Двойственность Уорфилда и матрицы Мальцева

Ю. В. КОСТРОМИНА
Московский педагогический
государственный университет
e-mail: JuliM5@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, локально свободная группа, двойственность.

Аннотация

В работе исследуются соотношения между матрицами Мальцева группы без кручения конечного ранга G и матрицами Мальцева групп $\mathrm{Hom}(R,G)$ и $\mathrm{Hom}(G,R)$, где G — локально свободная группа, R — группа без кручения ранга 1.

Abstract

J. V. Kostromina, Warfield's duality and Malcev's matrix, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 77—94.

In this work, we investigate relations between Malcev's matrices of a torsion-free group G of finite rank and Malcev's matrices of groups $\mathrm{Hom}(R,G)$ and $\mathrm{Hom}(G,R)$, where G is a locally free group and R is a torsion-free group of rank 1.

Введение

Абелевы группы без кручения конечного ранга были описаны А. Г. Курошем [7], Д. Дерри [5] и А. И. Мальцевым [2] в конце 30-х годов XX века. Описание Куроша—Дерри, вошедшее в монографии [1, 3], получило широкую известность. Однако в некоторых случаях описание Мальцева оказывается более удобным. Недавно А. А. Фомин [6] показал, что описание Мальцева можно рассматривать как двойственность некоторых категорий.

В данной работе мы рассматриваем только абелевы группы. Записывать мы их будем аддитивно. В дальнейшем всюду, где мы будем говорить о группах, мы без специальных оговорок будем подразумевать, что речь идёт об абелевых группах конечного ранга, все элементы которых, за исключением нуля, бесконечного порядка. *Базисом* группы G назовём максимальную линейно независимую систему элементов группы G. Максимальное число линейно независимых элементов группы G назовём *рангом* группы G и будем обозначать через $\mathrm{r}(G)$. Через $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ будем обозначать соответственно множества натуральных, простых, целых и рациональных чисел. Через $\hat{\mathbb{Z}}_p$ и $\mathbb{Z}_{p^k}$ будем обозначать кольца целых p-адических чисел и классов вычетов по модулю p^k соответственно. Характеристики и типы понимаются в смысле [3].

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 77—94.

В данной статье мы рассматриваем локально свободные группы, введённые Р. Уорфилдом [8], при изучении так называемой двойственности Уорфилда, т. е. функтора $\mathrm{Hom}(-, R)$, где R — группа без кручения ранга 1. Для локально свободных групп p-матрицы Мальцева устроены особенно просто: их элементами являются классы вычетов по модулю степени простого числа.

Для дальнейшего изложения напомним определение локально свободной группы и введём некоторые обозначения.

Пусть G — абелева группа. Будем говорить, что p делит G, если $pG = G$. Если G — группа без кручения, то через $R(G)$ обозначим подкольцо поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, порождённое числами 1 и p^{-1} для всех простых p, таких что $pG = G$:

$$R(G) = \langle 1, p^{-n} \mid pG = G,\ n \in \mathbb{N} \rangle \subseteq \mathbb{Q}.$$

Обозначим $G_p = G \otimes \mathbb{Q}_p$, где $\mathbb{Q}_p$ — кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p.

Определение 1. Группа без кручения G называется *локально свободной над* $R(G)$ тогда и только тогда, когда G_p свободна (как $\mathbb{Q}_p$-модуль) для всех простых p со свойством $pG \neq G$.

Основным результатом данной статьи является вычисление матриц Мальцева групп $\mathrm{Hom}(G, R)$ и $\mathrm{Hom}(R, G)$, где G — локально свободная группа, заданная матрицами Мальцева, и R — группа без кручения ранга 1, заданная типом Бэра.

1. Матрицы Мальцева

Одной из первых работ, полностью посвящённых абелевым группам без кручения, является статья А. И. Мальцева [2]. В ней установлено взаимно-однозначное соответствие между системами p-матриц и группами без кручения конечного ранга, при котором каждой совокупности изоморфных между собой групп соответствует класс эквивалентных между собой систем совершенных p-матриц.

Пусть G — группа без кручения конечного ранга с фиксированным базисом $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Каждый её элемент g представляется в виде

$$ng = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_r x_r,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. *p-примитивной подгруппой* группы G при данном базисе называется подгруппа $G^{(p)}$, образованная теми элементами g группы G, которые могут быть представлены в виде

$$p^{\alpha} g = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_r x_r,$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

Легко убедиться, что группа G порождается совокупностью всех своих примитивных подгрупп $G^{(p)}$: $G = \langle G^{(p)} \mid p \in \mathbb{P} \rangle$.

Для того чтобы разобраться, как устроены матрицы Мальцева группы G, зафиксируем простое число p и рассмотрим подробнее p-примитивную подгруппу $G^{(p)}$ группы G. Обозначим через $G_{(p^s)}$ множество всех элементов g группы $G^{(p)}$, которые могут быть представлены в виде

$$p^s g = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_r x_r,$$

где $m_i \in \mathbb{Z}$. Группа $G_{(p^s)}$ называется *s-м слоем подгруппы* $G^{(p)}$. Заметим, что каждый слой является свободной группой ранга r.

Рассмотрим целочисленную квадратную матрицу порядка r

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Определение 3. Матрица A_s называется *матрицей слоя* $G_{(p^s)}$, если элементы

$$\frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ir}x_r}{p^s} \quad (i = 1, \ldots, r)$$

порождают группу $G_{(p^s)}$.

Рассмотрим следующие преобразования матриц A_s:

(α) умножить или разделить по модулю p^s какую-либо строку матрицы на число, не делящееся на p;

(β) из одной строки матрицы вычесть другую, умноженную на любое целое число.

