Определяемость прямых сумм рациональных групп H-представлениями их колец эндоморфизмов с точностью до равенства

Е. Н. КУРМАНОВА
Нижегородский государственный педагогический университет
e-mail: kurm-elena@yandex.ru

А. М. СЕБЕЛЬДИН
Нижегородский государственный педагогический университет
e-mail: amseb@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелевы группы, рациональные группы.

Аннотация

Ранее был решён вопрос об определяемости абелевых групп их кольцами эндоморфизмов в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения. Если рассматривать класс прямых сумм рациональных групп, то можно говорить об определяемости абелевых групп рациональными представлениями их колец эндоморфизмов с точностью до равенства. В данной работе этот вопрос рассматривается для класса конечных прямых сумм рациональных групп и некоторых его подклассов.

Abstract

E. N. Kurmanova, A. M. Sebeldin, Determination of the direct sums of rational groups by H-representations of the endomorphism rings up to equality, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 95—103.

The problem of determination of Abelian groups (up to isomorphism) by their rings of endomorphisms in the class of completely decomposable torsion-free Abelian groups has been solved earlier. For the class of direct sums of rational groups one can speak about determination of Abelian groups by rational representations of their endomorphism rings up to equality. In this paper, we consider this problem for the class of finite direct sums of rational groups and for some subclasses.

Под рациональной группой будем понимать аддитивную подгруппу группы всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, под рациональным кольцом — подкольцо кольца $\mathbb{Q}$ с единицей. Для рациональной группы A через a обозначим минимальное натуральное число группы A. Пусть P — множество всех простых чисел, $P(A) = \{p \in P \colon pA = A\}$, $\frac{r}{s}A = \left\{\frac{r}{s}x \colon x \in A\right\}$, где $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, $P(k) = \{p \in P \colon p \mid k\}$, где k — целое число, $k \neq 0$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 95—103.

Для рациональных групп A и B положим

$$H_{(A,B)} = \left\{ \frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbb{Q} \colon \varphi \in \mathrm{Hom}(A,B) \right\}.$$

Можно показать, что $H_{(A,B)}$ является рациональной группой и имеет место групповой изоморфизм $H_{(A,B)} \cong \mathrm{Hom}(A,B)$ [2, теорема 4]. Группу $H_{(A,B)}$ назовём H-представлением группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A,B)$.

Пусть $\Im_n$ — класс всех абелевых групп A ранга n, являющихся прямыми суммами рациональных групп A_i, a_i — минимальное натуральное число группы A_i. Кольцо эндоморфизмов $E(A)$ группы A изоморфно кольцу матриц

$$\big(\mathrm{Hom}(A_i,A_j)\big) = \{(\varphi_{ji}) \colon \varphi_{ji} \in \mathrm{Hom}(A_i,\ A_j)\}$$

[1, теорема 3.11]. Рассмотрим множество всех рациональных матриц

$$E_A = \big(H_{(A_i,A_j)}\big) = \left\{ \left(\frac{\varphi_{ji}(a_i)}{a_i}\right) \colon \frac{\varphi_{ji}(a_i)}{a_i} \in H_{(A_i,A_j)} \right\}.$$

Можно показать, что E_A является ассоциативным кольцом с единицей и имеет место кольцевой изоморфизм $E_A \cong E(A)$. Кольцо рациональных матриц E_A назовём H-представлением кольца эндоморфизмов группы A. В частности, если A — рациональная группа, то

$$E_A = \left\{ \frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbb{Q} \colon \varphi \in E(A) \right\}$$

является рациональным кольцом.

Пусть $A, C \in \Im_n$, $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i$, $C = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$. Равенство $A = C$ означает, что $A_i = C_i$ для любого $i = 1,\ldots,n$. Соответственно равенство $E_A = E_C$ эквивалентно равенствам $H_{(A_i,A_j)} = H_{(C_i,C_j)}$ для любых $i,j = 1,\ldots,n$.

