Абсолютные ниль-идеалы абелевой группы*

Е. И. КОМПАНЦЕВА
Московский педагогический
государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, абсолютный ниль-идеал абелевой группы.

Аннотация

Известно, что для абелевой группы G, содержащей ненулевую делимую подгруппу без кручения, пересечение верхних ниль-радикалов всех колец на G равно $\bigcap\limits_p pT(G)$, где $T(G)$ — периодическая часть группы G. В настоящей работе для произвольной смешанной абелевой группы G определяется её сервантная вполне характеристическая подгруппа $G^* \supseteq T(G)$ и доказывается, что если G не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения, то в любом кольце на G подгруппа $\bigcap\limits_p pG^*$ является ниль-идеалом, а первая ульмовская подгруппа G^1 — нильпотентным идеалом.

Abstract

E. I. Kompantseva, Absolute nil-ideals of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 63—76.

It is known that in an Abelian group G that contains no nonzero divisible torsion-free subgroups the intersection of upper nil-radicals of all the rings on G is $\bigcap\limits_p pT(G)$, where $T(G)$ is the torsion part of G. In this work, we define a pure fully invariant subgroup $G^* \supseteq T(G)$ of an arbitrary Abelian mixed group G and prove that if G contains no nonzero torsion-free subgroups, then the subgroup $\bigcap\limits_p pG^*$ is a nil-ideal in any ring on G, and the first Ulm subgroup G^1 is its nilpotent ideal.

Работа посвящена изучению взаимосвязи между строением абелевой группы и свойствами кольцевых структур на ней. Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и под группой всюду в дальнейшем понимается абелева группа. Кольцом на группе G называется любое кольцо, аддитивная группа которого изоморфна G. В [3] показано, что подгруппа Фраттини $\bigcap\limits_p pT(G)$ периодической части $T(G)$ произвольной группы G является её абсолютным ниль-идеалом, т. е. эта подгруппа является ниль-идеалом в любом кольце на G. В некоторых классах абелевых групп этот результат нельзя улучшить: для любой группы G из

*Работа поддержана грантом федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы, государственный контракт № 14.B37.21.0363.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 63—76.

этих классов пересечение верхних ниль-радикалов всех колец на G совпадает с $\bigcap\limits_p pT(G)$, это значит, что для группы G нельзя указать никакой подгруппы, отличной от $\bigcap\limits_p pT(G)$, которая являлась бы ниль-идеалом в любом кольце на G. К указанным классам относятся класс периодических групп [3] и класс групп, содержащих ненулевую делимую подгруппу без кручения [2]. Отметим, что ситуации в этих двух классах различны. На любой периодической группе G существует кольцо, верхний ниль-радикал которого равен $\bigcap\limits_p pT(G) = \bigcap\limits_p pG$. А среди групп, содержащих ненулевую делимую подгруппу без кручения, существуют такие группы G, что в каждом кольце на G наибольший ниль-идеал строго содержит $\bigcap\limits_p pT(G)$.

В настоящей работе изучаются абсолютные ниль-идеалы смешанных групп, не содержащих ненулевой делимой подгруппы без кручения. Для произвольной группы G определяется её сервантная вполне характеристическая подгруппа G^*, которая в общем случае может быть гораздо шире, чем $T(G)$. Доказывается, что если группа G не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения, то $\bigcap\limits_p pG^*$ является ниль-идеалом в любом кольце на G. Этот результат нельзя усилить в указанном классе абелевых групп в том смысле, что существует ассоциативное кольцо с аддитивной группой G, не содержащей ненулевой делимой подгруппы без кручения, в котором не только верхний ниль-радикал, но и радикал Джекобсона равен $\bigcap\limits_p pG^*$.

Частным случаем абсолютного ниль-идеала абелевой группы G является её абсолютный аннулятор. Под абсолютным аннулятором группы G понимается пересечение аннуляторов всех колец на G. Абсолютные аннуляторы изучались в [4—7]. В [3] показано, что абсолютный аннулятор периодической группы G равен её первой ульмовской подгруппе G^1. Это значит, в частности, что в любом кольце на периодической группе G подгруппа G^1 является нильпотентным идеалом. Как уже отмечалось, для группы G, не содержащей ненулевой делимой подгруппы без кручения, все её абсолютные ниль-идеалы содержатся в $\bigcap\limits_p pT(G)$. В настоящей работе доказано, что если группа G не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения, то в любом кольце на G подгруппа G^1 является нильпотентным идеалом.

Будем использовать следующие обозначения и определения. Умножением на группе G называется любой гомоморфизм $\mu\colon G \otimes G \to G$. Это умножение часто обозначается также знаком $\times$, т. е. $\mu(g_1 \times g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением определяет кольцо на группе G, которое обозначается (G, μ) или $(G, \times)$. Множества целых и целых неотрицательных чисел обозначаются $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}_0$ соответственно, $\mathrm{h}_p(g)$ — p-высота элемента g. Элемент прямого произведения $\prod\limits_{i \in I} G_i$ записывается в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$. Пусть P — некоторое множество простых чисел. Группу G будем называть P-делимой, если она p-делима для всех $p \in P$. Подгруппу A группы G назовём P-сервантной, если она является p-сервантной для каждого $p \in P$. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [1, 3].

Для произвольной группы G обозначим

$$\Lambda(G) = \{p \mid T_p(G) \neq 0\},$$
$$G^1_\Lambda = \{g \in G \mid \mathrm{h}_p(g) = \infty \text{ для любого } p \in \Lambda(G)\},$$
$$\bar{G} = G/G^1, \quad \bar{G}_\Lambda = G/G^1_\Lambda.$$

Пусть M — класс всех редуцированных групп, имеющих делимую фактор-группу по периодической части; L — класс всех редуцированных групп G, имеющих $\Lambda(G)$-делимую фактор-группу по периодической части; K — класс всех групп G, обладающих следующим свойством: любое умножение на периодической части группы G продолжается, причём однозначно, до умножения на всей группе G. Очевидно, $M \subseteq L$, кроме того $K \subseteq L$. Проблема изучения групп из класса K сформулирована в [8, проблема 38].

