Периодические абелевы RAI-группы

ФАМ ТХИ ТХУ ТХЮИ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: ptthuthuy@yahoo.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на группе, аддитивные группы колец, абсолютный идеал, RAI-группа.

Аннотация

Подгруппа A абелевой группы G называется её абсолютным идеалом, если A является идеалом в любом кольце на группе G. Абелева группа называется RAI-группой, если на ней существует кольцо, в котором любой идеал является абсолютным. Проблема описания RAI-групп сформулирована Л. Фуксом (проблема 93). В настоящей работе описаны абсолютные идеалы периодических абелевых групп и RAI-группы в классе абелевых периодических групп.

Abstract

Pham Thi Thu Thuy, Torsion Abelian RAI-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 109—138.

A subgroup A of an Abelian group G is called its absolute ideal if A is an ideal of any ring on G. An Abelian group is called an RAI-group if there exists a ring on it in which every ideal is absolute. The problem of describing RAI-groups was formulated by L. Fuchs (Problem 93). In this paper, absolute ideals of torsion Abelian groups and torsion Abelian RAI-groups are described.

Под умножением на абелевой группе G понимается любой гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Это умножение будем часто обозначать знаком $\times$, т. е. $g_1\times g_2 = \mu(g_1\otimes g_2)$. Абелева группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на группе G, обозначим его $(G,\times)$. Подгруппа A абелевой группы G называется её абсолютным идеалом, если A является идеалом в любом кольце на G. Абсолютные идеалы изучались, например, в $[1, 3—5]$. В настоящей работе описаны абсолютные идеалы периодических абелевых групп и абелевы периодические RAI-группы.

Все рассматриваемые группы абелевы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа». Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел; $\mathrm{o}(g)$ — порядок элемента g в группе G; $\mathrm{h}_p(g)$ — p-высота элемента g в группе G; $\mathrm{h}_p^*(g)$ — обобщённая p-высота элемента g в группе G; $\mathrm{r}_p(G)$ — p-ранг группы G (если из контекста будет ясно, о каком простом числе p идёт речь, то будем писать только

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 109—138.

$\mathrm{h}(g)$, $\mathrm{h}^*(g)$ и $\mathrm{r}(G)$); $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$; ω — наименьшее бесконечное порядковое число; $\langle g \rangle$ — подгруппа группы G, порождённая элементом g; $\langle g \rangle_\times$ — идеал кольца $(G, \times)$, порождённый элементом g. Если $n \in \mathbb{Z}$ и $g \in G$, то $n \mid g$ означает, что существует элемент $a \in G$, такой что $g = na$.

На делимой периодической группе и на группе без кручения ранга 1 неидемпотентного типа может быть определено только нулевое умножение, поэтому любая подгруппа этой группы является её абсолютным идеалом. Таким образом, делимые периодические группы и группы без кручения ранга 1 неидемпотентного типа служат тривиальными примерами RAI-групп. Другие примеры RAI-групп, а также групп, которые не являются RAI-группами, можно получить, используя описание периодических RAI-групп (теоремы 16, 17 и 26).

Легко убедиться, что имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Сумма и пересечение абсолютных идеалов группы G также являются её абсолютными идеалами.* □

Наименьший абсолютный идеал группы G, содержащий элемент g, называется абсолютным идеалом, порождённым элементом g в группе G, и обозначается через $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$. Предложение 1 гарантирует существование такого наименьшего абсолютного идеала в группе G, он равен пересечению всех абсолютных идеалов группы G, содержащих элемент g.

Предложение 2. *Для кольца $(G, \times)$ на группе G эквивалентны следующие свойства*:

1) *все идеалы кольца $(G, \times)$ являются абсолютными*;
2) *$\langle g \rangle_\times$ — абсолютный идеал группы G для каждого элемента $g \in G$*;
3) *$\langle g \rangle_\times = \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$ для каждого элемента $g \in G$.*

Доказательство. Свойство 2) сразу вытекает из свойства 1).

Пусть теперь $g \in G$ и $\langle g \rangle_\times$ — абсолютный идеал группы G. Тогда $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g \rangle_\times$. С другой стороны, по определению $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$ — идеал кольца $(G, \times)$ и поэтому содержит $\langle g \rangle_\times$. Следовательно, $\langle g \rangle_\times = \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$.

Предположим, что имеет место свойство 3), и пусть A — идеал кольца $(G, \times)$. Тогда

$$A = \sum_{g \in A} \langle g \rangle_\times = \sum_{g \in A} \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}.$$

По предложению 1 подгруппа A является абсолютным идеалом группы G. □

В классе периодических групп проблема описания абсолютных идеалов и RAI-групп легко сводится к случаю p-примарных групп.

Предложение 3. *Пусть G — периодическая группа. Тогда*

1) *подгруппа A группы G является её абсолютным идеалом тогда и только тогда, когда каждая её p-компонента A_p является абсолютным идеалом соответствующей p-компоненты G_p группы G*;
2) *G является RAI-группой тогда и только тогда, когда каждая её p-компонента G_p является RAI-группой.*

Доказательство. 1. Пусть A — абсолютный идеал группы G, p — простое число. Пусть $(G_p, \times_p)$ — произвольное кольцо на группе G_p. Определим умножение $\times$ на группе G следующим образом:

$$\sum_p g_p \times \sum_p g'_p = \sum_p (g_p \times_p g'_p)$$

для каждого $g = \sum\limits_p g_p$ и $g' = \sum\limits_p g'_p$ $(g_p, g'_p \in G_p)$. Тогда A — идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $a_p \in A_p$, $g_p \in G_p$. Тогда $a_p \times_p g_p = a_p \times g_p \in A \cap G_p = A_p$, так как G_p — вполне характеристическая подгруппа группы G. Аналогично $g_p \times_p a_p \in \in A \cap G_p = A_p$. Следовательно, A_p — идеал кольца $(G_p, \times_p)$. Поскольку кольцо $(G_p, \times_p)$ произвольно, подгруппа A_p — абсолютный идеал группы G_p.

Пусть теперь A_p — абсолютный идеал группы G_p для каждого простого числа p, $(G, \times)$ — произвольное кольцо на группе G, $a = \sum\limits_p a_p \in A$ и $g = \sum\limits_q g_q \in G$. Пусть $\times_p$ — сужение умножения $\times$ на G_p для каждого простого числа p. Тогда A_p — идеал кольца $(G_p, \times_p)$ для каждого p. Тогда

$$a \times g = \left(\sum_p a_p\right) \times \left(\sum_q g_q\right) = \sum_p (a_p \times g_p) = \sum_p (a_p \times_p g_p) \in \sum_p A_p = A.$$

Аналогично $g \times a \in A$. Следовательно, A — идеал кольца $(G, \times)$. Так как кольцо $(G, \times)$ произвольно, подгруппа A является абсолютным идеалом группы G.

2. Пусть G — RAI-группа и p — простое число. Тогда существует кольцо $(G, \times)$ на группе G, в котором любой идеал является абсолютным. Так как G_p — вполне характеристическая подгруппа группы G, то определено кольцо $(G_p, \times_p)$, где $\times_p$ — сужение умножения $\times$ на p-компоненту G_p. Покажем, что любой идеал этого кольца является абсолютным. Пусть A_p — произвольный идеал кольца $(G_p, \times_p)$. Легко проверить, что A_p также идеал кольца $(G, \times)$ и поэтому абсолютным идеал группы G. Из пункта 1 следует, что A_p — абсолютный идеал группы G_p. Следовательно, G_p — RAI-группа.

Пусть теперь группа G_p является RAI-группой для каждого простого числа p. Тогда для каждого p существует кольцо $(G_p, \times_p)$, в котором любой идеал является абсолютным. Определим умножение $\times$ на группе G следующим образом:

$$\sum_p g_p \times \sum_p g'_p = \sum_p (g_p \times_p g'_p)$$

для любых $g = \sum\limits_p g_p$ и $g' = \sum\limits_p g'_p$ $(g_p, g'_p \in G_p)$. Пусть A — произвольный идеал кольца $(G, \times)$. Тогда подгруппа A_p является идеалом кольца $(G_p, \times_p)$ для каждого простого числа p и поэтому абсолютным идеалом группы G_p. Из пункта 1 следует, что подгруппа A — абсолютный идеал группы G. Следовательно, группа G — RAI-группа. □

В дальнейшем будем рассматривать только p-группы. Для p-группы G будем использовать следующие обозначения: $\{e_i\}_{i \in I}$ — p-базис группы G (I —

некоторое множество индексов); $B = \bigoplus_{i\in I}\langle e_i\rangle$ — базисная подгруппа группы G; $B_m^* = \bigoplus_{\mathrm{o}(e_i)\geqslant p^m}\langle e_i\rangle$. В исследовании p-колец важное значение имеет следующая теорема [3, теорема 120.1], выявляющая тесную связь между кольцевыми структурами на группе G и её базисными подгруппами.

Теорема. *Умножение $\times$ на p-группе G полностью определяется произведениями $e_i\times e_j$ базисных элементов группы G. Более того, при любом выборе $a_{ij}\in G$ при единственном условии, чтобы $\mathrm{o}(a_{ij})\leqslant\min\{\mathrm{o}(e_i),\mathrm{o}(e_j)\}$, где e_i, e_j пробегают всё множество базисных элементов группы G, существует такое умножение $\times$, что $e_i\times e_j = a_{ij}$ для любых i, j.*

Пусть $u=\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — строго возрастающая последовательность порядковых чисел. Нетрудно проверить, что

$$\text{если}\quad k\leqslant n,\quad\text{то}\quad \sigma_k-k\leqslant\sigma_n-n. \tag{1}$$

Будем говорить, что $l(u)=m$, если $\sigma_m=\infty$ и $\sigma_n<\infty$ для всех $n<m$. Если такого индекса m не существует, то $l(u)=\infty$. Обозначим

$$G(u)=\{g\in G\mid H(g)\geqslant u\}$$

[3, § 67] и

$$G^{\mathrm{o}}(u)=\{g\in G\mid H(g)\geqslant u,\ \mathrm{o}(g)\leqslant p^{l(u)}\}.$$

Нетрудно проверить, что подгруппы $G(u)$ и $G^{\mathrm{o}}(u)$ — вполне характеристические подгруппы группы G и поэтому её абсолютные идеалы. Кроме того,

$$\text{если}\quad u\leqslant v,\quad\text{то}\quad G^{\mathrm{o}}(u)\supseteq G^{\mathrm{o}}(v). \tag{2}$$

Для последовательности $u=(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ обозначаем $\bar u=\{\bar\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где

$$\bar\sigma_n=\begin{cases}\sigma_n, & \text{если } \sigma_n\in\mathbb{Z},\\ \infty, & \text{если } \sigma_n\geqslant\omega.\end{cases}$$

Пусть g — произвольный элемент p-группы G. Индикатором или ульмовской последовательностью элемента g в группе G называется последовательность $H(g)=(\sigma_0\ \sigma_1\ \ldots\ \sigma_n\ \ldots)$, где $\sigma_n=\mathrm{h}^*(p^ng)$ — обобщённая высота элемента p^ng в группе G. Так как базисная подгруппа B сервантна в группе G, то индикаторы в B и в G любого элемента $b\in B$ одинаковы и при этом содержат только целые числа и символы ∞. Кроме того, если $b=\sum_{i\in J}b_i$, где J — конечное подмножество множества I и $b_i\in\langle e_i\rangle$ $(i\in J)$, то

$$H(b_i)\geqslant H(b)\quad\text{для всех}\quad i\in J \tag{3}$$

и

$$H(b)=\bigcap_{i\in J}H(b_i), \tag{4}$$

где $\cap$ означает взятие покомпонентного минимума индикаторов $H(b_i)$, $i\in J$.

Лемма 4. *Пусть G — p-группа. Пусть b — элемент базисной подгруппы B группы G. Тогда*

1) $G^{\circ}\big(H(b)\big) = \{g \in G \mid H(g) \geqslant H(b),\ \mathrm{o}(g) \leqslant \mathrm{o}(b)\}$;
2) *если группа G редуцированная, то* $G^{\circ}\big(H(b)\big) = G\big(H(b)\big)$;
3) *если* $b = \sum\limits_{i\in J} b_i$, *где* $b_i \in \langle e_i\rangle$ (J — *конечное подмножество множества индексов* I), *то* $G^{\circ}\big(H(b)\big) = \sum\limits_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big)$.