Лемма 1 [2, лемма 3]. *Пусть A — рациональная группа, a — минимальное натуральное число группы A, p — простое число. Если $p \mid a$, то $\mathrm{h}_p^A(a) = 0$.*

Лемма 2 [2, следствие 1]. *Пусть A, C — рациональные группы, a — минимальное натуральное число группы A, c — минимальное натуральное число группы C. $A = C$ тогда и только тогда, когда $c = a$ и $\chi^A(a) = \chi^C(c)$.*

Следствие 1. *Пусть A, C — рациональные группы, E_A, E_C — H-представления колец эндоморфизмов $E(A)$ и $E(C)$ соответственно. Тогда*

1) *$E_A = E_C$ тогда и только тогда, когда $E_A \cong E_C$;*
2) *если $A \cong C$, то $E_A = E_C$.*

Лемма 3 [2, теорема 1]. *Пусть A, C — рациональные группы, $\tau(A) \leqslant \tau(C)$, a — минимальное натуральное число группы A. Для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(A,C)$ и для любого $x \in A$*

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(a)}{a} x.$$

Лемма 4. *Пусть A, C, A_1, C_1 — рациональные группы, $\tau(A) \leqslant \tau(C)$, $\tau(A_1) \leqslant \leqslant \tau(C_1)$, r/s, m/n — рациональные числа, такие что*

$$A_1 = \frac{r}{s}A, \quad C_1 = \frac{m}{n}C,$$
$$\frac{ms}{nr} = \frac{k}{l} -$$

несократимая рациональная дробь. Тогда $H_{(A,C)} = H_{(A_1,C_1)}$ тогда и только тогда, когда $P(k) \subset P(C)$ и $P(l) \subset P(C)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть a, c, a_1, c_1 — минимальные натуральные числа групп A, C, A_1, C_1 соответственно. Имеем

$$H_{(A,C)} = \left\{\frac{\varphi(a)}{a} \in \mathbb{Q} \colon \varphi \in \mathrm{Hom}(A,C)\right\},$$
$$H_{(A_1,C_1)} = \left\{\frac{\theta(a_1)}{a_1} \in \mathbb{Q} \colon \theta \in \mathrm{Hom}(A_1,C_1)\right\},$$
$$H_{(A,A_1)} = \left\{\frac{f(a)}{a} \in \mathbb{Q} \colon f \in \mathrm{Hom}(A,A_1)\right\},$$
$$H_{(C,C_1)} = \left\{\frac{g(c)}{c} \in \mathbb{Q} \colon g \in \mathrm{Hom}(C,C_1)\right\}.$$

Так как
$$A_1 = \frac{r}{s}A,$$
то отображение $f \colon A \mapsto A_1$, такое что для любого $x \in A$
$$f(x) = \frac{r}{s}x,$$
является изоморфизмом группы A на группу A_1 и
$$\frac{f(a)}{a} = \frac{r}{s}, \quad \frac{r}{s} \in H_{(A,A_1)}.$$
Следовательно, отображение $f^{-1} \colon A_1 \mapsto A$ является изоморфизмом группы A_1 на группу A и
$$\frac{f^{-1}(a_1)}{a_1} = \frac{s}{r}, \quad \frac{s}{r} \in H_{(A_1,A)}.$$
Аналогично имеем изоморфизм g группы C на группу C_1 и
$$\frac{g(c)}{c} = \frac{m}{n}, \quad \frac{m}{n} \in H_{(C,C_1)},$$
а также изоморфизм g^{-1} группы C_1 на группу C и
$$\frac{g^{-1}(c_1)}{c_1} = \frac{n}{m}, \quad \frac{n}{m} \in H_{(C_1,C)}.$$

Рассмотрим отображения $f^{-1} \in \mathrm{Hom}(A_1, A)$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, C)$, $g \in \mathrm{Hom}(C, C_1)$. Ясно, что их композиция $g \circ \varphi \circ f^{-1}$ принадлежит $\mathrm{Hom}(A_1, C_1)$ и рациональное число

$$\frac{(g \circ \varphi \circ f^{-1})(a_1)}{a_1} = \frac{m}{n} \cdot \frac{\varphi(a)}{a} \cdot \frac{s}{r} = \frac{k}{l} \cdot \frac{\varphi(a)}{a}$$

