]. Пусть R — коммутативное кольцо. Правый R-модуль A называется $\mathrm{E}(R)$-модулем или просто E-модулем, если

$$\mathrm{Hom}_R(R, A) \cong \mathrm{Hom}(R, A).$$

Определение 4 [3]. Кольцо R (не обязательно коммутативное) называется E-кольцом, если R_R есть $\mathrm{E}(R)$-модуль.

Определение 5 [4]. Кольцо R называется артиновым слева (справа), если любая последовательность

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$$

левых (соответственно правых) идеалов, где $I_m \neq I_n$ при $m \neq n$, конечна. Говорят также, что R — кольцо с условием обрыва убывающих цепей левых (соответственно правых) идеалов.

Автором доказаны следующие теоремы.

Теорема 3 [1]. *Аддитивная группа любого E-кольца хопфова.*

Известно, что кольцо эндоморфизмов группы J_p целых p-адических чисел естественным образом изоморфно кольцу $\mathbb{Q}_p^*$ целых p-адических чисел [3]. Другими словами, кольцо $\mathbb{Q}_p^*$ является E-кольцом. Отсюда сразу вытекает, что группа целых p-адических чисел хопфова.

Теорема 4 [1]. *Для того чтобы аддитивная группа A артинова кольца была хопфовой, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид*

$$A = \left(\bigoplus_{r} \mathbb{Q}\right) \oplus \left(\bigoplus_{s_i} \mathbb{Z}(p_i^{k_i})\right),$$

где $p_i^{k_i}$ — делители фиксированного целого числа m, r и s_i — фиксированные натуральные числа.

Литература

[1] Кайгородов Е. В. О хопфовости аддитивных групп некоторых колец // Современные проблемы математики и механики. III Всероссийская молодёжная научная конференция: Сб. трудов конференции (Томск, 23—25 апреля 2012 г.). — Томск: Томск. гос. унив., 2012.

[2] Кайгородов Е. В. Хопфовы абелевы группы // Вестн. Томск. гос. унив. Математика и механика. — 2012. — Вып. 2 (18). — С. 92—99.

[3] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал Пресс, 2006.

[4] Крылов П. А., Туганбаев А. А., Чехлов А. Р. Упражнения по группам, кольцам и полям. — Томск: Томск. гос. унив., 2008.