Доказательство. 1. Для доказательства первого утверждения нужно только показать, что $\mathrm{o}(b) = p^{l(H(b))}$. Пусть $\mathrm{o}(b) = p^n$. Тогда $\mathrm{h}(p^n b) = \mathrm{h}(0) = \infty$, и для всех $s < n$ имеем $\mathrm{h}(p^s b) \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $l\big(H(b)\big) = n$, значит, $\mathrm{o}(b) = p^{l(H(b))}$. Таким образом, $G^{\circ}\big(H(b)\big) = \{g \in G \mid H(g) \geqslant H(b),\ \mathrm{o}(g) \leqslant \mathrm{o}(b)\}$.

2. Пусть группа G редуцированная. Пусть $g \in G\big(H(b)\big)$, т. е. $H(g) \geqslant H(b)$. Пусть $\mathrm{o}(b) = p^m$. Тогда $\mathrm{h}(p^m g) \geqslant \mathrm{h}(p^m b) = \mathrm{h}(0) = \infty$. Так как группа G редуцированная, то $p^m g = 0$, что означает, что $\mathrm{o}(g) \leqslant p^m = \mathrm{o}(b)$. Следовательно, $g \in G^{\circ}\big(H(b)\big)$ по пункту 1. Так как элемент g произвольный, имеем $G\big(H(b)\big) \subseteq G^{\circ}\big(H(b)\big)$. Так как обратное включение очевидно, то $G^{\circ}\big(H(b)\big) = G\big(H(b)\big)$.

3. Пусть $b = \sum\limits_{i\in J} b_i$, где $b_i \in \langle e_i\rangle$, $J \subseteq I$. Пусть $g \in G^{\circ}\big(H(b)\big)$. По пункту 1 $H(g) \geqslant H(b)$ и $\mathrm{o}(g) \leqslant \mathrm{o}(b)$. Так как $G = C \oplus D$, где C — редуцированная часть, D — делимая часть группы G, то $g = c + d$ для некоторых элементов $c \in C$, $d \in D$. Тогда

$$H(c) \geqslant H(g) \geqslant H(b) \tag{5}$$

$$H(d) = (\infty\ \infty\ \ldots) \tag{6}$$

и

$$\mathrm{o}(c) \leqslant \mathrm{o}(g) \leqslant \mathrm{o}(b) \tag{7}$$

$$\mathrm{o}(d) \leqslant \mathrm{o}(g) \leqslant \mathrm{o}(b). \tag{8}$$

Так как $b = \sum\limits_{i\in J} b_i$, то существует такой индекс $i_0 \in J$, что $\mathrm{o}(b_{i_0}) = \mathrm{o}(b)$. Тогда из (8) следует, что $\mathrm{o}(d) \leqslant \mathrm{o}(b_{i_0})$. Кроме того, из (6) вытекает, что $H(d) \geqslant H(b_{i_0})$. Следовательно, $d \in G^{\circ}\big(H(b_{i_0})\big)$. Поэтому

$$d \in \sum_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big). \tag{9}$$

Так как $b = \sum\limits_{i\in J} b_i$, то $H(b) = \bigcap\limits_{i\in J} H(b_i)$. Из [3, с. 17, Г] следует, что $C\big(H(b)\big) = \sum\limits_{i\in J} C\big(H(b_i)\big)$. Согласно пункту 2 имеем, что $C\big(H(b_i)\big) = C^{\circ}\big(H(b_i)\big) \subseteq G^{\circ}\big(H(b_i)\big)$, так как любой элемент подгруппы C имеет одинаковые высоты в C и в G. Следовательно, $C\big(H(b)\big) \subseteq \sum\limits_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big)$. Из (5) имеем, что $c \in C\big(H(b)\big)$, поэтому

$$c \in \sum_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big). \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что $g = c + d \in \sum\limits_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big)$. Следовательно,

$$G^{\circ}\big(H(b)\big) \subseteq \sum_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big). \tag{11}$$

С другой стороны, так как $b = \sum\limits_{i\in J} b_i$, то $H(b_i) \geqslant H(b)$ для каждого $i \in J$. Поэтому из (2) выводим, что $G^{\circ}\big(H(b_i)\big) \subseteq G^{\circ}\big(H(b)\big)$ для каждого $i \in J$. Следовательно,

$$\sum_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big) \subseteq G^{\circ}\big(H(b)\big). \tag{12}$$

Таким образом, из (11) и (12) выводим, что $G^{\circ}\big(H(b)\big) = \sum\limits_{i\in J} G^{\circ}\big(H(b_i)\big)$. □

Лемма 5. *Пусть G — p-группа. Тогда*

1) *если e_i — базисный элемент группы G и $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i}$, то $\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} = G[p^{m_i}]$;*
2) *если $b \in B$, то $\langle b\rangle_{\mathrm{AI}} = G^{\circ}\big(H(b)\big)$.*

Доказательство. 1. Пусть $a \in G[p^{m_i}]$. Тогда $\mathrm{o}(a) \leqslant p^{m_i} = \mathrm{o}(e_i)$. Поэтому можно определить умножение $\times$ на группе G, положив

$$e_s \times e_t = \begin{cases} g, & \text{если } s = t = i, \\ 0, & \text{если } s \neq i \text{ или } t \neq i. \end{cases}$$

Тогда $g = e_i \times e_i \in \langle e_i\rangle_{\times} \subseteq \langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}}$. Следовательно, $G[p^{m_i}] \subseteq \langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}}$. С другой стороны, так как $G[p^{m_i}]$ — абсолютный идеал группы G и $e_i \in G[p^{m_i}]$, то $\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq$ $\subseteq G[p^{m_i}]$. Таким образом, $\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} = G[p^{m_i}]$.

2. Пусть $b = \sum\limits_{i\in J} k_i e_i$, где J — конечное подмножество множества I. Докажем, что $G^{\circ}\big(H(b)\big) \subseteq \langle b\rangle_{\mathrm{AI}}$. По лемме 4 имеем $G^{\circ}\big(H(b)\big) = \sum\limits_{i\in J} G^{\circ}\big(H(k_i e_i)\big)$. Поэтому достаточно доказать, что $G^{\circ}\big(H(k_i e_i)\big) \subseteq \langle b\rangle_{\mathrm{AI}}$ для каждого $i \in J$. Пусть $a \in G^{\circ}\big(H(k_i e_i)\big)$. Тогда по лемме 4 имеем

$$H(g) \geqslant H(k_i e_i) \tag{13}$$
$$\mathrm{o}(g) \leqslant \mathrm{o}(k_i e_i). \tag{14}$$

Пусть $k_i = p^{r_i} l_i$, где $(l_i, p) = 1$. Тогда $\mathrm{h}(k_i e_i) = r_i$, и из (13) следует, что $\mathrm{h}(g) \geqslant r_i$. Более того, так как $(l_i, p) = 1$, то g делится на $k_i = p^{r_i} l_i$, т. е. существует такой элемент $c \in G$, что

$$g = k_i c = p^{r_i} l_i c. \tag{15}$$

Пусть $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i}$. Так как $k_i e_i \neq 0$, то $p^{m_i} \nmid k_i = p^{r_i} l_i$, т. е. $m_i > r_i$. Тогда $p^{m_i - r_i} k_i e_i = p^{m_i} l_i e_i = 0$, т. е. $\mathrm{o}(k_i e_i) \leqslant p^{m_i - r_i}$. Поэтому из (14) следует, что $\mathrm{o}(g) \leqslant p^{m_i - r_i}$. Согласно (15) имеем $0 = p^{m_i - r_i} g = p^{m_i - r_i}(p^{r_i} l_i c) = p^{m_i} l_i c$. Так как $(l_i, p) = 1$, то $p^{m_i} c = 0$. Следовательно, $\mathrm{o}(c) \leqslant p^{m_i} = \mathrm{o}(e_i)$. Поэтому можно определить умножение $\times$ на группе G, задав произведения базисных элементов следующим образом:

$$e_s \times e_t = \begin{cases} c, & \text{если } s = t = i, \\ 0, & \text{если } s \neq i \text{ или } t \neq i. \end{cases}$$

Тогда

$$b \times e_i = \sum_{j \in J} k_j e_j \times e_i = \sum_{j \in J} k_j (e_j \times e_i) = k_i (e_i \times e_i) = k_i c = g$$

в силу (15). Следовательно, $g \in \langle b \rangle_\times \subseteq \langle b \rangle_{\mathrm{AI}}$. Поэтому $G^{\mathrm{o}}\big(H(k_i e_i)\big) \subseteq \langle b \rangle_{\mathrm{AI}}$ для каждого $i \in J$. Следовательно,

$$G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big) = \sum_{i \in J} G^{\mathrm{o}}\big(H(k_i e_i)\big) \subseteq \langle b \rangle_{\mathrm{AI}}.$$

С другой стороны, так как $G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big)$ — абсолютный идеал группы G и $b \in G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big)$, то $\langle b \rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big)$. Таким образом, $\langle b \rangle_{\mathrm{AI}} = G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big)$. □

Лемма 6. *Пусть G — p-группа, $g \notin G^1$ и $l\big(H(g)\big) = n$. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m > \mathrm{h}(p^{n-1} g)$. Тогда существует элемент $b = \sum_{i \in J} k_i e_i$ (J — некоторое конечное подмножество множества I) базисной подгруппы B, такой что*

1) $p^m \mid g - b$;
2) $H(b) = \bar{H}(g)$;
3) $p^m \nmid k_i$, $p^n k_i e_i = 0$ *для всех* $i \in J$.

Доказательство. Пусть $H(g) = (\sigma_0 \ \ldots \ \sigma_{n-1} \ \sigma_n \ \ldots)$, где $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1} \in \mathbb{Z}$, $\sigma_n \geqslant \omega$.

1. Так как группа G/B делима, то существует такой элемент $b \in B$, что

$$p^m \mid g - b. \tag{16}$$

При этом если $b = \sum_{i \in J} k_i e_i$, где J — некоторое конечное подмножество множества I, то элемент b можно выбрать таким образом, чтобы

$$p^m \nmid k_i \quad \text{для каждого} \quad i \in J. \tag{17}$$

2. Пусть $s < n$. Тогда $\sigma_s - s \leqslant \sigma_s \leqslant \sigma_{n-1} = \mathrm{h}(p^{n-1} g) < m$ по условию. Следовательно, $m + s > \sigma_s$. Из (16) следует, что $p^{m+s} \mid p^s g - p^s b$, т. е. $\mathrm{h}(p^s g - p^s b) \geqslant m + s$. Следовательно, $\mathrm{h}(p^s g - p^s b) > \sigma_s = \mathrm{h}(p^s g)$. Так как $p^s b = p^s g - (p^s g - p^s b)$, то

$$\mathrm{h}(p^s b) = \sigma_s \text{ для каждого } s \leqslant n. \tag{18}$$

Из (16) следует, что $p^{m+n} \mid p^n g - \sum_{i \in J} p^n k_i e_i$. Следовательно, $p^{m+n} \mid \sum_{i \in J} p^n k_i e_i$, так как $\mathrm{h}^*(p^n g) = \sigma_n \geqslant \omega$. Так как система $\{e_i \mid i \in J\}$ p-независима, то либо

$p^n k_i e_i = 0$, либо $p^{m+n} \mid p^n k_i$ для каждого $i \in J$. Если $p^{m+n} \mid p^n k_i$ для некоторого $i \in J$, то $p^m \mid k_i$, что противоречит выбору элемента b. Следовательно,

$$p^n k_i e_i = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in J. \tag{19}$$

Поэтому $p^n b = \sum\limits_{i \in J} p^n k_i e_i = 0$, откуда получаем, что $\mathrm{h}^*(p^s b) = \infty$ для всех $s \geqslant n$. Тогда из (18) следует, что $H(b) = (\sigma_0 \ \ldots \ \sigma_{n-1} \ \infty \ \ldots) = \bar{H}(g)$.

3. Утверждение 3) сразу получаются из (17) и (19). □

Лемма 7. *Пусть G — p-группа, $g \in G$. Тогда $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$.*

Доказательство. Если $g \in G^1$, то $l\big(\bar{H}(g)\big) = 0$, поэтому $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big) = 0$. С другой стороны, так как G — периодическая группа, то для всех $a \in G$ имеем $g \times a = a \times g = 0$ в любом кольце $(G, \times)$ на группе G. Следовательно, $\langle g \rangle$ — абсолютный идеал группы G и, очевидно, наименьший идеал из всех её абсолютных идеалов, содержащих g. Поэтому $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g \rangle = \langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$.