Определение 4. Матрица N_s группы $G_{(p^s)}$ называется *нормальной*, если она перестановкой столбцов может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} & \ldots & n_{1r}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} & \ldots & n_{2r}p^{\lambda_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p^{\lambda_r} \end{pmatrix} \tag{1}$$

где $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_r \leqslant s$ и $0 \leqslant n_{ik} < p^{\lambda_k - \lambda_i}$.

Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_r \end{pmatrix} -$$

подстановка, которая приводит матрицу N_s к виду (1). В дальнейшем мы будем записывать нормальные матрицы сразу в виде (1), помня при этом, что с каждой матрицей связана некоторая подстановка, приводящая её к нормальному виду с данным расположением столбцов.

Заметим, что всякую матрицу A_s преобразованиями (α), (β) можно привести к нормальному виду. Учитывая этот факт, можно сделать вывод, что нормальные матрицы определяются с точностью до перестановки столбцов, а нормальные матрицы с данным расположением столбцов определяются однозначно.

Теорема 1 [2]. *Для любых двух матриц группы $G_{(p^s)}$ каждая может быть получена из другой конечным числом преобразований (α), (β).*

Теперь рассмотрим вопрос о том, какими соотношениями должны быть связаны соответственные элементы нормальных матриц двух последовательных слоёв группы $G^{(p)}$.

Рассмотрим нормальные матрицы групп $G_{(p^s)}$ и $G_{(p^{s+1})}$ с одинаковым расположением столбцов:

$$N_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} & \ldots & n_{1n}p^{\lambda_1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p^{\lambda_2} & \ldots & n_{2n}p^{\lambda_2} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & p^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$N_{s+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{m1} & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p^{\lambda'_1} & n'_{12}p^{\lambda'_1} & \ldots & n'_{1n}p^{\lambda'_1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p^{\lambda'_2} & \ldots & n'_{2n}p^{\lambda'_2} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & p^{\lambda'_n} \end{pmatrix}.$$

Имеем $a'_{ik} \equiv a_{ik} \pmod{p^s}$. Если $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \ldots = \lambda'_{m-1} = 0$, но $\lambda'_m > 0$, то $\lambda'_i = \lambda_i + 1$ и $n'_{ik} = n_{ik}$ $(k > i \geqslant m)$.

Рассмотрим нормальную матрицу s-го слоя группы($G^{(p)}$, построенную на базисе $x_1, x_2, \ldots, x_r$:

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} & \ldots & n_{1n}p^{\lambda_1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & p^{\lambda_2} & \ldots & n_{2n}p^{\lambda_2} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & p^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $s - \lambda_i = \alpha_i$. Так как $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, то $s - \lambda_1 \geqslant \geqslant s - \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant s - \lambda_n$, т. е. $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0$.

Из соотношений для матриц последовательных слоёв видно, что при увеличении слоя s увеличиваются соответствующие степени числа p. Отсюда следует, что числа α_i фиксированны и не зависят от номера слоя.

Теперь перед нами стоит задача записать в компактном виде последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_s, \ldots$. В [2] А. И. Мальцев для компактного представления последовательности матриц вводил числа особого рода, мы же постараемся записать матрицы на современном языке, не вводя дополнительных обозначений.

Элементы из первых m строк матриц $\{A_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ определяют целые p-адические числа. Действительно, если мы рассмотрим коэффициенты a_{ij} матриц последовательных слоёв, то получим последовательность

$$\bigl(a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \ldots, a_{ij}^{(s)}, a_{ij}^{(s+1)}, \ldots\bigr),$$

где числа a_{ij} связаны соотношениями

$$a_{ij}^{(s+1)} \equiv a_{ij}^{(s)} \pmod{p^s},$$

а это в точности определение p-адических чисел.

Заметим, что количество p-адических строк — это инвариант группы G, совпадающий с числом $\mathrm{r}(G) - r_p(G)$, где $r_p(G)$ — p-ранг группы G. Напомним, что под *p-рангом* группы G мы понимаем мощность максимально независимой системы группы G, содержащей только элементы порядка, равного степени фиксированного простого числа p.

Последние n строк матрицы получаются следующим образом: так как числа n_{ij} не зависят от номера слоя, то последовательность этих чисел в обобщённой матрице можно записать соответствующим классом вычетов $\bar{n}_{ij}$. Также мы отмечали, что каждая строка определяется числом α_i.

Из всего вышесказанного следует, что последовательность матриц $A_1, A_2, \ldots, A_s, \ldots$ можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \ldots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \ldots & \hat{a}_{2n} \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \ldots & \hat{a}_{mn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{1} & \bar{n}_{12} & \ldots & \bar{n}_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \bar{1} & \ldots & \bar{n}_{2n} \\ \hdotsfor{8} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \in \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \ldots \\ \in \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \ldots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_n}} \end{matrix}. \tag{2}$$

Определение 5. Матрицы вида (2) мы будем называть *p-матрицами Мальцева группы G*, матрицу A_s — *s-й компонентой матрицы A*.

Заметим, что матрицы вида (2) — это матрицы, которые А. И. Мальцев называл совершенными p-матрицами группы G, но записанные на другом языке.

Теорема 2 [2]. *Если имеются две p-матрицы группы G, то каждая из них может быть получена из другой с помощью конечного числа преобразований (α), (β).*

В [2] А. И. Мальцев показал, как по данной p-примитивной подгруппе $G^{(p)}$ найти её p-матрицу. Он также рассмотрел обратную задачу и доказал, что легко построить p-матрицу, которая не является p-матрицей той группы, которую эта матрица порождает.

Определение 6. p-матрица называется *совершенной*, если она является p-матрицей порождаемой ею группы.