принадлежит группе $H_{(A_1,C_1)}$ (лемма 3). Следовательно,

$$\frac{k}{l} H_{(A,C)} \subseteq H_{(A_1,C_1)}.$$

Для любого рационального числа

$$\frac{\theta(a_1)}{a_1} \in H_{(A_1,C_1)}$$

существует рациональное число

$$\frac{\varphi(a)}{a} \in H_{(A,C)},$$

такое что

$$\frac{\theta(a_1)}{a_1} = \frac{k}{l} \cdot \frac{\varphi(a)}{a}.$$

Действительно,

$$\frac{\varphi(a)}{a} = \frac{l}{k} \cdot \frac{\theta(a_1)}{a_1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\theta(a_1)}{a_1} \cdot \frac{r}{s}.$$

Следовательно,

$$H_{(A_1,C_1)} \subseteq \frac{k}{l} H_{(A,C)}.$$

Получаем, что

$$H_{(A_1,C_1)} = \frac{k}{l} H_{(A,C)}.$$

По условию $H_{(A_1,C_1)} = H_{(A,C)}$, поэтому $P(k) \subset P\big(H_{(A,C)}\big) = P(C)$ и $P(l) \subset \subset P\big(H_{(A,C)}\big) = P(C)$.

Достаточность. Выше мы показали, что

$$H_{(A_1,C_1)} = \frac{k}{l} H_{(A,C)}.$$

Если $P(k) \subset P(C)$ и $P(l) \subset P(C)$, то $H_{(A_1,C_1)} = H_{(A,C)}$. □

Далее в работе через $\mathrm{h}_p^A(a) = \alpha$ будем обозначать p-высоту минимального натурального числа a в рациональной группе A, через $\chi^A(a) = (\ldots, \mathrm{h}_p^A(a), \ldots)$ — характеристику элемента a в группе A.

Теорема 1. *Группа A определяется в классе всех рациональных групп $\Im_1$ с точностью до равенства тогда и только тогда, когда $A = \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что группа A определяется с точностью до равенства в классе всех рациональных групп $\Im_1$ и $A \neq \mathbb{Q}$. Тогда существует такое простое число p, что $\mathrm{h}_p^A(a) = \alpha$, $\alpha \neq \infty$. Если $a = 1$, то при

$$C = \frac{1}{p}A$$

имеем, что $E_A = E_C$ (следствие 1), $\mathrm{h}_p^C(1) = \alpha + 1$, $\chi^A(1) \neq \chi^C(1)$ и $A \neq C$ (лемма 2). Следовательно, группа A не определяется с точностью до равенства, что противоречит условию. Если $a \neq 1$, то рассмотрим группу

$$C = \frac{1}{p}A,$$

где $p \in P(a)$. Она имеет минимальное натуральное число $c = a/p$, $a \neq c$. Отсюда следует, что $E_A = E_C$ (следствие 1) и $A \neq C$ (лемма 2). В данном случае группа A также не определяется с точностью до равенства, что противоречит условию. Следовательно, $A = \mathbb{Q}$.

Достаточность. Если $A = \mathbb{Q}$, то $E_A = \mathbb{Q}$ и для любой рациональной группы $C \in \Im_1$ всякий раз из равенства $E_A = E_C$ следует равенство $A = C = \mathbb{Q}$, т. е. группа $A = \mathbb{Q}$ определяется в классе $\Im_1$ с точностью до равенства. □

Пусть a — фиксированное целое положительное число. Рассмотрим множество $\Im_1(a)$ всех рациональных групп A, которые имеют одно и тоже минимальное натуральное число, равное a.