Пусть теперь $g \notin G^1$. Докажем, что $\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Для этого докажем, что $\langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ — абсолютный идеал группы G. Пусть $(G, \times)$ — произвольное кольцо на группе G, $a \in \langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ и $x \in G$. Тогда $a = kg + c$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ и элемента $c \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Тогда

$$a \times x = kg \times x + c \times x. \tag{20}$$

Так как $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ — абсолютный идеал группы G и $c \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$, то

$$c \times x \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big). \tag{21}$$

Пусть $p^m > \max\{\mathrm{h}(p^{n-1}g), \mathrm{o}(x)\}$. По лемме 6 существует элемент b, принадлежащий базисной подгруппе B, такой что $H(b) = \bar{H}(g)$ и $p^m \mid g - b$. Тогда $b \in G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ и $(g - b) \times x = 0$, откуда получаем, что $g \times x = b \times x$. Так как $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ — вполне характеристическая подгруппа группы G, то $b \times x \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Тогда $g \times x \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Следовательно,

$$g \times x \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big). \tag{22}$$

Из (20)—(22) следует, что $a \times x \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big) \subseteq \langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Аналогично $a \times x \in \langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Поэтому $\langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ — идеал кольца $(G, \times)$. Так как кольцо $(G, \times)$ произвольно, имеем, что $\langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ — абсолютный идеал группы G. Следовательно,

$$\langle g \rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big). \tag{23}$$

Докажем, что $\langle g \rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big) \subseteq \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$. Достаточно доказать, что $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big) \subseteq \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$. Определим умножение $\times$ на группе G, задав произведения базисных элементов следующим образом:

$$e_i \times e_j = \begin{cases} e_i, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $m > \mathrm{h}(p^{n-1}g)$. По лемме 6 существует элемент $b = \sum\limits_{i\in J} k_i e_i \in B$, такой что $H(b) = \bar{H}(g)$ и

$$p^m \mid g - b, \tag{24}$$

$$p^m \nmid k_i \quad \text{для всех} \quad i \in J. \tag{25}$$

Докажем, что $k_i e_i \in \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ для всех $i \in J$. Пусть $i \in J$, $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i}$. Так как группа G/B делима, то существует элемент $b' = \sum\limits_{j\in J'} k'_j e_j$, такой что

$$p^{m+m_i} \mid g - b - b'. \tag{26}$$

Из (24) и (26) следует, что $p^m \mid b'$. Тогда

$$p^m \mid k'_j \quad \text{для всех} \quad j \in J'. \tag{27}$$

Из (26) следует, что $(g - b - b') \times e_i = 0$, откуда получаем, что

$$(b + b') \times e_i = g \times e_i \in \langle g\rangle_\times \subseteq \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}.$$

Имеем

$$b \times e_i = \sum_{j\in J} k_j (e_j \times e_i) = k_i e_i.$$

Возможны два случая

1. $i \notin J'$. Тогда

$$b' \times e_i = \sum_{j\in J'} k'_j (e_j \times e_i) = 0,$$

откуда получаем, что $(b + b') \times e_i = k_i e_i$. Следовательно, $k_i e_i \in \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$.

2. $i \in J'$. Тогда

$$b' \times e_i = \sum_{j\in J'} k'_j (e_j \times e_i) = k'_i e_i,$$

откуда получаем, что $(b + b') \times e_i = k_i e_i + k'_i e_i = (k_i + k'_i) e_i$. Следовательно, $(k_i + k'_i) e_i \in \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$. Пусть $k_i = p^{r_i} l_i$, $k'_i = p^{r'_i} l'_i$, $(l_i, p) = (l'_i, p) = 1$. Тогда из (25) и (27) следует, что $r_i < m \leqslant r'_i$. Значит,

$$(k_i + k'_i) e_i = (p^{r_i} l_i + p^{r'_i} l'_i) e_i = p^{r_i} (l_i + p^{r'_i - r_i} l'_i) e_i.$$

Так как $(l_i + p^{r'_i - r_i} l'_i, p) = (l_i, p) = 1$, то из $(k_i + k'_i) e_i \in \langle g\rangle_\times$ следует, что $p^{r_i} e_i \in \langle g\rangle_\times$. Поэтому $k_i e_i = p^{r_i} l_i e_i \in \langle g\rangle_\times$.

Таким образом, $k_i e_i \in \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ для всех $i \in J$. Следовательно,

$$b = \sum_{i\in J} k_i e_i \in \langle g\rangle_{\mathrm{AI}},$$

откуда получаем, что $\langle b\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$. По лемме 4 имеем

$$\langle b\rangle_{\mathrm{AI}} = G^{\mathrm{o}}\bigl(H(b)\bigr) = G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr).$$

Следовательно,

$$\langle g\rangle + G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr) \subseteq \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}. \tag{28}$$

Из (23) и (28) следует, что $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr)$. $\square$

Следствие 8. *Подгруппа A p-группы G является абсолютным идеалом группы G тогда и только тогда, когда $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(a)\big) \subseteq A$ для каждого элемента $a \in A$.*

Доказательство. Пусть A — абсолютный идеал группы G и a — произвольный элемент из A. Тогда $\langle a\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq A$. По лемме 7 имеем, что $\langle a\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle a\rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(a)\big)$. Следовательно, $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(a)\big) \subseteq A$.

Пусть теперь $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(a)\big) \subseteq A$ для каждого элемента $a \in A$. Тогда по лемме 7 имеем, что $\langle a\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle a\rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(a)\big) \subseteq A$. Следовательно, $\sum\limits_{a\in A}\langle a\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq A$. Так как обратное включение очевидно, то $A = \sum\limits_{a\in A}\langle a\rangle_{\mathrm{AI}}$. Из предложения 1 следует, что A — абсолютный идеал группы G. □

Лемма 9. *Пусть A — абсолютный идеал p-группы G. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}_0$ обозначим $\sigma_n = \min\limits_{a\in A}\{h^*(p^n a)\}$. Пусть $\sigma_m \in \mathbb{Z}$. Тогда существует элемент $a \in A$, такой что $\mathrm{h}(p^n a) = \sigma_n$ для каждого $n \leqslant m$.*

Доказательство. Индукцией по s докажем, что

$$\text{для каждого } s = 0, \dots, m \text{ найдётся } a \in A, \text{ такой что } \mathrm{h}(p^n a) = \sigma_n \text{ для любого } n \in [m-s, m]. \qquad (*)$$

При $s = 0$ утверждение $(*)$ означает, что найдётся элемент $a \in A$, такой что $\mathrm{h}(p^m a) = \sigma_m$. Это следует из определения σ_m.

Допустим, что существует элемент $a_1 \in A$, такой что $\mathrm{h}(p^n a_1) = \sigma_n$ для всех $n \in [m-s, m]$. Если $\mathrm{h}(p^{m-s-1}a_1) = \sigma_{m-s-1}$, то a_1 — искомый элемент. Если $\mathrm{h}(p^{m-s-1}a_1) \neq \sigma_{m-s-1}$, то $\mathrm{h}(p^{m-s-1}a_1) > \sigma_{m-s-1}$ в силу минимальности σ_{m-s-1}. По определению σ_{m-s-1} существует элемент $a_2 \in A$, такой что $\mathrm{h}(p^{m-s-1}a_2) = \sigma_{m-s-1} \in \mathbb{Z}$. По лемме 6 существует элемент $b \in B$, такой что $H(b) = \bar{H}(a_2)$. Тогда $\mathrm{h}(p^{m-s-1}b) = \mathrm{h}(p^{m-s-1}a_2) = \sigma_{m-s-1}$. Пусть $b = \sum\limits_{i\in J} b_i$ $(b_i \in \langle e_i\rangle)$. Тогда $\mathrm{h}(p^{m-s-1}b_{i_0}) = \mathrm{h}(p^{m-s-1}b) = \sigma_{m-s-1}$ для некоторого $i_0 \in J$. Так как $H(b_{i_0}) \geqslant H(b)$ и $\mathrm{o}(b_{i_0}) \leqslant \mathrm{o}(b) = p^{l(H(b))}$, то $b_{i_0} \in G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big) = G^{\mathrm{o}}(\bar{H}(a_2) \subseteq \langle a_2\rangle_{\mathrm{AI}}$ по лемме 7. Так как A — абсолютный идеал группы G и $a_2 \in A$, то $b_{i_0} \in A$. Если $p^{m-s}b_{i_0} \neq 0$, то

$$\mathrm{h}(p^{m-s}b_{i_0}) = \mathrm{h}(p^{m-s-1}b_{i_0}) + 1 = \sigma_{m-s-1} + 1 < \mathrm{h}(p^{m-s-1}a_1) + 1 \leqslant \mathrm{h}(p^{m-s}a_1) = \sigma_{m-s},$$

что противоречит минимальности σ_{m-s}. Следовательно, $p^{m-s}b_{i_0} = 0$. Рассмотрим $a = a_1 + b_{i_0}$. Тогда $\mathrm{h}(p^n a) = \mathrm{h}(p^n a_1) = \sigma_i$ для всех $n \in [m-s, m]$. С другой стороны, так как $\mathrm{h}(p^{m-s-1}b_{i_0}) = \sigma_{m-s-1} < \mathrm{h}(p^{m-s-1}a_1)$, то $\mathrm{h}(p^{m-s-1}a) = \mathrm{h}(p^{m-s-1}a_1) = \sigma_n$. Утверждение $(*)$ доказано. Из него следует утверждение леммы. □

Теорема 10. *Подгруппа A p-группы G является абсолютным идеалом группы G тогда и только тогда, когда найдётся строго возрастающая последовательность u, такая что $G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) \subseteq A \subseteq G(u)$.*

Доказательство. Пусть $G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) \subseteq A \subseteq G(u)$. Пусть $a \in A$. Тогда $H(a) \geqslant u$, откуда получаем, что $\bar{H}(a) \geqslant \bar{u}$, и поэтому из (2) следует, что $G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(a)\big) \subseteq \subseteq G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) \subseteq A$. По следствию 8 подгруппа A является абсолютным идеалом группы G.

Пусть теперь A — абсолютный идеал группы G. Так как множество порядковых чисел является вполне упорядоченным, то для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ существует $\sigma_n = \min\limits_{a \in A}\{h^*(p^n a)\}$. Пусть $u = (\sigma_0\ \sigma_1\ \ldots)$. Тогда, очевидно, $H(a) \geqslant u$ для любого элемента $a \in A$. Следовательно, $A \subseteq G(u)$.

Докажем, что $G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) \subseteq A$. Пусть $0 \neq g \in G^{\mathrm{o}}(\bar{u})$ и $\mathrm{o}(g) = p^{m+1}$. Тогда $p^{l(\bar{u})} \geqslant \geqslant \mathrm{o}(g) > p^m$, откуда получаем, что $p^{l(\bar{u})} > m$, т. е. $\sigma_m \in \mathbb{Z}$. По лемме 9 существует элемент $a \in A$, такой что $\mathrm{h}(p^n a) = \sigma_n \in \mathbb{Z}$ для каждого $n \leqslant m$. Поэтому $\bar{H}(a) \leqslant (\sigma_0\ \ldots\ \sigma_m\ \infty\ \ldots)$. Следовательно,

$$p^{l(\bar{H}(a))} \geqslant p^{m+1} = \mathrm{o}(g). \tag{29}$$

С другой стороны, так как $g \in G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) \subseteq G(u)$, то $\mathrm{h}(p^n g) \geqslant \sigma_n$ для всех $n \leqslant m$. Так как $\mathrm{o}(g) = p^{m+1}$, то $\mathrm{h}(p^n g) = \infty$ для всех $n > m$. Следовательно, $H(g) \geqslant (\sigma_0\ \ldots\ \sigma_m\ \infty\ \ldots)$, откуда получаем, что

$$H(g) \geqslant \bar{H}(a). \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует, что $g \in G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(a)\big) \subseteq \langle a \rangle_{\mathrm{AI}}$ по лемме 7. Так как A — абсолютный идеал группы G и $a \in A$, то $\langle a \rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq A$. Следовательно, $g \in A$. Так как элемента g произвольный, имеем, что $G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) \subseteq A$. □

Следствие 11. *Пусть A — абсолютный идеал p-группы G. Если $p^n A \nsubseteq A^1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то существует строго возрастающая последовательность u, такая что $A = G(u)$.*

Доказательство. По теореме 10 существует такая последовательность $u = = (\sigma_0\ \ldots\ \sigma_n\ \ldots)$, что $G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) \subseteq A \subseteq G(u)$. Если $\sigma_n \geqslant \omega$ для некоторого $n \in \mathbb{N}_0$, то $p^n G(\bar{u}) \subseteq G^1$, откуда получаем, что $p^n A \subseteq G^1$, что противоречит условию. Поэтому $\sigma_n \in \mathbb{Z}$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $G^{\mathrm{o}}(\bar{u}) = G(u)$, и значит, $A = G(u)$. □

Предложение 12. *Пусть G — p-примарная RAI-группа, A — абсолютный идеал группы G. Тогда фактор-группа G/A также является RAI-группой.*

Доказательство. Так как G — RAI-группа, то на ней существует кольцо $(G, \times_0)$, в котором любой идеал абсолютный. Так как подгруппа A — абсолютный идеал группы G, то A является идеалом кольца $(G, \times_0)$. Поэтому определено фактор-кольцо $(G/A, \times_0)$ кольца $(G, \times_0)$. Покажем, что любой идеал этого кольца является абсолютным.