Далее мы исследуем вопрос о том, как будут устроены матрицы Мальцева локально свободной группы G ранга r. Рассмотрим фактор-группу

$$G/F \cong \bigoplus_{p\in P} T_p,$$

где F — свободная группа ранга r. Тогда

$$T_p \cong \bigoplus_{r-r_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_n^{(p)}}}.$$

Из определения локально свободной группы следует, что $r = r_p$, т. е. в разложении периодической части T_p нет групп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Это означает, что

$$G/F \cong \bigoplus_{p\in P} \Big(\mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}}} \Big).$$

Так как $r(G) - r_p(G) = 0$, то p-матрица локально свободной группы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12} & \ldots & \bar{n}_{1r} \\ 0 & \bar{1} & \ldots & \bar{n}_{2r} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \ldots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{array}.$$

Заметим, что p-матрицы Мальцева содержат информацию о типе Ричмана группы G.

Из определения p-матриц Мальцева следует, что выполняются соотношения

$$0 \leqslant \alpha_r \leqslant \alpha_{r-1} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_1.$$

Пусть F — свободная подгруппа ранга r группы G, порождённая базисом $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Тогда получим следующее разложение:

$$[G/F]_p \cong \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}}}.$$

Как было показано выше, показатели степени каждого простого числа p расположены в порядке возрастания:

$$0 \leqslant \alpha_r^{(p)} \leqslant \alpha_{r-1}^{(p)} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_1^{(p)}.$$

Если p пробегает множество всех простых чисел, то получается возрастающая последовательность характеристик:

$$\big(\alpha_r^{(p)}\big) \leqslant \big(\alpha_{r-1}^{(p)}\big) \leqslant \ldots \leqslant \big(\alpha_1^{(p)}\big).$$

Эти характеристики определяют типы:

$$\tau_r = \big[\big(\alpha_r^{(p)}\big)\big],\ \tau_{r-1} = \big[\big(\alpha_{r-1}^{(p)}\big)\big], \ldots,\ \tau_1 = \big[\big(\alpha_1^{(p)}\big)\big],$$

где τ_r — внутренний тип группы, τ_1 — внешний тип группы. Последовательность типов $\tau_r \leqslant \tau_{r-1} \leqslant \ldots \leqslant \tau_1$ — тип Ричмана группы G.

В дальнейшем через $\mathrm{IT}(G)$ и $\mathrm{OT}(G)$ будем обозначать соответственно внутренний и внешний типы группы G (подробнее см. [4]).

До этого момента мы изучали соответствие между примитивными подгруппами $G^{(p)}$ группы G и их p-матрицами при некотором фиксированном базисе. В [2] А. И. Мальцев рассмотрел вопрос о том, как меняются подгруппы $G^{(p)}$ и их p-матрицы при переходе к новому базису. А. И. Мальцев показал, что линейные преобразования базиса эквивалентны следующим преобразованиям матриц:

- (γ) к j-му столбцу p-матрицы A прибавляется i-й столбец, умноженный на целое число a;
- (γ') у всех элементов i-го столбца знак меняется на обратный;
- (δ) i-й столбец p-матрицы A делится на некоторое натуральное простое число q;
- (ε) i-й столбец p-матрицы A умножается на число q.

Теперь рассмотрим вопрос, какими свойствами характеризуются последовательности p-матриц, соответствующие изоморфным группам.

Пусть G — абелева группа без кручения ранга r с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Группы $G^{(p_1)}, G^{(p_2)}, \ldots$ — p-примитивные подгруппы группы G. Рассмотрим p-матрицы этих групп $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \ldots$, они определяют набор характеристик

$$\chi_1 = \big(\alpha_1^{(p_1)}, \alpha_1^{(p_2)}, \ldots\big),\ \chi_2 = \big(\alpha_2^{(p_1)}, \alpha_2^{(p_2)}, \ldots\big), \ldots,\ \chi_r = \big(\alpha_r^{(p_1)}, \alpha_r^{(p_2)}, \ldots\big),$$

где $[\chi_r] = \mathrm{IT}(G)$ и $[\chi_1] = \mathrm{OT}(G)$ — внутренний и внешний типы группы G соответственно.

Определение 7. Систему p-матриц $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \ldots$ будем называть *системой p-матриц группы G при базисе $x_1, x_2, \ldots, x_r$*.

Определение 8. Две системы p-матриц назовём *эквивалентными*, если из одной системы можно получить другую, произведя конечное число преобразований (α), (β) над каждой матрицей системы отдельно и конечное число преобразований (γ), (γ'), (δ), (ε) над всеми матрицами системы одновременно.

Теорема 3 [2]. *Для того чтобы две системы совершенных p-матриц определяли изоморфные группы, необходимо и достаточно, чтобы эти системы были эквивалентными.*

2. Матрицы Мальцева группы $\mathrm{Hom}(R, G)$

Рассмотрим группу гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(R, G)$, где G — локально свободная группа конечного ранга, R — группа без кручения ранга 1. Далее будем считать, что R — подгруппа группы рациональных чисел, содержащая единицу.

Рассмотрим некоторые свойства группы $\mathrm{Hom}(R, G)$, описанные Р. Уорфилдом в [8].

Теорема 4 [8]. *Пусть G — группа без кручения ранга r и R — группа без кручения ранга 1. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathrm{type}(R) \leqslant \mathrm{IT}(G)$, *где* $\mathrm{type}(R)$ — *тип группы* R;
2) $\mathrm{r}\big(\mathrm{Hom}(R, G)\big) = r$.

Пусть χ — некоторая характеристика. Обозначим

$$G_\chi = \{x \in G \mid \mathrm{char}(x) \geqslant \chi\}.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5 [8]. *Пусть R — группа без кручения ранга 1 и $\mathrm{char}(1_R) = \chi$. Если G — группа без кручения конечного ранга, то*

$$\mathrm{Hom}(R, G) \cong G_\chi.$$

Ввиду данной теоремы для вычисления матриц Мальцева группы $\mathrm{Hom}(R, G)$ достаточно уметь вычислять матрицы Мальцева группы G_χ.