Определение [9]. Пусть d — действительное число, G — группа. Мы говорим, что элемент $g \in G$ удовлетворяет условию $(*)$ для d и простого числа p, если существует неубывающая неограниченная функция $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, такая что $\mathrm{h}_p(p^i g) > d\big(i + f(i)\big)$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$.

В [9] показано, что для группы $G \in L$ её n-я тензорная степень $\bigotimes^n G$ расщепляется тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ существует такое целое $k \neq 0$, что kg удовлетворяет условию $(*)$ для $n/(n-1)$ и любого $p \in \Lambda(G)$.

Далее везде d обозначает некоторое действительное число. Пусть G — группа. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ определим подмножества $G^{(n)}_\Lambda$, $G^{(n)}$, G^*_Λ и G^* группы G следующим образом:

$$G^{(n)}_\Lambda = \{g \in G \mid \text{найдётся } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ такое что}$$
$$kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } n/(n-1) \text{ и любого } p \in \Lambda(G)\},$$
$$G^{(n)} = \{g \in G \mid \text{найдётся } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \text{ такое что}$$
$$kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } n/(n-1) \text{ и любого простого } p\},$$
$$G^*_\Lambda = \{g \in G \mid \text{найдутся } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ и } d > 1, \text{ такие что}$$
$$kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } d \text{ и любого } p \in \Lambda(G)\},$$
$$G^* = \{g \in G \mid \text{найдутся } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ и } d > 1, \text{ такие что}$$
$$kg \text{ удовлетворяет условию } (*) \text{ для } d \text{ и любого простого } p\}.$$

Очевидно, что

$$G^{(2)}_\Lambda \subset G^{(3)}_\Lambda \subset \ldots \subset G^{(n)}_\Lambda \subset \ldots, \quad G^{(2)} \subset G^{(3)} \subset \ldots \subset G^{(n)} \subset \ldots .$$

Легко убедиться, что

$$G^*_\Lambda = \bigcup_{n=2}^{\infty} G^{(n)}_\Lambda, \quad G^* = \bigcup_{n=2}^{\infty} G^{(n)}, \quad G^* \subseteq G^*_\Lambda.$$

Укажем некоторые свойства подмножеств $G_\Lambda^{(n)}$, $G^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, G_Λ^*, G^*.

Теорема 1. *Пусть G — группа. Тогда*

1) *подмножества $G_\Lambda^{(n)}$, $G^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, G_Λ^*, G^* являются сервантными вполне характеристическими подгруппами группы G. Каждая из этих подгрупп содержит $T(G)$ и максимальную делимую подгруппу группы G;*
2) *фактор-группы $G/G_\Lambda^{(n)}$, $G/G^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, G/G_Λ, G/G^* являются группами без кручения;*
3) *если G — группа без кручения, то подгруппы $G^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ и G^* совпадают с максимальной делимой подгруппой группы G;*
4) *если $G = A \oplus B$, то $G^* = A^* \oplus B^*$ и $G^{(n)} = A^{(n)} \oplus B^{(n)}$ для любого натурального $n \geqslant 2$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) проверяются непосредственно.

Покажем, что выполняются утверждение 3). Пусть G — группа без кручения и D — её максимальная делимая подгруппа. Пусть $g \in G^*$, т. е. kg удовлетворяет условию $(*)$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $d > 1$ и для любого простого числа p. Тогда $\mathrm{h}_p(kg) = \mathrm{h}_p(p^i kg) - i > (d-1)i$ для любого p и для любого $i \in \mathbb{N}_0$, откуда следует, что $\mathrm{h}_p(kg) = \infty$ для всех p, и значит, $g \in D$. Следовательно, $G^{(n)} \subseteq G^* \subseteq D$, $n = 2, \ldots$. Легко убедиться, что при всех натуральных $n \geqslant 2$ подгруппа D содержится в $G^{(n)}$. Значит, $G^{(n)} = G^* = D$.

Докажем утверждение 4). Пусть $G = A \oplus B$. Нетрудно убедиться, что элемент $a \in A$ удовлетворяет условию $(*)$ для некоторого действительного числа $d > 1$ и простого числа p в группе G тогда и только тогда, когда a удовлетворяет условию $(*)$ для этих же чисел d и p в группе A. Поэтому $G^* \cap A = A^*$ и $G^{(n)} \cap A = A^{(n)}$ для любого натурального $n \geqslant 2$. Так как G^* и $G^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ — вполне характеристические подгруппы группы G, то $G^* = (G^* \cap A) \oplus (G^* \cap B) = A^* \oplus B^*$, $G^{(n)} = (G^{(n)} \cap A) \oplus (G^{(n)} \cap B) = A^{(n)} \oplus B^{(n)}$ [3, лемма 9.3]. Теорема доказана. □

Пример. Подгруппа G^* группы G в общем случае может быть гораздо шире, чем подгруппа $T(G)$. Рассмотрим группу G, которая является p-адическим пополнением группы $B = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k \rangle$, где $\mathrm{o}(e_k) = p^k$, и докажем, что фактор-группа $G^*/T(G)$ имеет несчётный ранг. Можно показать, что в группе G для любого целого $n \geqslant 2$ существует такой элемент g бесконечного порядка, что kg не удовлетворяет условию $(*)$ для p и $n/(n-1)$ при любом целом $k \neq 0$. Следовательно, по следствию 3.1 из [9] подгруппа $\bigotimes^n G^*$ не расщепляется ни при каком $n > 1$. Так как G является урегулированной копериодической группой, то $G^* \in K$ [3]. Известно [9], что в этом случае $G^*/T(G)$ — группа более чем счётного ранга.