Пусть $\bar{C}$ — произвольный идеал кольца $(G/A, \times_0)$, и пусть C — прообраз подгруппы $\bar{C}$ при естественном эпиморфизме $\pi\colon G \to G/A$. Тогда C — идеал кольца $(G, \times_0)$. Действительно, пусть c и g — произвольные элементы из C и G соответственно. Так как $\bar{C}$ — идеал кольца $(G/A, \times_0)$, то $(c + A) \times_0 (g + A) \in \bar{C}$. Тогда $(c \times_0 g) + A \in \bar{C}$, т. е. $c \times_0 g \in C$. Аналогично $g \times_0 c \in C$. Следовательно, C — идеал кольца $(G, \times_0)$, и поэтому C — абсолютный идеал группы G.

Пусть $(G/A, \bar{\times})$ — произвольное кольцо на группе G/A. Выберем произвольную систему элементов $\{a_{ij} \mid i, j \in I\}$, такую что a_{ij} $(i, j \in I)$ — некоторый представитель класса $(e_i + A) \mathbin{\bar{\times}} (e_j + A)$. Определим умножение $\times$ на группе G, положив $e_i \times e_j = a_{ij}$ для всех $i, j \in I$. Так как A — абсолютный идеал группы G, то A — идеал кольца $(G, \times)$, и поэтому определено фактор-кольцо $(G/A, \times)$. Нетрудно убедиться, что умножение на группе G/A полностью определяется произведениями смежных классов, содержащих базисные элементы. Поэтому фактор-кольцо $(G/A, \times)$ совпадает с кольцом $(G/A, \bar{\times})$. Так как по доказанному C — абсолютный идеал группы G, то C — идеал кольца $(G, \times)$. Следовательно, $\bar{C}$ — идеал кольца $(G/A, \times) = (G/A, \bar{\times})$. Так как умножение $\bar{\times}$ на G/A произвольно, идеал $\bar{C}$ является абсолютным идеалом группы G/A. Значит, в кольце $(G/A, \times_0)$ любой идеал является абсолютным, и значит, G/A является RAI-группой. $\square$

Предложение 13. *Прямая сумма конечных циклических групп является RAI-группой.*

Доказательство. По предложению 3 утверждение достаточно доказать для прямой суммы циклических p-групп. Пусть $G = \bigoplus\limits_{i \in I} \langle e_i \rangle$ и $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i}$ для каждого $i \in I$. Определим умножение $\times$ на группе G, задав произведения базисных элементов следующим образом:

$$e_i \times e_j = \begin{cases} 0, & \text{если } i = j, \\ e_j, & \text{если } i \neq j \text{ и } m_i \geqslant m_j, \\ p^{m_i - m_j} e_i, & \text{если } m_i < m_j. \end{cases}$$

Пусть $g = k_1 e_{i_1} + \ldots + k_n e_{i_n}$. Докажем индукцией по n, что идеал $\langle g \rangle_\times$ — абсолютный идеал группы G.

Пусть $n = 1$. Тогда $g = k_1 e_{i_1}$. Имеем

$$\begin{aligned} G[p^{m_{i_1}}] &= \Bigl(\bigoplus_{i \in I} \langle e_i \rangle\Bigr)[p^{m_{i_1}}] = \\ &= \langle e_{i_1} \rangle \oplus \Bigl(\bigoplus_{m_i \leqslant m_{i_1},\ i \neq i_1} \langle e_i \rangle\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{m_i > m_{i_1}} \langle p^{m_i - m_{i_1}} e_i \rangle\Bigr) = \\ &= \langle e_{i_1} \rangle \oplus \Bigl(\bigoplus_{i \in I} e_{i_1} \times e_i\Bigr) \subseteq \langle e_{i_1} \rangle_\times. \end{aligned}$$

Следовательно, $k_1 G[p^{m_{i_1}}] \subseteq \langle k_1 e_{i_1} \rangle_\times = \langle g \rangle_\times$. С другой стороны, так как подгруппа $k_1 G[p^{m_{i_1}}]$ является идеалом кольца $(G, \times)$ и $g = k_1 e_{i_1} \in k_1 G[p^{m_{i_1}}]$, то $\langle g \rangle_\times \subseteq k_1 G[p^{m_{i_1}}]$. Следовательно, $\langle g \rangle_\times = k_1 G[p^{m_{i_1}}]$ и поэтому $\langle g \rangle_\times$ является абсолютным идеалом группы G.

Пусть теперь утверждение выполняется для всех натуральных чисел, не превосходящих n, и пусть $g = k_1 e_{i_1} + \ldots + k_n e_{i_n} + k_{n+1} e_{i_{n+1}}$. Не теряя общности, можно считать, что $p^{m_{i_{n+1}}} = \max\limits_{1\leqslant s\leqslant n+1}\{p^{m_{i_s}}\}$. Тогда

$$e_{i_{n+1}} \times g = \sum_{s=1}^{n+1} e_{i_{n+1}} \times k_s e_{i_s} = \sum_{s=1}^{n+1} k_s(e_{i_{n+1}} \times e_{i_s}) = \sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s}.$$

Следовательно,

$$\sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} \in \langle g\rangle_\times$$

и

$$k_{n+1}e_{i_{n+1}} = g - \sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} \in \langle g\rangle_\times.$$

Тогда

$$\left\langle \sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} \right\rangle_\times + \langle k_{n+1}e_{i_{n+1}}\rangle_\times \subseteq \langle g\rangle_\times.$$

Так как обратное включение очевидно, то

$$\langle g\rangle_\times = \left\langle \sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} \right\rangle_\times + \langle k_{n+1}e_{i_{n+1}}\rangle_\times.$$

По предположению индукции $\left\langle \sum\limits_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} \right\rangle_\times$ и $\langle k_{n+1}e_{i_{n+1}}\rangle_\times$ — абсолютные идеалы группы G. Следовательно, $\langle g\rangle_\times$ — абсолютный идеал группы G. Так как элемент g произвольный, группа G является RAI-группой по предложению 2. □

Рассмотрим те p-группы G, базисные подгруппы B которых являются ограниченными группами. Тогда, так как подгруппа B сервантна в группе G, подгруппа B выделяется в ней прямым слагаемым $G = B \oplus D$ [2, теорема 27.5], где D — делимая часть группы G. Заметим, что в группе с ограниченной базисной подгруппой индикатор любого элемента g содержит только целые числа и символы ∞, откуда получаем, что $H(g) = \bar{H}(g)$ для каждого $g \in G$.

Из [3] известно, что

$$\langle G \times G\rangle = \langle B \times B\rangle = \langle e_i \times e_j \mid i, j \in I\rangle. \tag{31}$$

Лемма 14. *Пусть G — p-группа, p^m — максимальный порядок элементов в B и $D \neq 0$. Пусть $(G, \times)$ — кольцо на группе G, в котором любой идеал является абсолютным. Тогда $\langle G \times G\rangle = G[p^m]$.*

Доказательство. Так как из (31) следует, что $\langle G \times G\rangle = \langle B \times B\rangle$, и по условию $p^m b = 0$ для любого элемента $b \in B$, то

$$\langle G \times G\rangle \subseteq G[p^m]. \tag{32}$$

Существует базисный элемент e_i группы G, такой что $\mathrm{o}(e_i) = p^m$. По лемме 5 имеем

$$\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} = G[p^m]. \tag{33}$$

Так как по условию делимая часть D группы G ненулевая, то существует элемент $d \in D$, такой что $\mathrm{o}(d) = p^{2m}$. Тогда

$$G^{\mathrm{o}}\big(H(e_i)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(H(e_i + d)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(e_i + d)\big) \subseteq \langle e_i + d\rangle_{\mathrm{AI}}$$

согласно лемме 5. Так как $e_i \in G^{\mathrm{o}}\big(H(e_i)\big)$, то

$$e_i \in \langle e_i + d\rangle_{\mathrm{AI}}. \tag{34}$$

Рассмотрим подгруппу $A = \langle e_i + d, G \times G\rangle$. Легко убедиться, что подгруппа A — идеал кольца $(G, \times)$. Следовательно, подгруппа A является абсолютным идеалом группы G. Поэтому $\langle e_i + d\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq A$, так как $e_i + d \in A$. Из (34) получаем, что $e_i \in A = \langle e_i + d, G \times G\rangle$. Значит, существуют целое число k и элемент $a \in \langle G \times G\rangle$, такие что

$$e_i = k(e_i + d) + a. \tag{35}$$

Тогда $kd = (1-k)e_i - a$. Так как $\mathrm{o}(e_i) = p^m$ и $\mathrm{o}(a) \leqslant p^m$ (см. (32)), то $p^m kd = 0$. Так как $\mathrm{o}(d) = p^{2m}$ в силу выбора элемента d, то $p^{2m} \mid p^m k$. Следовательно, $p^m \mid k$, и поэтому $ke_i = 0$. Тогда из (35) следует, что $e_i = kd + a$. Поэтому $e_i - kd = a \in \langle G \times G\rangle$. Более того, легко убедиться, что $\langle G \times G\rangle$ — идеал кольца $(G, \times)$, поэтому $\langle G \times G\rangle$ является абсолютным идеалом группы G. Следовательно, $\langle e_i - kd\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle G \times G\rangle$, и поэтому

$$G^{\mathrm{o}}\big(H(e_i - kd)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(e_i - kd)\big) \subseteq \langle G \times G\rangle$$

по лемме 7. Так как $d \in D$, то $H(e_i - kd) = H(e_i)$, и поэтому $G^{\mathrm{o}}\big(H(e_i - kd)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(H(e_i)\big) \ni e_i$. Следовательно, $e_i \in \langle G \times G\rangle$. Тогда $\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle G \times G\rangle$. Из (33) следует, что

$$G[p^m] = \langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle G \times G\rangle. \tag{36}$$

Таким образом, из (32) и (36) выводим, что $G[p^m] = \langle G \times G\rangle$. □

Лемма 15. *Пусть G — p-группа с ненулевой делимой частью D, p^m — максимальный порядок элементов в B и $B_m = \bigoplus\limits_{\mathrm{o}(e_i)=p^m} \langle e_i\rangle$. Пусть на группе $A = B_m \oplus D$ существует кольцо $(A, \times_A)$, в котором*

1) *любой идеал является абсолютным идеалом группы A;*
2) *$e_i \times_A e_j$ либо равно e_t (зависящему от i и j), либо принадлежит D для любых базисных элементов $e_i, e_j \in B_m$;*
3) *для каждого $e_i \in B_m$ существует $e_j \in B_m$, такой что $e_j \times_A e_i \in D$.*

Тогда группа G является RAI-группой.