Пусть G — группа без кручения ранга r, набор типов $[\tau_i] = \big[\big(\alpha_i^{(p)}\big)_{p\in\mathbb{P}}\big]$ $(i = 1, \ldots, r)$ задаёт тип Ричмана группы G, где $\big[\big(\alpha_r^{(p)}\big)_{p\in\mathbb{P}}\big] = \mathrm{IT}(G)$ и $\big[\big(\alpha_1^{(p)}\big)_{p\in\mathbb{P}}\big] = \mathrm{OT}(G)$ — внутренний и внешний типы группы G соответственно. Пусть $\mathrm{char}(1_R) = \chi$.

Рассмотрим подгруппу $G^{(p)}$ группы G. Обозначим через s p-ю компоненту характеристики χ, через $\alpha_r^{(p)}$ — p-ю компоненту внутреннего типа группы G. Тогда из теоремы 5 получим, что группа G_χ будет иметь тот же ранг, что и группа G, тогда и только тогда, когда $s \leqslant \alpha_r^{(p)}$ для любого простого p.

Определение 9. Если $g \in G$, то наибольшее неотрицательное целое число k, для которого уравнение $p^k x = g$ $(x \in G)$ имеет решение, называется *p-высотой* $\mathrm{h}_p(g)$ элемента g. Через $\mathrm{h}_p^G(g)$ будем обозначать p-высоту элемента g в группе G.

Теорема 6. *Пусть $\chi = \mathrm{char}(1_R)$, G — локально свободная группа с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_r$, относительно которого она определена набором p-матриц Мальцева по всем простым числам p*

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12}^{(p)} & \ldots & \bar{n}_{1r}^{(p)} \\ 0 & \bar{1} & \ldots & \bar{n}_{2r}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}}} \\ \ldots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}}} \end{matrix}$$

и набором подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & \ldots & i_r^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Если $\chi \leqslant \big(\alpha_r^{(p)}\big)$, то базис $x_1, x_2, \ldots, x_r$ принадлежит подгруппе G_χ и группа G_χ определяется относительно этого базиса набором p-матриц Мальцева

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12}^{(p)} & \dots & \bar{n}_{1r}^{(p)} \\ 0 & \bar{1} & \dots & \bar{n}_{2r}^{(p)}\mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}-s}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{1}\mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}-s}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1^{(p)}-s}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2^{(p)}-s}} \\ \dots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r^{(p)}-s}} \end{matrix}$$

и тем же набором подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & \dots & i_r^{(p)} \end{pmatrix},$$

где s — p-я компонента характеристики χ в группе R.

Доказательство. Как было отмечено выше, для нахождения p-матриц Мальцева группы $\mathrm{Hom}(R, G)$ достаточно найти матрицы Мальцева группы G_χ, так как изоморфным группам соответствуют эквивалентные матрицы.

Найдём p-матрицу s-го слоя группы $G_\chi = \{x \in G \mid \mathrm{char}(x) \geqslant \chi\}$. Обозначим через s p-ю компоненту характеристики χ. Тогда если мы рассмотрим подгруппу $G_\chi^{(p)}$ группы G_χ, то в ней будут лежать те элементы группы $G^{(p)}$, которые представляются в виде $p^s g$, где $g \in G^{(p)}$.

Так как $\mathrm{h}_p^{G^{(p)}}(x_r) = \alpha_r^{(p)}$, то

$$x_r = p^{\alpha_r^{(p)}} g, \quad \text{где} \quad g \in G^{(p)} \quad \text{и} \quad \mathrm{h}_p^{G^{(p)}}(g) = 0.$$

Запишем это равенство в виде

$$x_r = p^{\alpha_r^{(p)}+s-s} g = p^{\alpha_r^{(p)}-s}(p^s g), \quad \text{где} \quad p^s g = g' \in G_\chi^{(p)} \quad \text{и} \quad \mathrm{h}_p^{G_\chi^{(p)}}(g') = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathrm{h}_p^{G_\chi^{(p)}}(x_r) = \alpha_r^{(p)} - s$. Мы получили, что в группе $G_\chi^{(p)}$ до слоя с номером $\alpha_r^{(p)} - s$ включительно все матрицы единичные. Слою с номером $\alpha_r^{(p)} - s + 1$ группы $G_\chi^{(p)}$ будет соответствовать матрица слоя $\alpha_r^{(p)} + 1$ группы $G^{(p)}$. Более наглядно изобразим матрицы слоёв, соответствующих группам $G^{(p)}$ и $G_\chi^{(p)}$, на следующем рисунке.

$E \quad E \quad \dots \quad E$		$A_{\alpha_r+1}\ \dots$	$G^{(p)}$
$E\ E\ \dots\ E$	$A_{\alpha_r+1}\ \dots$	$A_{\alpha_r+s+1}\ \dots$	$G_\chi^{(p)}$
	слой $(\alpha_r - s + 1)\ \dots$	слой $(\alpha_r + 1)$	

Отсюда следует, что если

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12} & \dots & \bar{n}_{1r} \\ 0 & \bar{1} & \dots & \bar{n}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \dots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{matrix} \text{ —}$$

p-матрица группы G, то матрица вида

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12} & \dots & \bar{n}_{1r} \\ 0 & \bar{1} & \dots & \bar{n}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1 - s}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2 - s}} \\ \dots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r - s}} \end{array}$$

является p-матрицей группы G_χ.

Наконец, так как p-матрицы группы G_χ — это в точности p-матрицы группы G, только смещённые по слоям, для приведения их к нормальному виду с данным расположением столбцов необходима будет та же подстановка. $\square$

3. Матрицы Мальцева группы $\mathrm{Hom}(G, R)$

Рассмотрим группу гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(G, R)$, где G — локально свободная группа ранга r, R — группа без кручения ранга 1. Пусть $\mathrm{char}(1_R) = (s_p)$. Обозначим через $G^* = \mathrm{Hom}(G, R)$ группу, двойственную в смысле Уорфилда [8] группе G.

Рассмотрим следующие свойства группы $\mathrm{Hom}(G, R)$.