Лемма 2. *Пусть смешанная группа G не содержит ненулевой $\Lambda(G)$-делимой подгруппы без кручения и фактор-группа $G/T(G)$ является $\Lambda(G)$-делимой (в частности, если G — редуцированная группа, то $G \in L$). Тогда подгруппы*

$\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG_\Lambda^{(n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *и* $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG_\Lambda^{*}$ *являются абсолютными ниль-идеалами группы* G.

Доказательство. Пусть μ — произвольное умножение на G и $n \geqslant 2$. Тогда $(G_\Lambda^{(n)}, \mu)$ — идеал кольца (G, μ), содержащий $T(G)$, при этом фактор-группа $G_\Lambda^{(n)}/T(G)$ является $\Lambda(G)$-делимой (теорема 1). Поэтому без потери общности будем считать, что $G = G_\Lambda^{(n)}$, и докажем, что $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG$ — ниль-идеал кольца (G, μ).

Запишем группу G в виде $G = G_1 \oplus D$, где G_1 — редуцированная группа, D — делимая периодическая группа. Тогда, так как $G \otimes D$ и $D \otimes G$ — делимые периодические группы [3, § 59], то $\overset{n}{\bigotimes} G \cong \Bigl(\overset{n}{\bigotimes} G_1\Bigr) \oplus D_1$, где D_1 — делимая периодическая группа. Так как группа $\overset{n}{\bigotimes} G_1$ расщепляется [9], то расщепляется и группа $\overset{n}{\bigotimes} G$, и фактор-группа $\Bigl(\overset{n}{\bigotimes} G\Bigr)/T\Bigl(\overset{n}{\bigotimes} G\Bigr)$, изоморфная группе $\overset{n}{\bigotimes}[G/T(G)]$ [3, теорема 61.5], является $\Lambda(G)$-делимой группой.

Пусть $g \in \bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG$. Обозначим через $\tilde{g}^n$ n-ю степень элемента g в кольце (G, μ) с некоторой фиксированной расстановкой скобок, через $\overset{\tilde{n}}{\bigotimes} G$ — тензорное произведение n экземпляров группы G с той же расстановкой скобок. Так как $\overset{\tilde{n}}{\bigotimes} G \cong \overset{n}{\bigotimes} G$ [3, § 59, упр. 8], то $\overset{\tilde{n}}{\bigotimes} G$ расщепляется и фактор-группа $\overset{\tilde{n}}{\bigotimes} G/T\Bigl(\overset{\tilde{n}}{\bigotimes} G\Bigr)$ является $\Lambda(G)$-делимой. Но по условию максимальная $\Lambda(G)$-делимая подгруппа группы G является периодической, поэтому $\tilde{g}^n \in T(G)$. Следовательно, при любой расстановке скобок $g^n \in T(G)$. Так как между n сомножителями скобки могут быть расставлены лишь конечным числом способов и так как $g \in \bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG$, то существует такое натуральное число k, что $g^{n+k} = 0$ при любой расстановке скобок. Таким образом, для каждого натурального $n \geqslant 2$ подгруппа $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG_\Lambda^{(n)}$ является абсолютным ниль-идеалом группы G. Следовательно, и подгруппа

$$\bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG_\Lambda^{*} = \bigcup_{n=2}^{\infty}\Bigl(\bigcap_{p\in\Lambda(G)} pG_\Lambda^{(n)}\Bigr) -$$

абсолютный ниль-идеал группы G. □

Следствие 3. *Если группа G имеет делимую фактор-группу по периодической части и не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения (в частности, если $G \in M$), то подгруппа $\bigcap\limits_{p} pG^*$ является абсолютным ниль-идеалом группы G.*

Следующий пример показывает, что условие, что группа G не содержит нулевой $\Lambda(G)$-делимой подгруппы без кручения, в лемме 2 существенно.

Пример. Пусть s, t — различные простые числа и $G = J_s \oplus T$, где T — t-группа, J_s — группа целых s-адических чисел. Тогда $\Lambda(G) = \{t\}$, максимальная $\Lambda(G)$-делимая подгруппа без кручения группы G равна J_s и $G^*_\Lambda = G$. Определим ассоциативное и коммутативное умножение μ на G следующим образом. Умножение μ превращает группу J_s в кольцо, изоморфное кольцу $\mathbb{Q}^*_s$ целых s-адических чисел, и $\mu(J_s \otimes T) = \mu(T \otimes J_s) = \mu(T \otimes T) = 0$. Ясно, что подгруппа $\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG^*_\Lambda = \bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG = J_s \oplus tT$ не является ниль-идеалом кольца (G, μ), так как в этом кольце ни один элемент из идеала J_s не является нильпотентным.