Доказательство. Для каждого $i \in I$ обозначим $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i}$. Продолжим умножение $\times_A$ на всю группу G, положив

$$e_i \times e_j = \begin{cases} e_i \times_A e_j, & \text{если } m_i = m_j = m,\\ 0, & \text{если } i = j,\ m_i = m_j < m,\\ e_j, & \text{если } i \neq j,\ m_i = m_j < m,\\ e_j, & \text{если } m_i > m_j,\\ p^{m_j - m_i} e_j, & \text{если } m_i < m_j. \end{cases}$$

Сначала докажем, что $\langle e_i\rangle_\times$ — абсолютный идеал группы G для каждого $e_i \in B_m$. По лемме 5 имеем

$$\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} = G[p^m] = D[p^m] \oplus B = D[p^m] \oplus B_m \oplus \Big(\bigoplus_{m_j<m} \langle e_j\rangle\Big) = A[p^m] \oplus \Big(\bigoplus_{m_j<m} \langle e_j\rangle\Big).$$

Так как любой идеал кольца $(A, \times_A)$ является абсолютным и $e_i \in B_m \subseteq A$, то по предложению 2 подгруппа $\langle e_i\rangle_{\times_A}$ совпадает с абсолютным идеалом группы A, порождённым элементом e_i, который равен $A[p^m]$ по лемме 5, т. е.

$$A[p^m] = \langle e_i\rangle_{\times_A} \subseteq \langle e_i\rangle_\times, \tag{37}$$

так как $\times$ — продолжение умножения $\times_A$. Для каждого базисного элемента e_j, такого что $\mathrm{o}(e_j) = p^{m_j} < p^m = \mathrm{o}(e_i)$, имеем, что $e_j = e_i \times e_j \in \langle e_i\rangle_\times$. Поэтому

$$\bigoplus_{m_j<m} \langle e_j\rangle \subseteq \langle e_i\rangle_\times. \tag{38}$$

Следовательно, по (37) и (38) имеем, что

$$G[p^m] = A[p^m] \oplus \Big(\bigoplus_{m_j<m} \langle e_i\rangle\Big) \subseteq \langle e_i\rangle_\times.$$

С другой стороны, $G[p^m]$ — абсолютный идеал группы G, содержащий e_i, поэтому $\langle e_i\rangle_\times \subseteq G[p^m]$. Тогда

$$\langle e_i\rangle_\times = G[p^m], \quad \text{если} \quad \mathrm{o}(e_i) = p^m. \tag{39}$$

Пусть теперь $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i} < p^m$. По лемме 5

$$\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} = G[p^{m_i}] = B[p^{m_i}] \oplus D[p^{m_i}].$$

Имеем

$$B[p^{m_i}] = \langle e_i\rangle \oplus \Big(\bigoplus_{m_j \leqslant m_i,\ j\neq i} \langle e_j\rangle\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{m_j>m_i} \langle p^{m_j-m_i} e_j\rangle\Big) =$$
$$= \langle e_i\rangle \oplus \Big(\bigoplus_{m_j \leqslant m_i,\ j\neq i} \langle e_i \times e_j\rangle\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{m_j>m_i} \langle e_i \times e_j\rangle\Big).$$

Следовательно,

$$B[p^{m_i}] \subseteq \langle e_i\rangle_\times. \tag{40}$$

Докажем, что $D[p^{m_i}] \subseteq \langle e_i\rangle_\times$. Пусть e_{i_0} — такой базисный элемент, что $\mathrm{o}(e_{i_0}) = p^m$. Тогда $p^{m-m_i}e_{i_0} \in B[p^{m_i}] \subseteq \langle e_i\rangle_\times$ по (40), откуда получаем, что $\langle p^{m-m_i}e_{i_0}\rangle_\times \subseteq \langle e_i\rangle_\times$. Так как $\mathrm{o}(e_{i_0}) = p^m$, то из (39) следует, что $p^{m-m_i}(G[p^m]) = \langle p^{m-m_i}e_{i_0}\rangle_\times$, и поэтому

$$p^{m-m_i}(G[p^m]) \subseteq \langle e_i\rangle_\times. \tag{41}$$

Пусть $d \in D[p^{m_i}]$. Так как D — делимая группа, то существует элемент $d_1 \in D$, такой что $d = p^{m-m_i}d_1$. Тогда $p^{m_i}d = p^m d_1 = 0$, откуда получаем, что

$d_1 \in G[p^m]$. Следовательно, $d \in p^{m-m_i}(G[p^m])$. Так как элемент d произвольный, $D[p^{m_i}] \subseteq p^{m-m_i}(G[p^m])$. Из этого и (41) следует, что

$$D[p^{m_i}] \subseteq \langle e_i \rangle_\times. \tag{42}$$

Из (40) и (42) получаем, что $G[p^{m_i}] = B[p^{m_i}] \oplus D[p^{m_i}] \subseteq \langle e_i \rangle_\times$. Обратное включение вытекает из того, что подгруппа $G[p^{m_i}]$ — идеал кольца $(G, \times)$ и $e_i \in G[p^{m_i}]$. Следовательно, $\langle e_i \rangle_\times = G[p^{m_i}]$. Таким образом, $\langle e_i \rangle_\times$ — абсолютный идеал группы G для любого $i \in I$.

Пусть $i \in I$, $k_i \in \mathbb{Z}$. Имеем $\langle k_i e_i \rangle_\times = k_i \langle e_i \rangle_\times$, поэтому по доказанному $\langle k_i e_i \rangle$ — абсолютный идеал группы G. Следовательно, $\langle k_i e_i \rangle_\times \supseteq \langle k_i e_i \rangle_{\mathrm{AI}} = G^{\mathrm{o}}\big(H(k_i e_i)\big)$ по лемме 5. Так как обратное включение очевидно, то

$$\langle k_i e_i \rangle_\times = G^{\mathrm{o}}\big(H(k_i e_i)\big) \tag{43}$$

для каждого $i \in I$ и $k_i \in \mathbb{Z}$.

Пусть g — произвольный элемент группы G. Тогда $g = k_1 e_{i_1} + \ldots + k_n e_{i_n} + d$ для некоторых $i_1, \ldots, i_n \in I$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$, $d \in D$. Докажем индукцией по n, что $k_s e_{i_s} \in \langle g \rangle_\times$ для каждого $s = 1, \ldots, n$.

Пусть $n = 1$. Тогда $g = k_1 e_{i_1} + d$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in D$). Если $\mathrm{o}(e_{i_1}) = p^m$, то $g \in A = B_m \oplus D$. Тогда $\langle g \rangle_{\times_A}$ — абсолютный идеал группы A и поэтому содержит абсолютный идеал группы A, порождённый элементом g, который равен $\langle g \rangle + A^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$ по лемме 7. Следовательно,

$$A^{\mathrm{o}}\big(H(g)\big) = A^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big) \subseteq \langle g \rangle_{\times_A} \subseteq \langle g \rangle_\times,$$

так как $\times$ — продолжение умножения $\times_A$ на группе G. Так как $d \in D$, то $H(g) = H(g - d) = H(k_1 e_{i_1})$, где индикаторы рассматриваются в группе A. Поэтому $k_1 e_{i_1} \in A^{\mathrm{o}}\big(H(k_1 e_{i_1})\big) = A^{\mathrm{o}}\big(H(g)\big)$. Следовательно, $k_{i_1} e_{i_1} \in \langle g \rangle_\times$. Если $\mathrm{o}(e_{i_1}) < p^m$, то возьмём такой базисный элемент e_i группы G, что $\mathrm{o}(e_i) = p^m$. Тогда

$$e_i \times g = e_i \times (k_1 e_{i_1} + d) = k_1 (e_i \times e_{i_1}) = k_1 e_{i_1}.$$

Следовательно, $k_1 e_{i_1} \in \langle g \rangle_\times$.

Допустим, что утверждение верно для каждого натурального числа, меньшего n, и пусть $g = k_1 e_{i_1} + \ldots + k_n e_{i_n} + d$ ($k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$, $d \in D$) и $\mathrm{o}(e_{i_1}) \leqslant \mathrm{o}(e_{i_2}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{o}(e_{i_n})$. Для элементов e_{i_s} ($s = 1, \ldots, n$) возможны три случая.

1. $\mathrm{o}(e_{i_s}) < p^m$ для всех $s = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\langle g \rangle_\times \ni g \times e_{i_n} = \sum_{s=1}^{n} k_s (e_{i_s} \times e_{i_n}) + (d \times e_{i_n}) = \sum_{s=1}^{n-1} k_s e_{i_s}.$$

По предположению индукции $k_s e_{i_s} \in \langle g \times e_{i_n} \rangle_\times \subseteq \langle g \rangle_\times$ для каждого $s = 1, \ldots, n-1$. Кроме того,

$$k_n e_{i_n} + d = g - \sum_{s=1}^{n-1} k_s e_{i_s} \in \langle g \rangle_\times.$$

По предположению индукции $k_n e_{i_n} \in \langle k_n e_{i_n} + d \rangle_\times \subseteq \langle g \rangle_\times$.

2. $\mathrm{o}(e_{i_s}) = p^m$ для всех $s = 1, \ldots, n$, т. е. $g \in A$. Тогда по условию $\langle g\rangle_{\times A}$ является абсолютным идеалом группы A и поэтому содержит абсолютный идеал группы A, порождённый элементом g. По лемме 7 этот идеал равен $\langle g\rangle + A^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Следовательно,

$$A^{\mathrm{o}}\big(H(g)\big) = A^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big) \subseteq \langle g\rangle_{\times A}. \tag{44}$$

Так как $d \in D$, то $H(g) = H(g-d) = H(k_1e_{i_1} + \ldots + k_ne_{i_n})$. Отсюда следует, что

$$A^{\mathrm{o}}\big(H(g)\big) = A^{\mathrm{o}}\big(H(k_1e_{i_1} + \ldots + k_ne_{i_n})\big) = \sum_{s=1}^{n} A^{\mathrm{o}}\big(H(k_se_{i_s})\big)$$

по лемме 4. Следовательно, в силу (44)

$$k_se_{i_s} \in A^{\mathrm{o}}\big(H(k_se_{i_s})\big) \subseteq A^{\mathrm{o}}\big(H(g)\big) \subseteq \langle g\rangle_{\times A} \subseteq \langle g\rangle_{\times}$$

для каждого $s = 1, \ldots, n$.

3. $\mathrm{o}(e_{i_1}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{o}(e_{i_r}) < p^m = \mathrm{o}(e_{i_{r+1}}) = \ldots = \mathrm{o}(e_{i_n})$ для некоторого числа r, $1 \leqslant r < n$. По условию существует базисный элемент $e_j \in B_m$, такой что $e_j \times e_{i_n} = d \in D$. Если $s \leqslant r$, то $e_j \times e_{i_s} = e_{i_s}$. Если $r < s < n$, то по условию элемент $e_j \times e_{i_s} = a_{i_s}$ является базисным элементом в B_m или принадлежит делимой части D. Тогда

$$g_2 = e_j \times g = \sum_{s=1}^{r} k_se_{i_s} + \sum_{s=r+1}^{n-1} k_sa_{i_s} + d \in \langle g\rangle_{\times}. \tag{45}$$

Ясно, что в разложении (45) количество слагаемых, принадлежащих группе B, не превосходит $n-1$. По предположению индукции каждое из этих слагаемых принадлежит $\langle g_2\rangle_{\times}$ и поэтому принадлежит $\langle g\rangle_{\times}$. В частности, $k_1e_{i_1}, \ldots, k_re_{i_r} \in \langle g\rangle_{\times}$. Следовательно,

$$k_{r+1}e_{i_{r+1}} + \ldots + k_ne_{i_n} + d = g - \sum_{s=1}^{r} k_se_{i_s} \in \langle g\rangle_{\times}.$$

По предположению индукции

$$k_{r+1}e_{i_{r+1}}, \ldots, k_ne_{i_n} \in \langle k_{r+1}e_{i_{r+1}} + \ldots + k_ne_{i_n} + d\rangle_{\times} \subseteq \langle g\rangle_{\times}.$$

Таким образом, если $g = \sum\limits_{s=1}^{n} k_se_{i_s} + d$, то $k_se_{i_s} \in \langle g\rangle_{\times}$ для каждого $s = 1, \ldots, n$. Следовательно, по (43) имеем

$$\sum_{s=1}^{n} G^{\mathrm{o}}\big(H(k_se_{i_s})\big) = \sum_{s=1}^{n} \langle k_se_{i_s}\rangle_{\times} \subseteq \langle g\rangle_{\times}.$$

По лемме 4 имеем

$$\sum_{s=1}^{n} G^{\mathrm{o}}\big(H(k_se_{i_s})\big) = G^{\mathrm{o}}\bigg(H\bigg(\sum_{s=1}^{n} k_se_{i_s}\bigg)\bigg) = \\ = G^{\mathrm{o}}\big(H(g-d)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(H(g)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big),$$

так как $d \in D$. Следовательно, $G^{\circ}\big(\bar{H}(g)\big) \subseteq \langle g\rangle_{\times}$. По лемме 7 имеем, что $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + G^{\circ}\big(\bar{H}(g)\big)$. Поэтому $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g\rangle_{\times}$. Так как обратное включение очевидно, то $\langle g\rangle_{\times} = \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ для каждого $g \in G$. Следовательно, группа G является RAI-группой по предложению 2. □

Теорема 16. *Пусть G — p-группа, D — делимая часть группы G. Пусть p^m — максимальный порядок элементов в B и $B_m = \bigoplus\limits_{\mathrm{o}(e_i)=p^m} \langle e_i\rangle$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) G — *RAI-группа*;
2) $\mathrm{r}(D) \leqslant \mathrm{r}(B_m)(\mathrm{r}(B_m)-1)$.