Теорема 7 [8]. *Пусть G — группа без кручения ранга r и R — группа без кручения ранга 1. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\mathrm{type}(R) \geqslant \mathrm{OT}(G)$, *где* $\mathrm{type}(R)$ — *тип группы* R;
2) $\mathrm{r}\big(\mathrm{Hom}(G, R)\big) = r$.

Будем рассматривать матрицы Мальцева для одного фиксированного простого числа p. Обозначим через s p-ю компоненту характеристики единицы в группе R. Пусть

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(p)} & \beta_{12}^{(p)} & \dots & \beta_{1r}^{(p)} \\ \beta_{21}^{(p)} & \beta_{22}^{(p)} & \dots & \beta_{2r}^{(p)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{r1}^{(p)} & \beta_{r2}^{(p)} & \dots & \beta_{rr}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \dots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{array} -$$

p-матрица слоя группы $G^{(p)}$.

Обозначим через $b_1^{(p)}, b_2^{(p)}, \dots, b_r^{(p)}$ столбцы матрицы $A^{(p)}$.

Теорема 8. *Пусть G — локально свободная группа с фиксированным базисом $x_1, x_2, \dots, x_r$, R — группа без кручения ранга 1, такая что $\mathrm{type}(R) \geqslant \mathrm{OT}(G)$ и бесконечности у данных типов на одинаковых местах. Пусть $G^* = \mathrm{Hom}(G, R)$ — группа, двойственная группе G, с дуальным базисом $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$, который определяется следующим образом*:

$$x_i^*(x_j) = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j;$$
$$x_i^*(x_i) = 1.$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — целые числа, являющиеся представителями классов вычетов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ по модулю p^s. Тогда

$$\frac{a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_r x_r^*}{p^s} \in G^*$$

тогда и только тогда, когда

$$\gamma_1 b_1^{(p)} + \gamma_2 b_2^{(p)} + \ldots + \gamma_r b_r^{(p)} = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем простое число p и рассмотрим p-матрицу группы G

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \beta_{11}^{(p)} & \beta_{12}^{(p)} & \ldots & \beta_{1r}^{(p)} \\ \beta_{21}^{(p)} & \beta_{22}^{(p)} & \ldots & \beta_{2r}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{r1}^{(p)} & \beta_{r2}^{(p)} & \ldots & \beta_{rr}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \ldots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{matrix}.$$

Введём обозначения

$$z_1^{(p)} = \frac{\beta_{11}^{(p)} x_1 + \beta_{12}^{(p)} x_2 + \ldots + \beta_{1r}^{(p)} x_r}{p^s},$$

$$z_2^{(p)} = \frac{\beta_{21}^{(p)} x_1 + \beta_{22}^{(p)} x_2 + \ldots + \beta_{2r}^{(p)} x_r}{p^s},$$

$$\ldots$$

$$z_r^{(p)} = \frac{\beta_{r1}^{(p)} x_1 + \beta_{r2}^{(p)} x_2 + \ldots + \beta_{rr}^{(p)} x_r}{p^s}.$$

Заметим, что любое отображение базисных элементов группы G в $\mathbb{Q}$ продолжается до гомоморфизма $f\colon G \to \mathbb{Q}$. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_r \in \mathbb{Q}$. Тогда равенства $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2, \ldots,\ f(x_r) = y_r$ задают гомоморфизм f из G в $\mathbb{Q}$. Если образы порождающих элементов группы G будут лежать в R, то и гомоморфизм будет в R.

В частности, рассмотрим гомоморфизмы, построенные Р. Уорфилдом в [8]: $x_i^*(x_j) = 0$, если $i \neq j$, и $x_i^*(x_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Так как $\{z_j^{(p)} \mid j = 1, \ldots, r,\ p \in P\}$ — порождающие элементы группы G и

$$x_i^*\big(z_j^{(p)}\big) = \frac{\beta_{ji}^{(p)}}{p^s} \in R,$$

то гомоморфизмы x_i^* переводят группу G в группу R.

Необходимо найти такие числа $a_1, a_2, \ldots, a_r$, чтобы

$$f = \frac{a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_r x_r^*}{p^s} \in \mathrm{Hom}(G, R).$$

Заметим, что f будет гомоморфизмом из группы G в группу R тогда и только тогда, когда f порождающие элементы группы G переводит в элементы группы R, т. е. $f\big(z_i^{(p)}\big) \in R$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ и $p \in P$.

Применим f к $z_1^{(p)}, z_2^{(p)}, \dots, z_r^{(p)}$. Получим

$$f\big(z_1^{(p)}\big) = \frac{\frac{\beta_{11}^{(p)} a_1}{p^s} + \frac{\beta_{12}^{(p)} a_2}{p^s} + \ldots + \frac{\beta_{1r}^{(p)} a_r}{p^s}}{p^s} = \frac{\beta_{11}^{(p)} a_1 + \beta_{12}^{(p)} a_2 + \ldots + \beta_{1r}^{(p)} a_r}{p^{2s}},$$

$$f\big(z_2^{(p)}\big) = \frac{\frac{\beta_{21}^{(p)} a_1}{p^s} + \frac{\beta_{22}^{(p)} a_2}{p^s} + \ldots + \frac{\beta_{2r}^{(p)} a_r}{p^s}}{p^s} = \frac{\beta_{21}^{(p)} a_1 + \beta_{22}^{(p)} a_2 + \ldots + \beta_{2r}^{(p)} a_r}{p^{2s}},$$

$$\ldots$$

$$f\big(z_r^{(p)}\big) = \frac{\frac{\beta_{r1}^{(p)} a_1}{p^s} + \frac{\beta_{r2}^{(p)} a_2}{p^s} + \ldots + \frac{\beta_{rr}^{(p)} a_r}{p^s}}{p^s} = \frac{\beta_{r1}^{(p)} a_1 + \beta_{r2}^{(p)} a_2 + \ldots + \beta_{rr}^{(p)} a_r}{p^{2s}}.$$