Лемма 4. *Пусть G — копериодическая группа, $G = A \oplus E$, где A — редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, E — прямая сумма урегулированной копериодической и делимой периодической групп. Тогда E — вполне характеристическая подгруппа группы G.*

Доказательство. Так как $T(G)$ — вполне характеристическая подгруппа группы G, то каждый эндоморфизм группы G индуцирует эндоморфизм группы $G/T(G)$. Нетрудно убедиться, что $T(G) = T(E)$ и $E/T(G)$ — максимальная делимая подгруппа группы $G/T(G) \cong A \oplus E/T(G)$. Поэтому $E/T(G)$ — вполне характеристическая подгруппа группы $G/T(G)$, откуда следует, что E является вполне характеристической подгруппой группы G $\square$

Теорема 5. *Пусть G — группа, не содержащая ненулевой делимой подгруппы без кручения. Тогда*

1) *подгруппа $\bigcap\limits_p pG^*$ является абсолютным ниль-идеалом группы G;*
2) *подгруппа G^1 является абсолютным нильпотентным идеалом группы G, индекс нильпотентности идеала G^1 в любом кольце на G не больше 3. Если G — редуцированная группа, то в любом кольце на G индекс нильпотентности идеал G^1 не больше 2.*

Доказательство. Пусть $\times$ — произвольное умножение на G. Так как подгруппы $\bigcap\limits_p pG^*$ и G^1 являются вполне характеристическими, то они являются идеалами в кольце $(G, \times)$. Покажем, что это соответственно ниль-идеал и нильпотентный идеал.

Пусть сначала G — копериодическая группа, не содержащая ненулевой делимой подгруппы без кручения. Тогда $G = A \oplus E$, где $E = C \oplus D$, A — редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, C — урегулированная копериодическая группа, D — делимая периодическая группа. Очевидно, фактор-группа $E/T(E)$ делимая, и по лемме 4 подгруппа E является идеалом кольца $(G, \times)$. По теореме 1 $G^* = A^* \oplus E^* = E^*$. Поэтому подгруппа $\bigcap\limits_p pG^* = \bigcap\limits_p pE^*$ является ниль-идеалом в кольце $(E, \times)$ (следствие 3), а значит, и в кольце $(G, \times)$.

Покажем, что G^1 — нильпотентный идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $g \in G^1$. Тогда $g \times E = \{g \times c \mid c \in E\}$ — делимая подгруппа группы G. Действительно, если

$c \in E$ и $n \in \mathbb{Z}$, то $c = nc_1 + t$ для некоторых $c_1 \in E$ и $t \in T(G)$. Поэтому $g \times c = g \times (nc_1 + t) = n(g \times c_1)$. Следовательно, $G^1 \times G^1 \subset D$. Если G — редуцированная группа, то $G^1 \times G^1 = 0$. Если группа G не является редуцированной, то $G^1 \times D = D \times G^1 = 0$. Следовательно, $g_1 \times (g_2 \times g_3) = (g_1 \times g_2) \times g_3 = 0$ для любых $g_1, g_2, g_3 \in G^1$. Итак, теорема доказана для копериодической группы G.

Пусть G — произвольная группа, не содержащая ненулевой делимой подгруппы без кручения. Тогда $G = G_1 \oplus D$, где G_1 — редуцированная группа, D — делимая периодическая группа. Рассмотрим копериодическую оболочку $F = \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G_1) \oplus D$ группы G. Очевидно, F также не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения, и если группа G редуцированная, то такой же является и группа F. Умножение $\times$ на G продолжается до умножения на F. Так как имеют место включения $\bigcap\limits_p pG^* \subseteq \bigcap\limits_p pF^*$ и $G^1 \subseteq F^1$ и по доказанному выше идеалы $\bigcap\limits_p pF^*$ и F^1 являются в кольце $(F, \times)$ соответственно ниль-идеалом и нильпотентным идеалом, то такими же (соответственно) будут и идеалы $\bigcap\limits_p pG^*$ и G^1 в кольце $(G, \times)$, причём индекс нильпотентности идеала G^1 в кольце $(G, \times)$ не превосходит индекса нильпотентности идеала F^1 в кольце $(F, \times)$. Так как умножение $\times$ на G произвольно, теорема доказана. $\square$

Следствие 6. *Пусть группа G не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения. Тогда для любого натурального $n \geqslant 2$ подгруппа $\bigcap\limits_p pG^{(n)}$ является абсолютным ниль-идеалом группы G.*

Замечание.

1. Теорема 5 неверна для групп, содержащих ненулевую делимую подгруппу без кручения. Как было показано в [2], для таких групп G наибольший абсолютный ниль-идеал совпадает с подгруппой $\bigcap\limits_p pT(G)$, а она может быть значительно меньше, чем $\bigcap\limits_p pG^*$ (см. пример после теоремы 1).
2. Из примера, приведённого после следствия 3, видно, что в утверждении 1) теоремы 5 подгруппу $\bigcap\limits_p pG^*$ нельзя заменить на подгруппу $\bigcap\limits_{p \in \Lambda(G)} pG^*_\Lambda$.

Наша следующая цель — показать, что результат теоремы 5 нельзя улучшить.

Лемма 7. *Пусть $G \in M$, $C = \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G)$ — копериодическая оболочка группы G, B — базисная подгруппа группы $T(G)$. Тогда*

1) *C — урегулированная копериодическая группа, $T(C) = T(G)$;*
2) *группа $\bar{C} = C/C^1$ изоморфна сервантно-инъективной оболочке группы $\bar{G} = G/G^1$ и $\mathbb{Z}$-адическому пополнению группы B.*

Доказательство. Справедлив изоморфизм

$$C \cong \mathrm{Ext}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T(G)\big) \oplus \mathrm{Ext}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},\, G/T(G)\big) = \mathrm{Ext}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T(G)\big)$$

[3, лемма 55.4], из него следует утверждение 1).