Доказательство. Пусть G — RAI-группа и $\mathrm{r}(B_m) = n$. Так как $G[p^{m-1}]$ — абсолютный идеал группы G, то по лемме 12 фактор-группа $\bar{G} = G/G[p^{m-1}]$ является AI-группой. Тогда существует кольцо $(\bar{G}, \times)$ на группе $\bar{G}$, в котором любой идеал является абсолютным. Так как $G = B \oplus D$, то $\bar{G} \cong \bar{B} \oplus \bar{D}$, где $\bar{B} \cong B/B[p^{m-1}]$ и $\bar{D} \cong D/D[p^{m-1}]$. Легко убедиться, что $\bar{B}$ — прямая сумма циклических групп порядка p, $\mathrm{r}(\bar{B}) = \mathrm{r}(B_m) = n$ и $\mathrm{r}(\bar{D}) = \mathrm{r}(D)$. Поэтому

$$\mathrm{r}(\bar{G}[p]) = \mathrm{r}(\bar{G}) = n + \mathrm{r}(D). \tag{46}$$

По лемме 14 имеем, что $\bar{G}[p] = \langle \bar{G} \times \bar{G}\rangle = \langle \bar{B} \times \bar{B}\rangle$. Следовательно,

$$\mathrm{r}(\bar{G}[p]) \leqslant \big(\mathrm{r}(\bar{B})\big)^2 = n^2. \tag{47}$$

Из (46) и (47) вытекает, что $n + \mathrm{r}(D) \leqslant n^2$. Поэтому

$$\mathrm{r}(D) \leqslant n(n-1) = \mathrm{r}(B_m)(\mathrm{r}(B_m)-1).$$

Пусть теперь

$$\mathrm{r}(D) \leqslant \mathrm{r}(B_m)(\mathrm{r}(B_m)-1) = n(n-1).$$

Если $n = 1$, то $\mathrm{r}(D) = 0$. Тогда группа G — прямая сумма циклических p-групп, и по лемме 13 группа G является RAI-группой.

Пусть $n \geqslant 2$. Так как D — делимая p-группа, то $D \cong \bigoplus\limits_J \mathbb{Z}(p^{\infty})$ для некоторого множества индексов J [2, теорема 23.1]. Поэтому $D[p^m] = \bigoplus\limits_{j\in J} \langle d_j\rangle$ для некоторых элементов $d_j \in D$, $\mathrm{o}(d_j) = p^m$ $(j \in J)$. По условию $|J| = \mathrm{r}(D) \leqslant n(n-1)$. Пусть $B_m = \langle e_{i_1}\rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_{i_n}\rangle$. Тогда мощность множества $\{(e_{i_s}, e_{i_t}) \mid s,t = 1,\ldots,n,\ s \neq t\}$ равна $n(n-1)$. Поэтому существует сюръективное отображение

$$f\colon \{(e_{i_s}, e_{i_t}) \mid s,t = 1,\ldots,n,\ s \neq t\} \to \{d_j \mid j \in J\}.$$

Рассмотрим подстановку n-й степени, представленную в виде цикла $\tau = (i_1\ i_2\ \ldots\ i_n)$. Определим умножение $\times_A$ на группе $A = B_m \oplus D$, задав произведения базисных элементов следующим образом:

$$e_{i_s} \times_A e_{i_t} = \begin{cases} e_{\tau(i_t)}, & \text{если } s = t, \\ f(e_{i_s}, e_{i_t}), & \text{если } s \neq t. \end{cases}$$

Сначала докажем, что $\langle e_{i_s}\rangle_{\times_A} = A[p^m]$ — абсолютный идеал группы A для каждого $s = 1, \ldots, n$. Не теряя общности, можно считать, что $s = 1$. Имеем

$$A[p^m] = B_m \oplus D[p^m] = \left(\bigoplus_{s=1}^{n} \langle e_{i_s}\rangle\right) \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} \langle d_j\rangle\right). \tag{48}$$

Так как $e_{i_s} = e_{i_{s-1}} \times_A \big(\ldots \times_A \big(e_{i_2} \times_A (e_{i_1} \times_A e_{i_1})\big)\ldots\big)$ для любых $s = 1, \ldots, n$, то

$$e_{i_s} \in \langle e_{i_1}\rangle_{\times_A} \ \text{ для любых } \ s = 1, \ldots, n. \tag{49}$$

Пусть $j \in J$. Так как отображение f сюръективно, то существуют $s, t \in 1, \ldots, n$, $s \neq t$, такие что $f(e_{i_s}, e_{i_t}) = d_j$. Следовательно, $e_{i_s} \times_A e_{i_t} = f(e_{i_s}, e_{i_t}) = d_j$. Из (49) выводим, что $e_{i_s}, e_{i_t} \in \langle e_{i_1}\rangle_{\times_A}$, поэтому $d_j \in \langle e_{i_1}\rangle_{\times_A}$. Таким образом,

$$d_j \in \langle e_{i_1}\rangle_{\times_A} \ \text{ для каждого } \ j \in J. \tag{50}$$

Из (48)—(50) следует, что $A[p^m] \subseteq \langle e_{i_1}\rangle_{\times_A}$. Обратно, так как $A[p^m]$ — идеал кольца $(A, \times_A)$ и $e_i \in A[p^m]$, то $\langle e_{i_1}\rangle_{\times_A} \subseteq A[p^m]$. Следовательно, $\langle e_{i_1}\rangle_{\times_A} = A[p^m]$ — абсолютный идеал группы A. Таким образом, $\langle e_{i_s}\rangle_{\times_A}$ — абсолютный идеал группы A для каждого $s = 1, \ldots, n$.

Пусть теперь k — произвольное целое число и $s = 1, \ldots, n$. Тогда по доказанному $\langle ke_{i_s}\rangle_{\times_A} = k\langle e_{i_s}\rangle_{\times_A}$ — абсолютный идеал группы A. Следовательно, $\langle ke_{i_s}\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle ke_{i_s}\rangle_{\times_A}$. Так как обратное включение очевидно, то

$$\langle ke_{i_s}\rangle_{\times_A} = \langle ke_{i_s}\rangle_{\mathrm{AI}} = G^{\mathrm{o}}\big(H(ke_{i_s})\big) \tag{51}$$

по лемме 5.

Пусть $g \in A$, $g = k_1e_{i_1} + \ldots + k_ne_{i_n} + d$ для некоторых $i_s \in I$, $k_s \in \mathbb{Z}$ $(s = 1, \ldots, n)$ и некоторого элемента $d \in D$. Имеем

$$e_{i_1} \times_A \sum_{s=2}^{n} k_s e_{i_s} = d_1 \in D.$$

Тогда

$$e_{\tau(i_1)} \times (e_{i_1} \times g) = e_{\tau(i_1)} \times \left(e_{i_1} \times \left(\sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} + d\right)\right) =$$

$$= e_{\tau(i_1)} \times \left((k_1e_{i_1} \times e_{i_1}) + \sum_{s=2}^{n} k_s(e_{i_1} \times e_{i_s})\right) = e_{\tau(i_1)} \times (k_1e_{\tau(i_1)} + d_1) = k_1e_{\tau^2(i_1)}.$$

Следовательно, $k_1e_{\tau^2(i_1)} \in \langle g\rangle_{\times_A}$. Поэтому по (51) имеем

$$G^{\mathrm{o}}\big(H(k_1e_{\tau^2(i_1)})\big) = \langle k_1e_{\tau^2(i_1)}\rangle_{\times_A} \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}.$$

Так как $e_{\tau^2(i_1)}$ и e_{i_1} — базисные элементы одного и того же порядка p^m, то $H(k_1e_{\tau^2(i_1)}) = H(k_1e_{i_1})$, и поэтому

$$G^{\mathrm{o}}\big(H(k_1e_{i_1})\big) = G^{\mathrm{o}}\big(H(k_1e_{\tau^2(i_1)})\big) \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}.$$

Аналогично $G^{\mathrm{o}}\bigl(H(k_s e_{i_s})\bigr) \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}$ для каждого $s = 2, \ldots, n$. Следовательно, так как $d \in D$, то

$$G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr) = G^{\mathrm{o}}\bigl(H(g)\bigr) = G^{\mathrm{o}}\bigl(H(g-d)\bigr) = \\ = G^{\mathrm{o}}\biggl(H\biggl(\sum_{s=1}^{l} k_s e_{i_s}\biggr)\biggr) = \sum_{s=1}^{n} G^{\mathrm{o}}\bigl(H(k_s e_{i_s})\bigr) \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}.$$

По лемме 7 имеем $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr)$. Поэтому $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}$.

Так как обратное включение очевидно, то $\langle g\rangle_{\times_A} = \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ — абсолютный идеал группы A. Следовательно, группа $A = B_m \oplus D$ является RAI-группой по предложению 2. Таким образом, кольцо $(A, \times_A)$ удовлетворяет условию 1) леммы 15. Второе и третье условия вытекают непосредственно из построения умножения $\times_A$. Поэтому по лемме 15 группа G является RAI-группой. □

Теорема 17. *Пусть G — p-группа. Пусть p^m — максимальный порядок элементов в B, $B_m = \bigoplus\limits_{\mathrm{o}(e_i)=p^m} \langle e_i\rangle$ и $\mathrm{r}(B_m) \geqslant \aleph_0$. Тогда следующие утверждение равносильны*:

1) *G — RAI-группа*;
2) $\mathrm{r}(D) \leqslant \mathrm{r}(B_m)$.

Доказательство. Пусть G — RAI-группа. Так как $G[p^{m-1}]$ — абсолютный идеал группы G, то по лемме 12 фактор-группа $\bar{G} = G/G[p^{m-1}]$ является RAI-группой. Тогда существует кольцо $(\bar{G}, \times)$ на группе $\bar{G}$, в котором любой идеал является абсолютным. Имеем, что $\bar{G} \cong \bar{B} \oplus \bar{D}$, где $\bar{B} \cong B/B[p^{m-1}]$. Нетрудно убедиться, что $\bar{B}$ — прямая сумма циклических групп порядка p и $\mathrm{r}(\bar{B}) = \mathrm{r}(B_m)$, $\mathrm{r}(\bar{D}) = \mathrm{r}(D)$. Поэтому

$$\mathrm{r}(\bar{G}[p]) = \mathrm{r}(\bar{G}) = \mathrm{r}(B_m) + \mathrm{r}(D). \tag{52}$$

По лемме 14 имеем $\bar{G}[p] = \langle \bar{G} \times \bar{G}\rangle = \langle \bar{B} \times \bar{B}\rangle$. Следовательно,

$$\mathrm{r}(\bar{G}[p]) \leqslant \bigl(\mathrm{r}(\bar{B})\bigr)^2 = \bigl(\mathrm{r}(B_m)\bigr)^2 = \mathrm{r}(B_m), \tag{53}$$

так как $\mathrm{r}(B_m) \geqslant \aleph_0$. Из (52) и (53) следует, что $\mathrm{r}(D) \leqslant \mathrm{r}(B_m)$.

Пусть теперь $\mathrm{r}(D) \leqslant \mathrm{r}(B_m)$. Так как D — делимая p-группа, то $D \cong \bigoplus\limits_{J} \mathbb{Z}(p^\infty)$. Поэтому $D[p^m] = \bigoplus\limits_{j\in J} \langle d_j\rangle$ для некоторых элементов $d_j \in D$, $\mathrm{o}(d_j) = p^m$ $(j \in J)$. Пусть $I_m = \{i \in I \mid \mathrm{o}(e_i) = p^m\}$. Тогда $B_m = \bigoplus\limits_{i\in I_m} \langle e_i\rangle$. Так как по условию $|J| = \mathrm{r}(D) \leqslant \mathrm{r}(B_m) = |I_m|$ и B_m — бесконечная группа, то $|J \cup I_m| = |I_m| \geqslant \aleph_0$. Пусть i_0 — некоторый фиксированный индекс из I_m. Тогда существует биективное отображение

$$f\colon \bigl\{(e_t \mid t \in I_m \setminus \{i_0\}\bigr\} \to \{d_j \mid j \in J\} \cup \bigl\{(e_t \mid t \in I_m\bigr\}.$$

Определим умножение $\times_A$ на группе $A = B_m \oplus D$, задав произведения базисных элементов следующим образом:

$$e_i \times_A e_t = \begin{cases} e_{i_0}, & \text{если } t = i_0, \\ f(e_t), & \text{если } i = i_0,\ t \neq i_0, \\ 0, & \text{если } t = i \neq i_0, \\ e_t, & \text{если } t \neq i \neq i_0. \end{cases}$$

Сначала докажем, что $\langle e_i\rangle_{\times_A} = A[p^m]$ — абсолютный идеал группы A для всех $i \in I_m$. Пусть $i \in I_m$. Тогда $e_i \times_A e_{i_0} = e_{i_0}$, и поэтому $\langle e_{i_0}\rangle_{\times_A} \subseteq \langle e_i\rangle_{\times_A}$. Ясно, что при умножении элемента e_{i_0} справа на все базисные элементы e_t, $t \in I_m$, получаются все порождающие группы $A[p^m]$ в разложении

$$A[p^m] = B_m \oplus D[p^m] = \Big(\bigoplus_{t\in I_m}\langle e_t\rangle\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j\in J}\langle d_j\rangle\Big).$$

Следовательно, $A[p^m] \subseteq \langle e_{i_0}\rangle_{\times_A} \subseteq \langle e_i\rangle_{\times_A}$. Обратно, так как $A[p^m]$ — идеал кольца $(A, \times_A)$ и $e_i \in A[p^m]$, то $\langle e_i\rangle_{\times_A} \subseteq A[p^m]$. Следовательно, $\langle e_i\rangle_{\times_A} = A[p^m]$, и значит, $\langle e_i\rangle_{\times_A}$ — абсолютный идеал группы A.