Отсюда следует, что $f\big(z_i^{(p)}\big) \in R$ тогда и только тогда, когда

$$\beta_{i1}^{(p)} a_1 + \beta_{i2}^{(p)} a_2 + \ldots + \beta_{ir}^{(p)} a_r \equiv 0 \pmod{p^s}.$$

Таким образом, мы получили следующую систему равенств в кольце $\mathbb{Z}_{p^s}$:

$$\begin{cases} \beta_{11}^{(p)} a_1 + \beta_{12}^{(p)} a_2 + \ldots + \beta_{1r}^{(p)} a_r = 0, \\ \beta_{21}^{(p)} a_1 + \beta_{22}^{(p)} a_2 + \ldots + \beta_{2r}^{(p)} a_r = 0, \\ \quad \ldots \\ \beta_{r1}^{(p)} a_1 + \beta_{r2}^{(p)} a_2 + \ldots + \beta_{rr}^{(p)} a_r = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Из этой системы вытекает, что

$$\frac{a_1 x_1^* + a_2 x_2^* + \ldots + a_r x_r^*}{p^s} \in G^*$$

тогда и только тогда, когда $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ — решение системы (3), что и требовалось доказать. □

Используя эту теорему, вычислим матрицы Мальцева групп, двойственных в смысле Уорфилда локально свободным группам конечного ранга.

Теорема 9. *Пусть G — локально свободная группа ранга r с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_r$, относительно которого она определена набором p-матриц Мальцева по всем простым числам p*

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12}^{(p)} & \ldots & \bar{n}_{1r}^{(p)} \\ 0 & \bar{1} & \ldots & \bar{n}_{2r}^{(p)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \ldots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{matrix}$$

и набором подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ i_1^{(p)} & i_2^{(p)} & \ldots & i_r^{(p)} \end{pmatrix},$$

R — группа без кручения ранга 1, заданная типом Бэра. Пусть $\mathrm{Hom}(G, R)$ — группа, двойственная группе G в смысле Уорфилда, такая что $\mathrm{type}(R) \geqslant \mathrm{OT}(G)$

и бесконечности у данных типов на одинаковых местах. Через s обозначим p-ю компоненту характеристики единицы в группе R. Тогда группа $\mathrm{Hom}(G, R)$ *определяется набором p-матриц Мальцева*

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{s}^{(p)}_{r,r-1} & \ldots & \bar{s}^{(p)}_{r2} & \bar{s}^{(p)}_{r1} \\ 0 & \bar{1} & \ldots & \bar{s}^{(p)}_{r-1,2} & \bar{s}^{(p)}_{r-1,1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & \bar{1} & \bar{s}^{(p)}_{21} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_r}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_{r-1}}} \\ \ldots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_2}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_1}} \end{matrix}$$

и набором подстановок

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r \\ i^{(p)}_r & i^{(p)}_{r-1} & \ldots & i^{(p)}_1 \end{pmatrix},$$

где

$$s_{k,k} = 1,$$
$$s_{k,k-1} = \tilde{n}_{k-1,k}$$

(*через* $\tilde{n}_{ij}$ *будем обозначать разность* $p^{\lambda_j - \lambda_i} - n_{ij}$),

$$s_{k,k-2} = \tilde{n}_{k-2,k} - n_{k-2,k-1} s_{k,k-1},$$
$$s_{k,k-3} = \tilde{n}_{k-3,k} - n_{k-3,k-2} s_{k,k-2} - n_{k-3,k-1} s_{k,k-1},$$
$$\ldots$$
$$s_{k,k-i} = \tilde{n}_{k-i,k} - n_{k-i,k-i+1} s_{k,k-i+1} - n_{k-i,k-i+2} s_{k,k-i+2} - \ldots - n_{k-i,k-1} s_{k,k-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим p-матрицу s-го слоя группы G

$$A_s = \begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & n_{12} p^{\lambda_1} & \ldots & n_{1r} p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} & \ldots & n_{2r} p^{\lambda_2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & p^{\lambda_r} \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_r \leqslant s$, $0 \leqslant n_{ij} < p^{\lambda_j - \lambda_i}$.

Из теоремы 8 следует, что для того чтобы найти p-матрицу группы, двойственной группе G, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} p^{\lambda_1} x_1 + n_{12} p^{\lambda_1} x_2 + n_{13} p^{\lambda_1} x_3 + \ldots + n_{1r} p^{\lambda_1} x_r = 0, \\ p^{\lambda_2} x_2 + n_{23} p^{\lambda_2} x_3 + \ldots + n_{2r} p^{\lambda_2} x_r = 0, \\ p^{\lambda_3} x_3 + \ldots + n_{3r} p^{\lambda_3} x_r = 0, \\ \quad \ldots \\ p^{\lambda_r} x_r = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что, решая данную систему, мы подразумеваем решение сравнения по модулю p^s.

Прежде чем решать эту систему в общем виде, рассмотрим несколько частных случаев.

1. Пусть $x_2 = x_3 = \ldots = x_r = 0$. Тогда решение системы (4) сводится к решению уравнения $p^{\lambda_1}x_1 = 0$. Получаем решение $(p^{s-\lambda_1}, 0, \ldots, 0)$.