Докажем утверждение 2). Так как группы $(G+C^1)/C^1$ и $(B+C^1)/C^1$ сервантны в C/C^1, фактор-группы $(C/C^1)/\big((G+C^1)/C^1\big)$ и $(C/C^1)/\big((B+C^1)/C^1\big)$ делимы, то алгебраически компактная группа C/C^1 является сервантно инъективной оболочкой групп $(G+C^1)/C^1$ и $(B+C^1)/C^1$ [3], изоморфных соответственно группам G/G^1 и B. Лемма доказана. $\square$

Лемма 8. *Пусть $G \in L$, E — копериодическая оболочка группы G, B — базисная подгруппа группы $T(G)$. Тогда*

1) *группа $\bar{G}_\Lambda$ $(= G/G^1_\Lambda)$ изоморфна некоторой $\Lambda(G)$-сервантной подгруппе группы $\bar{E}_\Lambda$;*
2) *группа $\bar{E}_\Lambda$ изоморфна $\mathbb{Z}$-адическому пополнению группы B.*

Доказательство. Докажем утверждение 1) Так как G сервантна в E, то фактор-группа $(G+E^1_\Lambda)/E^1_\Lambda$, изоморфная группе $\bar{G}_\Lambda$, является $\Lambda(G)$-сервантной в $\bar{E}_\Lambda$.

Докажем утверждение 2). $E = A \oplus C$, где $A \cong \operatorname{Ext}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G/T(G)\big)$, $C \cong \operatorname{Ext}\big(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T(G)\big)$ — урегулированная копериодическая группа. Следовательно, A является $\Lambda(G)$-делимой группой, а C — p-делимой для всех $p \notin \Lambda(G)$ [3, § 52, п. Ж]. Поэтому $E^1_\Lambda = A \oplus C^1$ и группа $\bar{E}_\Lambda = E/(A \oplus C^1)$ изоморфна группе C/C^1, которая по лемме 7 изоморфна $\mathbb{Z}$-адическому пополнению группы B. $\square$

Пусть $G \in L$. Для каждого $p \in \Lambda(G)$ базисную подгруппу группы $T_p(G)$ будем записывать в виде $B_p = \bigoplus\limits_{\alpha \in I_p} \langle e^{(p)}_\alpha \rangle$; $B = \bigoplus\limits_{p \in \Lambda(G)} B_p$ — базисная подгруппа группы $T(G)$; $\hat{B}_p$ — p-адическое пополнение группы B_p, $\hat{B} = \prod\limits_p \hat{B}_p$ — $\mathbb{Z}$-адическое пополнение группы B. Согласно лемме 8 везде в дальнейшем группу $\bar{G}_\Lambda$ будем отождествлять с $\Lambda(G)$-сервантной подгруппой группы $\hat{B}$ (если $G \in M$, то группу $\bar{G}$ отождествляем с сервантной подгруппой группы $\hat{B}$). Через π_p будем обозначать проекцию группы $\hat{B}$ на группу $\hat{B}_p$. Группа $\hat{B}_p$ везде далее рассматривается как сервантная подгруппа группы $V_p = \prod\limits_{\alpha \in I_p} \big\langle e^{(p)}_\alpha \big\rangle$, т. е. элемент $b_p \in \hat{B}_p$ записывается в виде $b_p = \big(b_{\alpha,p} e^{(p)}_\alpha\big)_{\alpha \in I_p}$, где $b_{\alpha,p} \in \mathbb{Z}$. Так как $\hat{B}_p$ — p-адическое пополнение группы B_p, то множество ненулевых координат элемента $b_p \in \hat{B}_p$ не более чем счётно, поэтому b_p часто будем записывать в виде $b_p = \big(b_{1,p} e^{(p)}_1, b_{2,p} e^{(p)}_2, \ldots\big)$.

Пусть $G \in K$. Определим ассоциативное и коммутативное умножение $\times$ на базисной подгруппе B группы $T(G)$, положив для любых $p, q \in \Lambda(G)$ и для любых $\alpha \in I_p$, $\beta \in I_q$

$$e^{(p)}_\alpha \times e^{(q)}_\beta = \begin{cases} e^{(p)}_\alpha, & \text{если } p = q \text{ и } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } p \neq q \text{ или } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Это умножение на B однозначно определяет ассоциативное и коммутативное умножение на $T(G)$ [3, теорема 120.1], которое однозначно продолжается до умножения на G. Это умножение будем называть *каноническим умножением на G, определённым базисом* $\{e_\alpha^{(p)} \mid p \in \Lambda(G),\ \alpha \in I_p\}$.

Лемма 9. *Пусть $G \in K$. Тогда существует такое ассоциативное и коммутативное кольцо на G, что для любого элемента $g \in \Bigl(\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG\Bigr) \setminus G^*_\Lambda$ элементы $g, g^2, \ldots$ (степени элемента g в данном кольце) линейно независимы.*

Доказательство. Рассмотрим каноническое умножение $\times$ на G, определённое некоторым базисом $\{e_\alpha^{(p)} \mid p \in \Lambda(G),\ \alpha \in I_p\}$, и фактор-кольцо $(G/G^1_\Lambda, \times)$.

Пусть $g \in \Bigl(\bigcap\limits_{p\in\Lambda(G)} pG\Bigr) \setminus G^*_\Lambda$, $\bar g = g + G^1_\Lambda$,

$$\pi_p(\bar g) = \bigl(p^{k_1^{(p)}} b_{1,p} e_1^{(p)}, \ldots, p^{k_n^{(p)}} b_{n,p} e_n^{(p)}, \ldots\bigr)$$

для произвольного $p \in \Lambda(G)$, где $k_n^{(p)} \in \mathbb{N}$, $b_{n,p} \in \mathbb{Z}$, $p \nmid b_{n,p}$ $(n \in \mathbb{N})$, причём последовательность $\{k_n^{(p)}\}_n$ неограниченная и можно считать, что $0 < k_1^{(p)} \leqslant \leqslant k_2^{(p)} \leqslant \ldots \leqslant k_n^{(p)} \leqslant \ldots$. Обозначим $\sigma\bigl(e_n^{(p)}\bigr) = p^{s_n^{(p)}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Покажем, что элементы $\bar g, \bar g^2, \ldots, \bar g^m$ (степени элемента $\bar g$ в кольце $(\bar G_\Lambda, \times)$) линейно независимы. Элементы $\pi_p(\bar g^2), \ldots, \pi_p(\bar g^m)$ имеют вид

$$\pi_p(\bar g^2) = \bigl(p^{2k_1^{(p)}} b_{1,p}^2 e_1^{(p)},\ p^{2k_2^{(p)}} b_{2,p}^2 e_2^{(p)}, \ldots\bigr),$$
$$\ldots$$
$$\pi_p(\bar g^m) = \bigl(p^{mk_1^{(p)}} b_{1,p}^m e_1^{(p)},\ p^{mk_2^{(p)}} b_{2,p}^m e_2^{(p)}, \ldots\bigr).$$

