Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов*

К. С. СОРОКИН
Томский государственный университет
e-mail: sorokin_k@list.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: вполне разложимая абелева группа, чистые кольца.

Аннотация

Найдены условия чистоты кольца эндоморфизмов вполне разложимой абелевой группы.

Abstract

K. S. Sorokin, Completely decomposable Abelian groups with clean endomorphism rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 105—108.

Conditions for cleanness of endomorphism rings of completely decomposable Abelian groups are established.

В 1977 году В. Николсон предложил следующее определение.

Определение 1 [3]. Кольцо называется чистым, если каждый его элемент является суммой обратимого и идемпотентного элементов.

Согласно [5, теорема 3.9] кольцо эндоморфизмов непрерывного модуля является чистым. Так как абелевы группы являются $\mathbb{Z}$-модулями, то этот результат справедлив и для них.

Определение 2 [5]. Модуль называется непрерывным, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1) каждый подмодуль модуля — существенный подмодуль в некотором прямом слагаемом модуля;
2) каждый подмодуль модуля, изоморфный прямому слагаемому модуля, сам является прямым слагаемым модуля.

Делимые абелевы группы являются непрерывными $\mathbb{Z}$-модулями, поэтому их кольца эндоморфизмов — чистые кольца. Применяя [6, следствие 3], [3, теорема 21.3], а также [1, теорема 3.11], получаем следующий результат.

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями».

© 2011/2012 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Теорема 3. *Группа имеет чистое кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда её редуцированная часть имеет чистое кольцо эндоморфизмов.*

Доказательство. Согласно [3, теорема 21.3] всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы C. Тогда по [1, теорема 3.11]

$$\mathrm{End}(A) \cong \begin{pmatrix} \mathrm{End}(D) & \mathrm{Hom}(C,D) \\ \mathrm{Hom}(D,C) & \mathrm{End}(C) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{End}(D) & \mathrm{Hom}(C,D) \\ 0 & \mathrm{End}(C) \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathrm{Hom}(D,C) = 0$, так как для любого $\alpha \in \mathrm{Hom}(D,C)$ образ $\mathrm{im}(\alpha)$ — делимая подгруппа в C. Поскольку C — редуцированная группа, то $\mathrm{im}(\alpha) = 0$, т. е. $\alpha = 0$. Применяя [6, следствие 3], получаем, что $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(D)$ и $\mathrm{End}(C)$ — чистые кольца. Кольцо $\mathrm{End}(D)$ является чистым. Тогда $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(C)$ — чистое кольцо. □

Определение 4 [4]. Группа без кручения называется вполне разложимой, если она является прямой суммой групп ранга 1.

Связь между кольцами эндоморфизмов групп без кручения ранга 1 и подкольцами поля $\mathbb{Q}$ описывает следующее предложение.

Предложение 5 [1]. *Пусть A — группа без кручения ранга 1. Тогда кольцо $\mathrm{End}(A)$ изоморфно подкольцу поля $\mathbb{Q}$, порождённому 1 и всеми такими дробями $1/p$ (p — простое число), что $pA = A$.*

Возникает вопрос, когда подкольцо поля $\mathbb{Q}$ является чистым? Полный ответ на него даёт следующий результат.

Предложение 6. *Подкольцо $R \subset \mathbb{Q}$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $R = \mathbb{Q}_p$ для некоторого простого числа p или $R = \mathbb{Q}$.*

Здесь и далее через $\mathbb{Q}_p$ обозначается группа или кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p.

Докажем теперь основной результат, который даёт полное описание вполне разложимых групп с чистыми кольцами эндоморфизмов.

Теорема 7. *Если B — вполне разложимая группа с редуцированной частью A, то кольцо эндоморфизмов группы B чистое тогда и только тогда, когда*

$$A = \bigoplus_{p\in\Pi}\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i^p\Bigr),$$

где Π — некоторое множество простых чисел, $A_i^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi$, $i = 1,\ldots,n_p$, $n_p \in \mathbb{N}$).