2. Пусть $x_3 = x_4 = \ldots = x_r = 0$. В этом случае решение системы (4) сведётся к решению системы

$$\begin{cases} p^{\lambda_1}x_1 + n_{12}p^{\lambda_1}x_2 = 0, \\ p^{\lambda_2}x_2 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получим $x_2 = p^{s-\lambda_2}$. Подставим найденное значение в первое уравнение. Получим $x_1 = p^{s-\lambda_2}(p^{\lambda_2-\lambda_1} - n_{12})$. Таким образом, мы получили следующие решения системы:

$$(p^{s-\lambda_1}, 0, \ldots, 0), \quad (p^{s-\lambda_2}(p^{\lambda_2-\lambda_1} - n_{12}), p^{s-\lambda_2}, 0, \ldots, 0).$$

3. Пусть $x_4 = x_5 = \ldots = x_r = 0$. В этом случае рассмотрим систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} p^{\lambda_1}x_1 + n_{12}p^{\lambda_1}x_2 + n_{13}p^{\lambda_1}x_3 = 0, \\ p^{\lambda_2}x_2 + n_{23}p^{\lambda_2}x_3 = 0, \\ p^{\lambda_3}x_3 = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения следует, что $x_3 = p^{s-\lambda_3}$. Подставим найденное значение во второе уравнение, получим $x_2 = p^{s-\lambda_3}(p^{\lambda_3-\lambda_2} - n_{23})$. Подставляя найденные значения переменных x_2 и x_3 в первое уравнение, вычислим значение переменной x_1. Получим следующие решения системы:

$$(p^{s-\lambda_1}, 0, \ldots, 0), \quad (p^{s-\lambda_2}(p^{\lambda_2-\lambda_1} - n_{12}), p^{s-\lambda_2}, 0, \ldots, 0),$$
$$\big(p^{s-\lambda_3}\big((p^{\lambda_3-\lambda_1} - n_{13}) - n_{12}(p^{\lambda_3-\lambda_2} - n_{23})\big), p^{s-\lambda_3}(p^{\lambda_3-\lambda_2} - n_{23}), p^{s-\lambda_3}, 0, \ldots, 0\big).$$

Заметим, что в полученных решениях присутствуют выражения вида $p^{\lambda_j-\lambda_i} - n_{ij}$. Для более компактной записи решений введём обозначения

$$\tilde{n}_{ij} = p^{\lambda_j-\lambda_i} - n_{ij}.$$

Используя введённые обозначения, перепишем решения нашей системы в виде

$$(p^{s-\lambda_1}, 0, \ldots, 0), \quad (p^{s-\lambda_2}\tilde{n}_{12}, p^{s-\lambda_2}, 0, \ldots, 0),$$
$$\big(p^{s-\lambda_3}(\tilde{n}_{13} - n_{12}\tilde{n}_{23}), p^{s-\lambda_3}\tilde{n}_{23}, p^{s-\lambda_3}, 0, \ldots, 0\big).$$

4. Пусть $x_5 = x_6 = \ldots = x_r = 0$. Решение системы (4) сведётся к решению системы из четырёх уравнений

$$\begin{cases} p^{\lambda_1}x_1 + n_{12}p^{\lambda_1}x_2 + n_{13}p^{\lambda_1}x_3 + n_{14}p^{\lambda_1}x_4 = 0, \\ p^{\lambda_2}x_2 + n_{23}p^{\lambda_2}x_3 + n_{24}p^{\lambda_2}x_4 = 0, \\ p^{\lambda_3}x_3 + n_{34}p^{\lambda_3}x_4 = 0, \\ p^{\lambda_4}x_4 = 0. \end{cases}$$

Производя аналогичные предыдущим пунктам вычисления, получим следующие решения системы:

$$
\begin{aligned}
&(p^{s-\lambda_1}, 0, \ldots, 0),\\
&(p^{s-\lambda_2}\tilde{n}_{12}, p^{s-\lambda_2}, 0, \ldots, 0),\\
&(p^{s-\lambda_3}(\tilde{n}_{13} - n_{12}\tilde{n}_{23}), p^{s-\lambda_3}\tilde{n}_{23}, p^{s-\lambda_3}, 0, \ldots, 0),\\
&(p^{s-\lambda_4}(\tilde{n}_{14} - n_{12}\tilde{n}_{24} + n_{12}n_{23}\tilde{n}_{34} - n_{13}\tilde{n}_{34}),\\
&\quad p^{s-\lambda_4}(\tilde{n}_{24} - n_{23}\tilde{n}_{34}), p^{s-\lambda_4}\tilde{n}_{34}, p^{s-\lambda_4}, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}
$$

Запишем решения в виде

$$
\begin{aligned}
&(1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_1},\\
&(\tilde{n}_{12}, 1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_2},\\
&(\tilde{n}_{13} - n_{12}\tilde{n}_{23}, \tilde{n}_{23}, 1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_3},\\
&(\tilde{n}_{14} - n_{12}\tilde{n}_{24} + n_{12}n_{23}\tilde{n}_{34} - n_{13}\tilde{n}_{34}, \tilde{n}_{24} - n_{23}\tilde{n}_{34}, \tilde{n}_{34}, 1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_4}.
\end{aligned}
$$

Введём следующие рекуррентные формулы:

$$
\begin{aligned}
&s_{k,k} = 1,\\
&s_{k,k-1} = \tilde{n}_{k-1,k},\\
&s_{k,k-2} = \tilde{n}_{k-2,k} - n_{k-2,k-1}s_{k,k-1},\\
&s_{k,k-3} = \tilde{n}_{k-3,k} - n_{k-3,k-2}s_{k,k-2} - n_{k-3,k-1}s_{k,k-1},\\
&\quad\ldots\\
&s_{k,k-i} = \tilde{n}_{k-i,k} - n_{k-i,k-i+1}s_{k,k-i+1} - n_{k-i,k-i+2}s_{k,k-i+2} - \ldots - n_{k-i,k-1}s_{k,k-1}.
\end{aligned}
$$