Пусть теперь k — произвольное целое число. Тогда $\langle ke_i\rangle_{\times_A} = k\langle e_i\rangle_{\times_A}$ — абсолютный идеал группы A. Следовательно, $\langle ke_i\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle ke_i\rangle_{\times_A}$. Так как обратное включение очевидно, то

$$\langle ke_i\rangle_{\times_A} = \langle ke_i\rangle_{\mathrm{AI}} = A^{\mathrm{o}}\big(H(ke_i)\big) \tag{54}$$

по лемме 5.

Пусть $g \in A$ и $g = k_1e_{i_1} + \ldots + k_ne_{i_n} + d$ для некоторых $i_s \in I_m$, $k_s \in \mathbb{Z}$ $(s = 1, \ldots, n)$ и $d \in D$. Докажем индукцией по n, что $\langle g\rangle_{\times_A}$ — абсолютный идеал группы A.

Пусть $n = 1$. Тогда $g = k_1e_{i_1} + d$, где $k_1 \in \mathbb{Z}$, $d \in D$. Так как

$$g \times e_{i_0} = k_1(e_{i_1} \times e_{i_0}) + (d \times e_{i_1}) = k_1e_{i_0},$$

то $k_1e_{i_0} \in \langle g\rangle_{\times_A}$, и поэтому

$$G^{\mathrm{o}}\big(H(k_1e_{i_0})\big) = \langle k_1e_{i_0}\rangle_{\times_A} \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}$$

по (54). Так как $H(k_1e_{i_0}) = H(k_1e_{i_1}) = H(g - d) = H(g)$, то

$$G^{\mathrm{o}}\big(\bar H(g)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(H(g)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(H(k_1e_{i_0})\big) \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}.$$

По лемме 7 имеем $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar H(g)\big)$. Следовательно, $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g\rangle_{\times_A}$. Так как обратное включение очевидно, то $\langle g\rangle_{\times_A} = \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$ — абсолютный идеал группы A.

Предположим, что утверждение верно для любого натурального числа, меньшего n, и пусть $g = k_1e_{i_1} + \ldots + k_ne_{i_n} + d$, где $i_s \in I_m$, $k_s \in \mathbb{Z}$, $d \in D$. Так как $n \geqslant 2$, то существует $s \in 1, \ldots, n$, такой что $i_s \neq i_0$. Не теряя общности, можно считать, что $s = n$. Тогда $e_{i_n} \times_A e_{i_t} = e_{i_t}$ для всех $t = 1, \ldots, n-1$ и $e_{i_n} \times_A e_{i_n} = 0$. Следовательно,

$$e_{i_n} \times g = \sum_{t=1}^{n} k_t(e_{i_n} \times_A e_{i_t}) + (e_{i_n} \times_A d) = \sum_{t=1}^{n-1} k_te_{i_t}.$$

Тогда
$$\left\langle \sum_{t=1}^{n-1} k_t e_{i_t} \right\rangle_{\times_A} \subseteq \langle g \rangle_{\times_A}.$$
Кроме того,
$$k_n e_{i_n} + d = g - \sum_{t=1}^{n-1} k_t e_{i_t} \in \langle g \rangle_{\times_A}.$$
Поэтому
$$\left\langle \sum_{t=1}^{n-1} k_t e_{i_t} \right\rangle_{\times_A} + \langle k_n e_{i_n} + d \rangle_{\times_A} \subseteq \langle g \rangle_{\times_A}.$$
Так как
$$g = \sum_{t=1}^{n-1} k_t e_{i_t} + k_n e_{i_n} + d,$$
то, очевидно,
$$\langle g \rangle_{\times_A} \subseteq \left\langle \sum_{t=1}^{n-1} k_t e_{i_t} \right\rangle_{\times_A} + \langle k_n e_{i_n} + d \rangle_{\times_A}.$$
Следовательно,
$$\langle g \rangle_{\times_A} = \left\langle \sum_{t=1}^{n-1} k_t e_{i_t} \right\rangle_{\times_A} + \langle k_n e_{i_n} + d \rangle_{\times_A}.$$
По предположению индукции $\left\langle \sum\limits_{t=1}^{n-1} k_t e_{i_t} \right\rangle_{\times_A}$ и $\langle k_n e_{i_n} + d \rangle_{\times_A}$ — абсолютные идеалы группы A. Следовательно, $\langle g \rangle_{\times_A}$ — абсолютный идеал группы A.

Таким образом, кольцо $(A, \times_A)$ удовлетворяет условию 1) леммы 15. Второе и третье условия вытекают непосредственно из построения умножения $\times_A$. Следовательно, по лемме 15 группа G является RAI-группой. □

Рассмотрим теперь периодические RAI-группы с неограниченными базисными подгруппами.

Лемма 18. *Пусть G — p-группа, B — её p-базисная подгруппа. Тогда $G[p^n] \cong (G/B)[p^n] \oplus B[p^n]$ для любого натурального числа n.*

Доказательство. Докажем, что $B[p^n]$ выделяется прямым слагаемым в группе $G[p^n]$. Пусть $0 \neq p^k g \in B[p^n]$. Так как подгруппа B сервантна в G, то существует элемент $b_1 \in B$, такой что $p^k b_1 = p^k g$. С другой стороны, так как $p^k g \neq 0$, то $k < n$. Тогда $p^n b_1 = p^{n-k}(p^k b_1) = p^{n-k}(p^k g) = p^n g = 0$. Следовательно, $b_1 \in G[p^n]$, откуда получаем, что $b_1 \in B \cap G[p^n] = B[p^n]$. Следовательно, подгруппа $B[p^n]$ сервантна в группе $G[p^n]$. Так как $B[p^n]$ ограниченная, то по [3, теорема 27.5] $B[p^n]$ выделяется прямым слагаемым в $G[n]$, т. е.
$$G[p^n] \cong B[p^n] \oplus G[p^n]/B[p^n]. \tag{55}$$

Рассмотрим отображение $\varphi\colon G[p^n] \to (G/B)[p^n]$, при котором $\varphi(g) = g + B$. Легко убедиться, что φ — гомоморфизм и $\operatorname{Ker}\varphi = B[p^n]$. Докажем, что $\operatorname{Im}\varphi = (G/B)[p^n]$. Пусть $g + B \in (G/B)[p^n]$. Тогда $p^n g \in B$. Так как B сервантна в группе G, то существует элемент $b \in B$, такой что $p^n b = p^n g$. Тогда $p^n(g - b) = 0$. Пусть $a = g - b$. Тогда $a \in G[p^n]$ и $\varphi(a) = a + B = g + B$. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi = (G/B)[p^n]$. Таким образом,

$$G[p^n]/B[p^n] \cong (G/B)[p^n]. \tag{56}$$

Из (55) и (56) следует, что $G[p^n] \cong (G/B)[p^n] \oplus B[p^n]$. □

Лемма 19. *Пусть G — p-группа и её p-базисная подгруппа $B = \bigoplus_{i\in I}\langle e_i\rangle$ неограниченная. Пусть $B_n^* = \bigoplus_{\mathrm{o}(e_i)\geqslant p^n}\langle e_i\rangle$. Тогда если группа G является RAI-группой, то $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа n.*

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i}$ $(i \in I)$. Так как группа B неограниченная, то существует индекс $i \in I$, такой что $m_i \geqslant n$. Так как G — RAI-группа, то существует кольцо $(G, \times)$ на группе G, в котором любой идеал является абсолютным. Рассмотрим подгруппу

$$A = \langle e_i,\, G \times G\rangle = \langle e_i,\, e_s \times e_t \mid s, t \in I\rangle.$$

Легко убедиться, что A — идеал кольца $(G, \times)$. Следовательно, A является абсолютным идеалом группы G, и поэтому, $\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq A$. Так как $\langle e_i\rangle_{\mathrm{AI}} = G[p^{m_i}]$ по лемме 5, то

$$\mathrm{r}(A/G[p^{m_i-1}]) \geqslant \mathrm{r}(G[p^{m_i}]/G[p^{m_i-1}]). \tag{57}$$

Пусть $I_i = \{t \in I \mid \mathrm{o}(e_t) \geqslant p^{m_i}\}$. Тогда

$$A/G[p^{m_i-1}] = \langle e_i + G[p^{m_i-1}],\, e_s \times e_t + G[p^{m_i-1}] \mid s, t \in I_i\rangle.$$

Поэтому $\mathrm{r}(A/G[p^{m_i-1}]) \leqslant 1 + |I_i|^2$. Так как группа B неограниченная, то множество I_i бесконечно. Поэтому $1 + |I_i|^2 = |I_i|$. Следовательно,

$$\mathrm{r}(A/G[p^{m_i-1}]) \leqslant |I_i|. \tag{58}$$

Из леммы 18 следует, что $G[p^{m_i}] = B[p^{m_i}] \oplus D[p^{m_i}]$ для некоторой подгруппы $D \cong G/B \cong \bigoplus_J \mathbb{Z}(p^\infty)$, так как группа G/B — делимая p-группа. Поэтому $D[p^m] = \bigoplus_{j\in J}\langle d_j\rangle$ для некоторых элементов $d_j \in D[p^m]$. Так как

$$B[p^{m_i}] = \Bigl(\bigoplus_{t\in I_i}\langle p^{m_t-m_i}e_t\rangle\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\mathrm{o}(e_t)<p^{m_i}}\langle e_t\rangle\Bigr),$$

то

$$G[p^{m_i}] = \Bigl(\bigoplus_{t\in I_i}\langle p^{m_t-m_i}e_t\rangle\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{\mathrm{o}(e_t)<p^{m_i}}\langle e_t\rangle\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{j\in J}\langle d_j\rangle\Bigr). \tag{59}$$

Следовательно,

$$G[p^{m_i}]/G[p^{m_i-1}] = \Bigl(\bigoplus_{t\in I_i}\langle p^{m_t-m_i}e_t\rangle/\langle p^{m_t-m_i+1}e_t\rangle\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{j\in J}\langle d_j\rangle/\langle pd_j\rangle\Bigr).$$

Поэтому
$$\mathrm{r}(G[p^{m_i}]/G[p^{m_i-1}]) \geqslant |I_i| + |J|. \qquad (60)$$
Из (57), (58) и (60) следует, что $|I_i| \geqslant |J|$. Так как множество I_i бесконечно, то $|I_i| \geqslant \aleph_0 \cdot |J| = |G/B|$. Так как $B_m^* = \bigoplus_{i\in I_m} \langle e_i\rangle$, то $|B_m^*| = |I_m|$. Следовательно, $|G/B| \leqslant |B_{m_i}^*|$. Так как $m_i \geqslant n$, то $B_{m_i}^* \subseteq B_n^*$, и поэтому $|B_{m_i}^*| \leqslant |B_n^*|$. Следовательно, $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. □

Пусть базисная подгруппа $B = \bigoplus_{i\in I}\langle e_i\rangle$ группы G неограниченная, $\mathrm{o}(e_i) = p^{m_i}$. В терминах предыдущей теоремы пусть, наоборот, $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Для $i \in I$ обозначим $I_i' = \{t \in I \mid \mathrm{o}(e_t) > p^{m_i}\}$. Так как группа B неограниченная, то
$$|I_i'| = |\{t \in I \mid \mathrm{o}(e_t) \geqslant p^{m_i+1}\}| = |B_{m_i+1}^*| \geqslant |G/B|$$
по условию. Так как $G/B \cong \bigoplus_J \mathbb{Z}(p^\infty)$, то $|G/B| \geqslant |J|$. Следовательно, $|I_i'| \geqslant |J|$, и так как множество I_i' бесконечно, то $|I_i' \cup J| = |I_i'|$. Поэтому для каждого индекса $i \in I$ существует сюръективное отображение
$$f_i\colon \{e_t \mid t \in I_i'\} \to \{d_j \mid j \in J\} \cup \{p^{m_t-m_i}e_t \mid t \in I_i'\},$$
где $\bigoplus_{j\in J}\langle d_j\rangle = D[p^m]$. Определим умножение $\bar{\times}$ на группе G, положив
$$e_i \mathbin{\bar{\times}} e_t = \begin{cases} 0, & \text{если } t = i,\\ e_t, & \text{если } m_t \leqslant m_i \text{ и } t \neq i,\\ f_i(e_t), & \text{если } m_t > m_i. \end{cases}$$