Так как $g \notin G^*_\Lambda$, то $\bar g \notin (\bar G_\Lambda)^*_\Lambda$, т. е. для любых $d > 1$ и $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ найдётся $p \in \Lambda(G)$, такое что для любой неубывающей неограниченной функции $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ найдётся $i \in \mathbb{N}_0$, для которого $\mathrm{h}_p(p^i k \bar g) \leqslant d\bigl(i + f(i)\bigr)$. Это означает, что для любого действительного числа $d > 1$ либо

а) существует $p \in \Lambda(G)$, удовлетворяющее условию, что для любой неубывающей неограниченной функции $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ для любого $r \in \mathbb{N}$ найдётся $i > r$, для которого $\mathrm{h}_p(p^i \bar g) \leqslant d\bigl(i + f(i)\bigr)$, либо

б) существует бесконечное множество чисел $p \in \Lambda(G)$, для каждого из которых выполняется условие, что для любой функции $f_p\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ найдётся $i \in \mathbb{N}_0$, для которого $\mathrm{h}_p(p^i \bar g) \leqslant d\bigl(i + f_p(i)\bigr)$.

Пусть

$$c_1 \bar g + \ldots + c_m \bar g^m = 0 \tag{1}$$

при некоторых целых числах $c_1, \ldots, c_m$. Индукцией по t докажем, что $c_t = 0$ $(t = 1, \ldots, m)$. Пусть d — фиксированное действительное число, такое что $1 < d < 1 + 1/m < 2$. Рассмотрим два случая.

1. Для числа d выполняется условие а). Зафиксируем число p, удовлетворяющее этому условию, и в дальнейшем при рассмотрении случая 1 будем опускать

индекс p:

$$\pi_p(\bar g) = (p^{k_1} b_1 e_1, \ldots, p^{k_n} b_n e_n, \ldots), \quad \mathrm{o}(e_n) = p^{s_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из a) следует, что $\pi_p(\bar g)$ — элемент бесконечного порядка и последовательность $\{s_n - k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ неограниченная.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что p^{k_n} делит c_1. Для этого определим неубывающую неограниченную функцию $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ следующим образом:

$$f(i) = \left[\frac{2-d}{d} i\right].$$

Тогда из a) следует, что существует натуральное число i_0, удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} i_0 \geqslant \max\{s_r - k_r \mid 1 \leqslant r \leqslant n\}, \\ \mathrm{h}_p(p^{i_0}\bar g) - i_0 \leqslant (d-1)i_0 + df(i_0) \leqslant (d-1)i_0 + (2-d)i_0 = i_0. \end{cases} \tag{2}$$

Так как последовательность $\{s_r - k_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ неограниченная, то существует такое натуральное число $l > n$, что $s_l - k_l > i_0$, причём l можно выбрать таким образом, что $s_r - k_r \leqslant i_0$ для всех $r < l$. Тогда

$$\mathrm{h}_p(p^{i_0}\bar g) - i_0 \geqslant i_0 + k_l - i_0 = k_l.$$

С другой стороны, из (2) имеем, что

$$\mathrm{h}_p(p^{i_0}\bar g) - i_0 \leqslant i_0 < s_l - k_l,$$

следовательно, $k_l < s_l - k_l$. Из (1) получаем, что

$$c_1\pi_p(\bar g) + c_2\pi_p(\bar g^2) + \ldots + c_m\pi_p(\bar g^m) = 0,$$

откуда следует, что

$$c_1 p^{k_l} b_l + c_2 p^{2k_l} b_l^2 + \ldots + c_m p^{mk_l} b_l^m \equiv 0 \pmod{p^{s_l}}$$

и

$$c_1 b_l + c_2 p^{k_l} b_l^2 + \ldots + c_m p^{(m-1)k_l} b_l^m \equiv 0 \pmod{p^{s_l - k_l}}.$$

Так как p не делит b_l и $k_l < s_l - k_l$, то p^{k_l} делит c_1. Из того, что последовательность $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ неограниченная, следует, что $c_1 = 0$.

Предположим, что $c_1 = c_2 = \ldots = c_{t-1} = 0$ ($t \geqslant 2$). Докажем, что $c_t = 0$. Зафиксируем натуральное число n и покажем, что p^{k_n} делит c_t.

Так как $d < 1 + 1/m$, то $d < 1 + 1/t$. Определим неубывающую неограниченную функцию $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ следующим образом:

$$f(i) = \left[\frac{1 + 1/t - d}{d} i\right].$$

Рассуждениями, аналогичными предыдущим, получим, что существуют такие натуральные числа i_0 и $l > n$, что

$$k_l \leqslant \mathrm{h}_p(p^{i_0}\bar g) - i_0 < \frac{1}{t}(s_l - k_l).$$

откуда следует, что $k_l < s_l - tk_l$.