Теорема 2. *Группа A определяется в классе $\Im_1(a)$ с точностью до равенства тогда и только тогда, когда $\mathrm{h}_p^A(a) = \infty$ для любого $p \notin P(a)$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что группа A в классе $\Im_1(a)$ определяется с точностью до равенства и существует простое число $p \notin P(a)$, такое что $\mathrm{h}_p^A(a) = \alpha$, $\alpha \neq \infty$. Рассмотрим группу

$$C = \frac{1}{p}A.$$

Так как $p \notin P(a)$, то минимальным натуральным числом группы C является число a, поэтому $C \in \Im_1(a)$ и $\mathrm{h}_p^C(a) = \alpha + 1$. Следовательно, $\mathrm{h}_p^A(a) \neq \mathrm{h}_p^C(a)$, $\chi^A(a) \neq \chi^C(a)$ и $A \neq C$ (лемма 2). Кроме того, $A \cong C$, поэтому $E_A = E_C$ (следствие 1). Таким образом, найдётся группа $C \in \Im_1(a)$, такая что $E_A = E_C$ и $A \neq C$. Поэтому группа A не определяется в классе $\Im_1(a)$ с точностью до равенства, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть $A \in \Im_1(a)$ и $\mathrm{h}_p^A(a) = \infty$ для любого $p \notin P(a)$. Тогда для любой группы $C \in \Im_1(a)$ всякий раз из равенства $E_A = E_C$ H-представлений колец эндоморфизмов $E(A)$ и $E(C)$ групп A и C будет следовать равенство $P(A) = P(C) = P \setminus P(a)$. Так как минимальным натуральным числом группы C является число a, то $\chi^A(a) = \chi^C(a)$ и $A = C$ (лемма 2). □

Рассмотрим множество $\Im_1^1$ — множество всех рациональных групп, минимальные натуральные числа которых в каноническом разложении содержат произвольные простые числа с показателями степеней, равными 1.

Теорема 3. *Группа A определяется в классе $\Im_1^1$ с точностью до равенства тогда и только тогда, когда минимальное натуральное число a группы A является простым числом и $\mathrm{h}_p^A(a) = \infty$ для любого простого числа $p \neq a$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A определяется в классе $\Im_1^1$ с точностью до равенства. Если a является составным числом, то a является произведением простых чисел с показателями степеней, равными 1, т. е. $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_i \in P$, $i = 1, \ldots, k$. Зафиксируем индекс i и рассмотрим группу

$$C = \frac{1}{p_i} A.$$

Минимальным натуральным числом группы C является число $c = a/p_i$, $c \neq a$, поэтому $A \neq C$ (лемма 2). Так как $A \cong C$, то $E_A = E_C$ (следствие 1). Следовательно, если a является составным числом, то найдётся группа $C \in \Im_1^1$, такая что $C \neq A$ и $E_A = E_C$. Это означает, что группа A не определяется в классе $\Im_1^1$ с точностью до равенства, что противоречит условию. Поэтому a не может быть составным числом, значит, a — простое число. Если существует $p \neq a$, такое что $\mathrm{h}_p^A(a) = \alpha$, $\alpha \neq \infty$, то найдётся группа

$$C = \frac{1}{p} A,$$

где $c = a$ — минимальное натуральное число группы C, являющееся простым числом. Кроме того, $\mathrm{h}_p^C(a) = \alpha + 1$, $\mathrm{h}_p^A(a) \neq \mathrm{h}_p^C(a)$, значит, $\chi^A(a) \neq \chi^C(a)$ и $A \neq C$ (лемма 2). Таким образом, в этом случае также найдётся группа $C \in \Im_1^1$, такая что $E_A = E_C$ и $A \neq C$, поэтому группа A не определяется в классе $\Im_1^1$ с точностью до равенства, что противоречит условию. Следовательно, если группа A определяется в классе $\Im_1^1$ с точностью до равенства, то минимальное натуральное число a группы A является простым числом и $\mathrm{h}_p^A(a) = \infty$ для любого простого числа $p \neq a$.