Доказательство. Достаточность. Для всякого $p \in \Pi$ обозначим через A_p группу $\bigoplus\limits_{i=1}^{n_p} A_i^p$. Тогда для любого $p \in \Pi$ имеем

$$\mathrm{t}(A_p) = \mathrm{t}(\mathbb{Q}_p) = (\infty, \infty, \ldots, \infty, 0, \infty, \infty, \ldots),$$

где 0 соответствует простому числу p. Так как A_p — вполне инвариантные подгруппы группы A, то
$$\mathrm{End}(A) \cong \prod_{p\in\Pi} \mathrm{End}(A_p).$$
Применяя [6, предложение 7], получим, что $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(A_p)$ — чистое кольцо. Так как $A_i^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi$, $i = 1, \ldots, n_p$), то из предложения 5 следует, что
$$\mathrm{End}(A_i^p) \cong \mathrm{End}(\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Q}_p.$$
Применяя предложение 6, получим, что $\mathrm{End}(A_i^p)$ — чистое кольцо ($p \in \Pi$, $i = 1, \ldots, n_p$). Тогда по [2, теорема 13.69] $\mathrm{End}(A_p)$ — чистое кольцо ($p \in \Pi$). Таким образом, $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо. Из теоремы 3 следует, что $\mathrm{End}(B)$ — чистое кольцо.

Необходимость. Пусть $\{e_i^t\}_{i\in I_t,\, t\in T}$ — ортогональная система идемпотентов, соответствующая каноническому разложению группы
$$A = \bigoplus_{t\in T}\Bigl(\bigoplus_{i\in I_t} A_i^t\Bigr)$$
(т. е. $A_i^t = e_i^t A$, $i \in I_t$, $t \in T$). Так как A_i^t ($i \in I_t$, $t \in T$) — группы ранга 1, то e_i^t — примитивные идемпотенты. Из условия и теоремы 3 следует, что $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо. Тогда из [6, предложение 1] получаем, что e_i^t — локальные идемпотенты, т. е. $e_i^t \,\mathrm{End}(A) e_i^t$ — локальное, а значит чистое, кольцо ($i \in I_t$, $t \in T$). Согласно [1, предложение 3.9]
$$\mathrm{End}(A_i^t) = \mathrm{End}(e_i^t A) \cong e_i^t \,\mathrm{End}(A) e_i^t.$$
Тогда $\mathrm{End}(A_i^t)$ — чистое кольцо ($i \in I_t$, $t \in T$). По предложению 5 $\mathrm{End}(A_i^t)$ — подкольцо в $\mathbb{Q}$ ($i \in I_t$, $t \in T$). Применив предложение 6, получим, что $\mathrm{End}(A_i^t) \cong \mathbb{Q}_{p_t}$ для некоторого простого p_t ($i \in I_t$, $t \in T$). Тогда по предложению 5 получаем, что $A_i^t \cong \mathbb{Q}_{p_t}$ ($i \in I_t$, $t \in T$). Таким образом,
$$A = \bigoplus_{p\in\Pi}\Bigl(\bigoplus_{i\in I_p} A_i^p\Bigr),$$
где $A_i^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($i \in I_p$, $p \in \Pi$), Π — некоторое множество простых чисел, причём $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо. Согласно доказательству достаточности $\mathrm{End}(A)$ — чистое кольцо тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}(A_p)$ — чистое кольцо ($p \in \Pi$), в нашем случае $\mathrm{End}(A_p) = \bigoplus\limits_{i\in I_p} A_i^p$. Предположим, что I_p — бесконечное множество. Тогда
$$\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\Bigl(\bigoplus_{i\in I_p} A_i^p\Bigr) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_p}\bigl({\mathbb{Q}_p}^{(I_p)}\bigr) \text{ —}$$
чистое кольцо. Так как $\mathbb{Q}_p$ — полулокальное кольцо, применяя [5, теорема 5.1] (эта теорема верна и в случае $\operatorname{card} I > \operatorname{card} \mathbb{N}$, где I — индексное множество),

получаем, что $\mathbb{Q}_p$ — правое совершенное кольцо. Тогда по [2, теорема 6.48] $\mathbb{Q}_p$ — полуартиново кольцо. Но $\mathbb{Q}_p$ не является полуартиновым (так как содержит бесконечно убывающую цепь главных идеалов, порождённых элементами вида p^k, $k = 0, 1, \dots$). Таким образом, имеем, что

$$A = \bigoplus_{p\in\Pi}\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{n_p} A_i^p\Bigr),$$

где $A_i^p \cong \mathbb{Q}_p$ ($p \in \Pi$, $i = 1, \dots, n^p$, $n^p \in \mathbb{N}$). $\square$

Литература

[1] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск: Томский гос. унив., 2002.

[2] Туганбаев А. А. Теория колец. — М.: МЦНМО, 2009.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[5] Camillo V. P., Khurana D., Lam T. Y., Nicholson W. K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra — 2006. — Vol. 304. — P. 94—111.

[6] Han J., Nicholson W. K. Extensions of clean rings // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 6. — P. 2589—2595.