Согласно (1)

$$c_t p^{tk_l} b_l^t + c_{t+1} p^{(t+1)k_l} b_l^{t+1} + \ldots + c_m p^{mk_l} b_l^m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{s_l})$$

и

$$c_t b_l^t + c_{t+1} p^{k_l} b_l^{t+1} + \ldots + c_m p^{(m-t)k_l} b_l^m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{s_l - tk_l}).$$

Следовательно, $c_t \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{k_l})$, и значит, p^{k_n} делит c_t. Так как последовательность $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ неограниченная, то $c_t = 0$.

2. Для числа d выполняется условие б). Тогда $\pi_p(\bar{g}) \neq 0$ для каждого p из некоторого бесконечного подмножества множества $\Lambda(G)$. Зафиксируем одно из таких p. Тогда существует такое натуральное число l, что $s_l^{(p)} - k_l^{(p)} > 0$. Согласно (1)

$$c_1 p^{k_l^{(p)}} b_{l,p} + c_2 p^{2k_l^{(p)}} b_{l,p}^2 + \ldots + c_m p^{mk_l^{(p)}} b_{l,p}^m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{s_l^{(p)}})$$

и

$$c_1 b_{l,p} + c_2 p^{k_l^{(p)}} b_{l,p}^2 + \ldots + c_m p^{(m-1)k_l^{(p)}} b_{l,p}^m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{s_l^{(p)} - k_l^{(p)}}).$$

Так как $k_l^{(p)} > 0$, $s_l^{(p)} - k_l^{(p)} > 0$ и p не делит $b_{l,p}$, то p делит c_1. Из того, что множество таких p бесконечно, следует, что $c_1 = 0$.

Допустим, что $c_1 = c_2 = \ldots = c_{t-1} = 0$ ($t \geqslant 2$). Докажем, что $c_t = 0$. Из б) следует, что для неубывающей неограниченной функции

$$f(i) = \left[\frac{1 + 1/t - d}{d} i\right]$$

и для каждого p из некоторого бесконечного подмножества множества $\Lambda(G)$ выполняется условие, что найдётся такое $i_p \in \mathbb{N}$, что

$$\mathrm{h}_p(p^{i_p}\bar{g}) - i_p \leqslant (d-1)i_p + df(i_p) \leqslant \frac{1}{t} i_p.$$

Зафиксируем такое p. Как и в случае 1, доказываем, что существует натуральное число $l > n$, такое что $tk_l^{(p)} < s_l^{(p)} - k_l^{(p)}$. Тогда $s_l^{(p)} - tk_l^{(p)} > 0$. Согласно (1)

$$c_t p^{tk_l^{(p)}} b_{l,p}^t + c_{t+1} p^{(t+1)k_l^{(p)}} b_{l,p}^{(t+1)} + \ldots + c_m p^{mk_l^{(p)}} b_{l,p}^m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{s_l^{(p)}})$$

и

$$c_t b_{l,p}^t + c_{t+1} p^{k_l^{(p)}} b_{l,p}^{t+1} + \ldots + c_m p^{(m-t)k_l^{(p)}} b_{l,p}^m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ p^{s_l^{(p)} - tk_l^{(p)}}),$$

откуда следует, что p делит c_t. Так как множество таких p бесконечно, то $c_t = 0$. Следовательно, элементы $\bar{g}, \ldots, \bar{g}^m$ линейно независимы, и значит, линейно независимы элементы $g, \ldots, g^m$. Лемма доказана. □

Следующая теорема вместе с теоремой 5 показывает, что существует кольцо со смешанной аддитивной группой G, не содержащей ненулевой делимой подгруппы без кручения, в котором верхний ниль-радикал и радикал Джекобсона совпадают с $\bigcap_p pG^*$.

Теорема 10. *Пусть C — урегулированная копериодическая группа. Тогда для любого элемента $g \in C \setminus \Big(\bigcap\limits_p pC^*\Big)$ существует сервантная подгруппа G группы C, такая что $G \in M$, $g \in G \setminus \bigcap\limits_p pG^*$ и на G существует ассоциативное и коммутативное умножение $\times$, для которого $N(G,\times) = J(G,\times) = \bigcap\limits_p pG^*$.*

Доказательство. Пусть $g \in C \setminus C^*$, $\bar g = g + C^1 \in \bar C$. Пусть базис $\{e_\alpha^{(p)} \mid p \in \Lambda(C),\ \alpha \in I_p\}$ группы $T(C)$ выбран таким образом, что для каждого $p \in \Lambda(C)$ элемент $\pi_p(\bar g)$ имеет вид

$$\pi_p(\bar g) = \big(p^{k_1^{(p)}} e_1^{(p)}, p^{k_2^{(p)}} e_2^{(p)}, \ldots, p^{k_n^{(p)}} e_n^{(p)}, \ldots\big),$$

где $k_n^{(p)} \in \mathbb{N}_0$. Рассмотрим каноническое умножение $\times$ на C, определённое данным базисом, и фактор-кольцо $(\bar C, \times)$. Так как группа $\bar C$ является пополнением группы B, то в $\pi_p(\bar g)$ почти все числа $k_n^{(p)}$ $(n \in \mathbb{N})$ положительны. Для каждого простого p найдётся натуральное число n_p, такое что $k_1^{(p)} = \ldots = k_{n_p}^{(p)} = 0$ и $k_n^{(p)} > 0$ для всех $n > n_p$.

Введём следующие обозначения:

$$a_p = \big(e_1^{(p)}, \ldots, e_{n_p}^{(p)}, 0, \ldots\big), \quad c_p = \big(0, \ldots, 0, p^{k_{n_p+1}^{(p)}} e_{n_p+1}^{(p)}, \ldots\big),$$
$$\bar a = (a_p)_p, \quad \bar c = (c_p)_p.$$

Тогда для каждого простого p имеет место равенство $\pi_p(\bar g) = a_p + c_p$, и элемент $\bar g$ представим в виде $\bar g = (a_p + c_p)_p = (a_p)_p + (c_p)_p = \bar a + \bar c$. Легко убедиться, что в кольце $(\bar C, \times)$ выполняются равенства $\bar a \times \bar a = \bar a$, $\bar a \times \bar c = \bar c \times \bar a = 0$. Очевидно, $\bar c \in \bigcap\limits_p p\bar C$, поэтому в C существуют такие элементы a и c, что $g = a + c$ и $c \in \bigcap\limits_p pC$.