Достаточность. Пусть минимальное натуральное число a группы A является простым числом и $\mathrm{h}_p^A(a) = \infty$ для любого простого числа $p \neq a$. Тогда для любой группы $C \in \Im_1^1$ всякий раз из равенства $E_A = E_C$ будет следовать равенство $P(A) = P(C) = P \setminus P(a)$. Характеристики минимального натурального числа a в группе A и минимального натурального числа c в группе C будут содержать символы ∞ для всех простых чисел $p \neq a$ и только один символ 0 для простого числа $p = a$ (лемма 1). Так как $C \in \Im_1^1$, то $c = a$ — простое число, $\chi^A(a) = \chi^C(a)$ и $A = C$ (лемма 2). $\square$

Определение 1. Пусть χ_1 и χ_2 — произвольные характеристики, где

$$\chi_1 = (\ldots, \alpha_p, \ldots), \quad \chi_2 = (\ldots, \beta_p, \ldots),$$

P' — фиксированное подмножество множества всех простых чисел P. Будем говорить, что характеристика χ_2 является P'-квазиравной характеристике χ_1, если $\beta_{p'} = \alpha_{p'}$ или $\beta_{p'} = \infty$ для любого $p' \in P'$ и $\beta_{p'} \in \mathbb{N}_0$ или $\beta_{p'} = \infty$ для любого $p' \notin P'$. Если $P' = P$, то будем говорить, что характеристика χ_2 квазиравна характеристике χ_1.

Если характеристика χ_2 квазиравна характеристике χ_1, будем обозначать это $\chi_2 \simeq \chi_1$. Если характеристика χ_2 P'-квазиравна характеристике χ_1, то будем обозначать это $\chi_2 \overset{P'}{\simeq} \chi_1$.

Пусть A — фиксированная рациональная группа, a — минимальное натуральное число группы A, $\chi^A(a)$ — характеристика элемента a в группе A, P' — фиксированное подмножество множества всех простых чисел P, такое что $P(a) \subseteq P'$. Рассмотрим множество $\Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$ всех рациональных групп, которые имеют одно и тоже минимальное натуральное число a, характеристики элемента a в этих группах P'-квазиравны $\chi^A(a)$.

Теорема 4. *Группа C определяется в классе $\Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$ с точностью до равенства тогда и только тогда, когда $\mathrm{h}_p^C(a) = \infty$ для любого простого числа $p' \notin P'$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что группа C в классе $\Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$ определяется с точностью до равенства и существует простое число $p' \notin P'$, такое что $\mathrm{h}_{p'}^C(a) = \beta$, $\beta \neq \infty$. Рассмотрим группу

$$D = \frac{1}{p'}C.$$

Так как $P(a) \subseteq P'$ и $p' \notin P'$, то минимальным натуральным числом группы D является число a, $\chi^D(a) \overset{P'}{\simeq} \chi^A(a)$, поэтому $D \in \Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$. Кроме того, $\mathrm{h}_{p'}^D(a) = \beta + 1$. Следовательно, $\chi^C(a) \neq \chi^D(a)$ и $D \neq C$ (лемма 2). Так как $D \cong C$, то $E_D = E_C$ (следствие 1). Таким образом, существует такая группа $D \in \Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$, что $E_D = E_C$ и $D \neq C$. Поэтому группа C не определяется в классе $\Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$ с точностью до равенства, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть $C \in \Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$ и $\mathrm{h}_{p'}^C(a) = \infty$ для любого $p' \notin P'$. Тогда для любой группы $D \in \Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$ всякий раз из равенства $E_C = E_D$ будут следовать равенства $P(C) = P(D)$, $P'' = P \setminus P(C) = P \setminus P(D)$. Так как a — минимальное натуральное число групп C и D, то $\mathrm{h}_p^C(a) = \mathrm{h}_p^D(a) = 0$ для любого $p \in P(a)$ (лемма 1). По условию $C, D \in \Im_1^{\overset{P'}{\simeq}}$, значит, $\chi^C(a) \overset{P'}{\simeq} \chi^A(a)$, $\chi^D(a) \overset{P'}{\simeq} \chi^A(a)$. Следовательно, для любого простого числа p, такого что $p \notin P(a)$ и $p \in P''$, $\mathrm{h}_p^C(a)$ и $\mathrm{h}_p^D(a)$ являются конечными и равными, так как $\mathrm{h}_p^A(a) = \mathrm{h}_p^C(a) = \mathrm{h}_p^D(a)$. Таким образом, $\chi^C(a) = \chi^D(a)$ и $C = D$ (лемма 2). □

Пусть n — фиксированное натуральное число, $n \neq 1$, $\Im_n$ — класс всех абелевых групп ранга n, являющихся прямыми суммами рациональных групп, $A \in \Im_n$, $A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$, a_i — наименьшее целое положительное число группы A_i.