Учитывая эти формулы и предыдущие рассуждения, получим решения исходной системы (4):

$$
\begin{aligned}
&(1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_1},\\
&(s_{21}, 1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_2},\\
&(s_{31}, s_{32}, 1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_3},\\
&(s_{41}, s_{42}, s_{43}, 1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_4},\\
&\quad\ldots\\
&(s_{r1}, s_{r2}, \ldots, s_{r,r-1}, 1, 0, \ldots, 0)p^{s-\lambda_r}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, p-матрица s-го слоя группы $\mathrm{Hom}(G, R)$ будет иметь вид

$$
\begin{pmatrix}
p^{s-\lambda_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\
p^{s-\lambda_2}s_{21} & p^{s-\lambda_2} & 0 & \ldots & 0 & 0\\
p^{s-\lambda_3}s_{31} & p^{s-\lambda_3}s_{32} & p^{s-\lambda_3} & \ldots & 0 & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
p^{s-\lambda_r}s_{r1} & p^{s-\lambda_r}s_{r2} & p^{s-\lambda_r}s_{r3} & \ldots & p^{s-\lambda_r}s_{r,r-1} & p^{s-\lambda_r}
\end{pmatrix}.
$$

С помощью преобразований (α), (β) полученную матрицу можно привести к такому виду, что для приведения её к нормальному виду нужна будет только некоторая перестановка столбцов. Перенумеруем элементы базиса группы $\mathrm{Hom}(G,R)$ таким образом, чтобы столбцы p-матрицы Мальцева были записаны в обратном порядке. Получим, что p-матрица Мальцева группы $\mathrm{Hom}(G,R)$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{s}_{r,r-1} & \dots & \bar{s}_{r2} & \bar{s}_{r1} \\ 0 & \bar{1} & \dots & \bar{s}_{r-1,2} & \bar{s}_{r-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{1} & \bar{s}_{21} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_r}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_{r-1}}} \\ \dots \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_2}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_1}} \end{matrix},$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Пусть G — локально свободная группа ранга 2, заданная набором p-матриц Мальцева*

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12}^{(p)} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \end{matrix}.$$

Тогда p-матрицы Мальцева группы $\mathrm{Hom}(G,R)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы, будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & -\bar{n}_{12}^{(p)} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_2}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_1}} \end{matrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим p-матрицу s-го слоя группы G:

$$\begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

По теореме 9 p-матрица s-го слоя двойственной группы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} p^{s-\lambda_2} & s_{21}p^{s-\lambda_2} \\ 0 & p^{s-\lambda_1} \end{pmatrix},$$

где $s_{21} = p^{\lambda_2-\lambda_1} - n_{12}$. Подставим вместо s_{21} данное выражение, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} p^{s-\lambda_2} & p^{s-\lambda_1} - n_{12}p^{s-\lambda_2} \\ 0 & p^{s-\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что элементарные преобразования (α), (β) можно применять к каждой матрице отдельно. Выполним преобразование (β), а именно прибавим к первой строке вторую, домноженную на -1. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} p^{s-\lambda_2} & -n_{12}p^{s-\lambda_2} \\ 0 & p^{s-\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что p-матрицы группы $\mathrm{Hom}(G,R)$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & -\bar{n}_{12}^{(p)} \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_2}} \\ \in \mathbb{Z}_{p^{s-\alpha_1}} \end{matrix}.$$ □

Докажем утверждение, полученное Р. Уорфилдом в [8] и являющееся следствием теоремы 9.

Следствие 2. *Для всякой локально свободной группы G ранга 2 существует группа без кручения R ранга 1, такая что $\mathrm{Hom}(G,R)\cong G$.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что группа G изоморфна двойственной ей группе $\mathrm{Hom}(G,R)$, достаточно доказать, что наборы p-матриц Мальцева этих групп эквивалентны. Рассмотрим p-матрицу s-го слоя группы $\mathrm{Hom}(G,R)$

$$\begin{pmatrix} p^{s-\lambda_2} & -n_{12}p^{s-\lambda_2} \\ 0 & p^{s-\lambda_1} \end{pmatrix}$$

и докажем, что она эквивалентна p-матрице s-го слоя группы G:

$$\begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & n_{12}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что системы p-матриц называются эквивалентными, если из одной системы можно получить другую, произведя конечное число преобразований (α), (β) над каждой матрицей системы отдельно и конечное число преобразований (γ), (γ'), (δ), (ε) над всеми матрицами системы одновременно.

Выберем $s=\lambda_1+\lambda_2$. Очевидно, что s удовлетворяет условию $s\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_1$. Тогда p-матрица s-го слоя группы $\mathrm{Hom}(G,R)$ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} p^{\lambda_1} & -n_{12}p^{\lambda_1} \\ 0 & p^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы из p-матрицы группы $\mathrm{Hom}(G,R)$ получить матрицу группы G, необходимо выполнить преобразование (ε), а именно домножить первый столбец матрицы на -1. Так как преобразование (ε) выполняется над всеми матрицами системы одновременно, мы должны рассмотреть два случая расположения столбцов, которые определяются подстановками (ε_p), $(1\ 2)$.

Рассмотрим подстановку (ε_p). В этом случае после преобразования (ε) достаточно домножить первую строку матрицы на -1, т. е. выполнить преобразование (α).

В случае подстановки $(1\ 2)$ после преобразования (ε) достаточно домножить вторую строку матрицы на -1.

Мы получили, что системы p-матриц групп G и $\mathrm{Hom}(G,R)$ эквивалентны, а отсюда следует, что $G\cong\mathrm{Hom}(G,R)$, что и требовалось доказать. □

Литература

[1] Курош А. Г. Теория групп. — М.: 1967.

[2] Мальцев А. И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Мат. сб. — 1938. — Т. 4. — С. 45—68.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.

[4] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[5] Derry D. Über eine Klasse von Abelschen Gruppen // Proc. London Math. Soc. — 1938. — Vol. 43. — P. 490—506.

[6] Fomin A. A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322. — P. 2544—2565.

[7] Kurosh A. G. Primitive torsionfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range // Ann. Math. — 1937. — Vol. 38. — P. 175—203.

[8] Warfield R. B., Jr. Homomorphisms and duality for Abelian groups // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 189—212.