Допустим, что $c \notin C^*$ и $a \notin C^*$. Покажем, что элементы $c + C^*, c^2 + C^*, \ldots, c^n + C^*$ линейно независимы в группе C/C^* при любом натуральном n. Пусть для некоторых целых чисел $t_1, \ldots, t_n$ элемент $t_1 c + \ldots + t_n c^n$ принадлежит C^*. Так как $c \in \bigcap\limits_p pC$, то $t_1 c + \ldots + t_n c^n \in \bigcap\limits_p pC^*$. Тогда по теореме 5 существует такое натуральное число r, что

$$(t_1 c + \ldots + t_n c^n)^r = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 \leqslant n \\ \cdots \\ 1 \leqslant i_r \leqslant n}} t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_r} c^{i_1 + \ldots + i_r} = 0.$$

В этой сумме коэффициент при c^r равен t_1^r, а коэффициент при c^{nr} равен t_n^r. Так как по лемме 9 элементы $c, \ldots, c^m$ линейно независимы при любом m, то $t_1 = 0$ и $t_n = 0$. Аналогично получаем, что $t_2 = \ldots = t_{n-1} = 0$.

Покажем, что элементы $a + C^*, c + C^*, \ldots, c^n + C^*$ линейно независимы. Пусть $ta + t_1 c + \ldots + t_n c^n = b \in C^*$, где $t, t_1, \ldots, t_n$ — целые числа. Так как $b \in C^*$, то b делится в группе C почти на все простые числа. Так как $a \notin C^*$, то

$\bar{a} \notin \bar{C}^*$, поэтому $a_p \neq 0$ для каждого p из некоторого бесконечного множества простых чисел. Следовательно, элемент $\bar{a}$, а значит, и элемент a не делится ни на одно число p из некоторого бесконечного множества простых чисел. Тогда число t должно делиться почти на все простые числа из этого множества, так как $c \in \bigcap\limits_p pC$. Следовательно, $t = 0$, и по доказанному выше $t_1 = \ldots = t_n = 0$.

Рассмотрим фактор-кольцо $(C/C^*, \times)$. Так как C^* является вполне характеристической подгруппой группы C, то оно является делимым кольцом без кручения (см. теорему 1). В этом кольце рассмотрим сервантное подкольцо, порождённое элементами $a + C^*$ и $c + C^*$. Это некоторое подкольцо $(G/C^*, \times)$, изоморфное прямой сумме колец $\mathbb{Q} \oplus x\mathbb{Q}[x]$ при изоморфизме η, определяемом следующим образом:

$$\eta(a + C^*) = 1 \in \mathbb{Q}, \quad \eta(c + C^*) = x.$$

Если $a \in C^*$ или $c \in C^*$, то путём аналогичных рассуждений получим подкольцо $(G/C^*, \times)$ кольца $(C/C^*, \times)$, изоморфное соответственно кольцу $x\mathbb{Q}[x]$ или кольцу $\mathbb{Q}$.

Если $g \in C^*$, то в качестве группы G возьмём C^*.

Во всех случаях получаем сервантное подкольцо $(G, \times)$ кольца $(C, \times)$, такое что $g \in G$, $G^* = C^*$ и фактор-кольцо $(G/G^*, \times)$ полупросто (или нулевое, если $g \in C^*$). Очевидно, $G \in M$.

Покажем, что $J(G, \times) \subseteq \bigcap\limits_p pG^*$. Нетрудно убедиться, что в силу леммы 7 фактор-кольцо $\left(C/\bigcap\limits_p pC, \times\right)$ изоморфно прямой сумме колец, каждое из которых изоморфно $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, т. е. $\left(C/\bigcap\limits_p pC, \times\right)$ полупросто. Тогда $J(C, \times) \subset \bigcap\limits_p pC$. Подгруппа G^* является идеалом в каждом из колец $(C, \times)$ и $(G, \times)$, при этом $(G/G^*, \times)$ — полупростое (или нулевое) кольцо. Тогда $J(G, \times) \subseteq G^*$. Следовательно,

$$J(G, \times) = G^* \cap J(G, \times) = J(G^*, \times) = G^* \cap J(C, \times) \subseteq G^* \cap \bigcap_p pC = \bigcap_p pG^*.$$

Таким образом, в силу теоремы 5 получаем $N(G, \times) = J(G, \times) = \bigcap\limits_p pG^*$. $\square$

Литература

[1] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: ИЛ, 1961.

[2] Компанцева Е. И. Кольца без кручения // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, № 8. — С. 95—143.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.

[4] Fried E. On the subgroups of Abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups. — Budapest, 1964. — P. 51—55.

[5] Gardner B. J. Rings on completely decomposable torsion-free Abelian groups // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1974. — Vol. 15, no. 3. — P. 381—382.

[6] Gardner B. J., Jackett D. R. Rings on certain classes of torsion-free Abelian groups // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1976. — Vol. 17, no. 3. — P. 439—506.

[7] Jackett D. R. Rings on certain mixed Abelian groups // Pacific J. Math. — 1982. — Vol. 98, no. 2. — P. 355—373.

[8] Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963.

[9] Toubassi E. H., Lawver D. A. Height-slope and splitting length of Abelian groups // Publ. Mat. — 1973. — Vol. 20. — P. 63—71.