Теорема 5. *Группа A определяется в классе $\Im_n$ с точностью до равенства тогда и только тогда, когда $A_i = \mathbb{Q}$ для любого $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что группа A определяется в классе $\Im_n$ с точностью до равенства и $A_k \neq \mathbb{Q}$ для некоторого индекса $k = 1, \ldots, n$. Так как $A_k \neq \mathbb{Q}$, то существует такое простое число $p \in P$, что $\mathrm{h}_p^{A_k}(a_k) \neq \infty$. Рассмотрим группу $C \in \Im_n$, $C = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} C_i$, где

$$C_i = \frac{1}{p} A_i$$

для $i = 1, \ldots, n$. Так как $A_i \cong C_i$, то $E_{A_i} = E_{C_i}$ (следствие 1). Для всех $i, j = 1, \ldots, n$, для которых $\tau(A_i) \leqslant \tau(A_j)$, $H_{(A_i, A_j)} = H_{(C_i, C_j)}$ (лемма 4), а для всех $i, j = 1, \ldots, n$, для которых $\tau(A_i) > \tau(A_j)$ или $\tau(A_i)$ и $\tau(A_j)$ несравнимы, имеем $H_{(A_i, A_j)} = H_{(C_i, C_j)} = 0$, поэтому $E_A = E_C$. Так как $A_k \neq C_k$, то $A \neq C$. Таким образом, если $A_k \neq \mathbb{Q}$ для некоторого индекса $k = 1, \ldots, n$, то найдётся такая группа $C \in \Im_n$, что $E_A = E_C$ и $A \neq C$. Следовательно, группа A не определяется в классе $\Im_n$ с точностью до равенства, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Q}$. Для любой группы $C \in \Im_n$ всякий раз из равенства $E_A = E_C$ будут следовать равенства $H_{(\mathbb{Q}, \mathbb{Q})} = H_{(C_i, C_j)} = \mathbb{Q}$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. При $i = j$ имеем равенства $E_{\mathbb{Q}} = E_{C_i} = \mathbb{Q} = C_i$. Следовательно, $C = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Q}$ и группа A определяется с точностью до равенства в классе $\Im_n$. □

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — фиксированные целые положительные числа. Рассмотрим множество $\Im_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ всех групп

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i,$$

таких что $A_i \in \Im_1(a_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через Ω множество всех (различных) типов прямых слагаемых группы A. Рассмотрим разбиение множества Ω на связанные множества Ω_s, и пусть A^s — соответствующие им прямые суммы рациональных групп, $s = 1, 2, \ldots, k$. Получаем прямую сумму вполне характеристических прямых слагаемых:

$$A = \bigoplus_{s=1}^{k} A^s.$$

Обозначим через $P^*(A^s)$ множество всех простых чисел, входящих в разложение минимальных натуральных элементов рациональных слагаемых группы A^s.

Теорема 6. *Если группа A определяется в классе $\Im_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ с точностью до равенства, то для любого $s = 1, 2, \ldots, k$ имеем равенство $P(A^s) \cup P^*(A^s) = P$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $s = 1, 2, \ldots, k$ существует $p \notin P(A^s) \cup P^*(A^s)$. Тогда полагаем

$$B = \bigoplus_{j=1}^{k} B^j,$$

где $B^j = A^j$, если $j \neq s$, и $pB^s = A^s$. Применяя лемму 4, получаем равенство колец $E_A = E_B$. Очевидно, что $A \neq B$. $\square$

Литература

[1] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А.А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск, 2002.

[2] Курманова Е. Н., Себельдин А. М. Необходимые и достаточные условия для Hom-делимости рациональных групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2006. — № 8 (531). — С. 38—41.

[3] Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Мат. заметки. — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 403—408.