Лемма 20. *$\langle e_i\rangle_{\bar{\times}} = G[p^{m_i}]$ для всех $i \in I$.*

Доказательство. По построению умножения $\bar{\times}$ при умножении элемента e_i справа на базисные элементы e_t $(t \in I)$ группы G получаются все порождающие группы $G[p^{m_i}]$, которую согласно (59) можно представить в виде
$$G[p^{m_i}] = \Bigl(\bigoplus_{m_t\leqslant m_i}\langle e_t\rangle\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{t\in I_i'}\langle p^{m_t-m_i}e_t\rangle\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{j\in J}\langle d_j\rangle\Bigr).$$
Отсюда следует, что $G[p^{m_i}] \subseteq \langle e_i\rangle_{\bar{\times}}$. С другой стороны, так как подгруппа $G[p^{m_i}]$ — идеал кольца $(G, \bar{\times})$ и $e_i \in G[p^{m_i}]$, то $\langle e_i\rangle_{\bar{\times}} \subseteq G[p^{m_i}]$. Следовательно, $\langle e_i\rangle_{\bar{\times}} = G[p^{m_i}]$ □

Лемма 21. *Пусть A — идеал кольца $(G, \bar{\times})$. Если $\sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} \in A$, то $k_s e_{i_s} \in A$ для всех $s = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Допустим теперь, что утверждение верно для $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\sum_{s=1}^{n+1} k_s e_{i_s} \in A$. Не теряя общности, можно считать, что
$$\mathrm{o}(e_{i_1}) \leqslant \mathrm{o}(e_{i_2}) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{o}(e_{i_{n+1}}).$$

Тогда

$$A \ni e_{i_{n+1}} \mathbin{\bar{\times}} \sum_{s=1}^{n+1} k_s e_{i_s} = \sum_{s=1}^{n+1} k_s (e_{i_{n+1}} \mathbin{\bar{\times}} e_{i_s}) = \sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s}.$$

По предположению индукции $k_s e_{i_s} \in A$ для каждого $s = 1, \ldots, n$. Кроме того,

$$k_{n+1} e_{i_{n+1}} = \sum_{s=1}^{n+1} k_s e_{i_s} - \sum_{s=1}^{n} k_s e_{i_s} \in A. \qquad \square$$

Следствие 22. *Пусть $b \in B$. Тогда $\langle b \rangle_{\bar{\times}} = \langle b \rangle_{\mathrm{AI}} = G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big)$.*

Доказательство. Пусть $b = \sum\limits_{i \in J} k_i e_i$ $(J \subseteq I)$. Тогда из леммы 21 следует, что $k_i e_i \in \langle b \rangle_{\bar{\times}}$ для всех $i \in J$. Поэтому $\langle k_i e_i \rangle_{\bar{\times}} \subseteq \langle b \rangle_{\bar{\times}}$ для всех $i \in J$, значит, $\sum\limits_{i \in J} \langle k_i e_i \rangle_{\bar{\times}} \subseteq \langle b \rangle_{\bar{\times}}$. Так как обратное включение очевидно, то $\langle b \rangle_{\bar{\times}} = \sum\limits_{i \in J} \langle k_i e_i \rangle_{\bar{\times}}$. Из леммы 20 следует, что $\langle k_i e_i \rangle_{\bar{\times}} = k_i \langle e_i \rangle_{\bar{\times}} = k_i G[p^{m_i}]$ — абсолютный идеал группы G. Поэтому $\langle b \rangle_{\bar{\times}}$ является абсолютным идеалом группы G и, значит, содержит $\langle b \rangle_{\mathrm{AI}}$. Обратное включение $\langle b \rangle_{\bar{\times}} \subseteq \langle b \rangle_{\mathrm{AI}}$ очевидно. Следовательно, $\langle b \rangle_{\bar{\times}} = \langle b \rangle_{\mathrm{AI}} = G^{\mathrm{o}}\big(H(b)\big)$ по лемме 5. $\square$

Лемма 23. *Пусть A — идеал кольца $(G, \bar{\times})$. Пусть $\xi \in I$ и J — некоторое конечное подмножество множества I, такое что $p^{m_i} = \mathrm{o}(e_i) \leqslant \mathrm{o}(e_\xi) = p^{m_\xi}$ для всех $i \in J$. Тогда если $p^{m_\xi} \mid a - \sum\limits_{i \in J} k_i e_i$ для некоторого элемента $a \in A$, то $k_i e_i \in A$ для всех $i \in I \setminus \{\xi\}$.*

Доказательство. Так как $p^{m_\xi} \mid a - \sum\limits_{i \in J} k_i e_i$, то $e_\xi \mathbin{\bar{\times}} \Big(a - \sum\limits_{i \in J} k_i e_i\Big) = 0$. Тогда

$$e_\xi \mathbin{\bar{\times}} a = e_\xi \mathbin{\bar{\times}} \sum_{i \in J} k_i e_i = \sum_{i \in J} k_i (e_\xi \mathbin{\bar{\times}} e_i) = \sum_{i \in I \setminus \{\xi\}} k_i e_i.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i \in I \setminus \{\xi\}} k_i e_i \in A$. По лемме 21 имеем, что $k_i e_i \in A$ для всех $i \in I \setminus \{\xi\}$. $\square$

Лемма 24. *Пусть A — идеал кольца $(G, \bar{\times})$. Если $0 \neq p k e_i \in pA$ $(k \in \mathbb{Z})$, то $k e_i \in A$ $(i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq p k e_i \in pA$. Тогда существует элемент $a \in A$, такой что $p k e_i = pa$. Следовательно, $p(a - k e_i) = 0$.

Пусть $h^*(a - k e_i) \geqslant \omega$. Тогда поскольку группа B неограниченная, то можно выбрать такой $\xi \in I \setminus \{i\}$, что $m_\xi \geqslant m_i$. Тогда $p^{m_\xi} \mid a - k e_i$. По лемме 23 имеем, что $k e_i \in A$.

Пусть теперь $h^*(a - k e_i) = \sigma_0 \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$H(a - k e_i) = (\sigma_0 \ \infty \ \infty \ \ldots).$$

Так как группа B неограниченная, то существует такой индекс ξ в I, что $\xi \neq i$ и $m_\xi \geqslant \max\{m_i, \sigma_0\}$. По лемме 6 существует элемент $b = \sum\limits_{j \in J} k_j e_j \in B$, такой что

$$p^{m_\xi} \mid (a - ke_i) - b = a - \left(ke_i + \sum_{j \in J} k_j e_j\right), \tag{61}$$

$$p^{m_\xi} \nmid k_j \quad \text{для всех} \quad j \in J, \tag{62}$$

$$pk_j e_j = 0 \quad \text{для всех} \quad j \in J,. \tag{63}$$

Из (63) следует, что $p^{m_j - 1} \mid k_j$, и поэтому согласно (62) $m_j - 1 < m_\xi$, т. е. $m_j \leqslant m_\xi$ для всех $j \in J$. Согласно выбору индекса ξ имеем, что

$$i \neq \xi \quad \text{и} \quad m_j \leqslant m_\xi \quad \text{для всех} \quad j \in J \cup \{i\}. \tag{64}$$

Если $i \notin J$, то из (61), (64) следует, что $ke_i \in A$ по лемме 23. Если $i \in J$, то из (61), (64) следует, что $(k + k_i)e_i \in A$ по лемме 23. Тогда пусть $k = p^r v$, $k_i = p^{r_i} v_i$, где $(v, p) = (v_i, p) = 1$. Из условия $p^{r+1} v e_i = pke_i \neq 0$ и из (63) выводим, что $p^{r_i + 1} v_i e_i = 0$. Поэтому $r < r_i$. Следовательно, $A \ni (k + k_i)e_\xi = (v + p^{r_i - r} v_i) p^r e_i$. Так как $(v + p^{r_i - r} v_p, p) = (v, p) = 1$, то $p^r e_i \in A$. Следовательно, $ke_i = p^r v e_i \in A$. ☐

Лемма 25. *Пусть G — p-группа и её базисная подгруппа B неограниченная. Пусть $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа $n \in \mathbb{N}$. Тогда G является RAI-группой.*

Доказательство. Пусть $(G, \bar{\times})$ — кольцо, определённое перед леммой 20. Покажем, что любой идеал кольца $(G, \bar{\times})$ является абсолютным идеалом группы G. Согласно предложению 2 достаточно доказать, что $\langle g \rangle_\times = \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$ для любого элемента $g \in G$. Пусть g — произвольный элемент группы G. Если $h^*(g) \geqslant \omega$, то $g \times a = a \times g = 0$ для всякого элемента $a \in G$ в любом кольце $(G, \times)$ на группе G. Поэтому $\langle g \rangle_{\bar{\times}} = \langle g \rangle = \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$.

Пусть теперь $h^*(g) \in \mathbb{Z}$, и пусть

$$H(g) = (\sigma_0 \ \sigma_1 \ \ldots \ \sigma_n \ \sigma_{n+1} \ \ldots),$$

где $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_{n+1} \geqslant \omega$. Докажем индукцией по n, что $\langle g \rangle_{\bar{\times}} = \langle g \rangle_{\mathrm{AI}}$.

Пусть $n = 0$. Тогда $\sigma_0 \in \mathbb{Z}$ и $\sigma_s \geqslant \omega$ для всех $s \geqslant 1$. Пусть элемент $\xi \in I$ такой, что

$$p^{m_\xi} = \mathrm{o}(e_\xi) > p^{\sigma_0 + 1}. \tag{65}$$

По лемме 6 существует элемент $b = \sum\limits_{i \in J} k_i e_i \in B$, такой что

$$p^{m_\xi} \mid g - b = g - \sum_{i \in J} k_i e_i, \tag{66}$$

$$H(b) = (\sigma_0 \ \infty \ \ldots), \tag{67}$$

$$p^{m_\xi} \nmid k_i \quad \text{для всех} \quad i \in J, \tag{68}$$

$$pk_i e_i = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in J. \tag{69}$$

Из (69) следует, что $p^{m_i-1} \mid k_i$, и поэтому $m_i - 1 < m_\xi$ согласно (68), т. е. $m_i \leqslant m_\xi$ для всех $i \in J$. Поэтому согласно лемме 23, учитывая (66), получаем, что

$$k_i e_i \in \langle g\rangle_{\bar{\times}} \quad \text{для всех} \quad i \in J \setminus \{\xi\}. \tag{70}$$

Так как $b = \sum\limits_{j\in J} k_j e_j$, то согласно (67) существует индекс $i_0 \in J$, такой что $\mathrm{h}(k_{i_0}e_{i_0}) = \sigma_0$. Из (69) следует, что $pk_{i_0}e_{i_0} = 0$. Поэтому

$$H(k_{i_0}e_{i_0}) = (\sigma_0\ \infty\ \ldots) = \bar{H}(g) \tag{71}$$

и, кроме того, $\sigma_0 = \mathrm{h}(k_{i_0}e_{i_0}) = m_{i_0} - 1$, где $p^{m_{i_0}} = \mathrm{o}(e_{i_0})$. Следовательно, $m_{i_0} = \sigma_0 + 1 < m_\xi$ согласно (65). Тогда $i_0 \neq \xi$. Поэтому из (70) следует, что $k_{i_0}e_{i_0} \in \langle g\rangle_{\bar{\times}}$. Тогда по следствию 22, учитывая (71), имеем, что

$$G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(H(k_{i_0}e_{i_0})\big) = \langle k_{i_0}e_{i_0}\rangle_{\bar{\times}} \subseteq \langle g\rangle_{\bar{\times}}.$$

По лемме 7 имеем, что $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle g\rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(g)\big)$. Поэтому $\langle g\rangle_{\mathrm{AI}} \subseteq \langle g\rangle_{\bar{\times}}$. Так как обратное включение очевидно, то $\langle g\rangle_{\bar{\times}} = \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$.

Предположим, что $\langle g\rangle_{\bar{\times}} = \langle g\rangle_{\mathrm{AI}}$, если $H(g) = (\sigma_0\ \ldots\ \sigma_s\ \sigma_{s+1}\ \ldots)$ и $\sigma_{s+1} \geqslant \omega$, $s < n$. Пусть

$$H(g) = (\sigma_0\ \ldots\ \sigma_n\ \sigma_{n+1}\ \ldots),$$

где $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \mathbb{Z}$ и $\sigma_{n+1} \geqslant \omega$. Так как группа B неограниченная, то существует индекс $\xi \in I$, такой что $m_\xi > \sigma_n + 1$. По лемме 6 существует элемент $b = \sum\limits_{i\in J} k_i e_i \in B$, такой что

$$p^{m_\xi} \mid g - b, \tag{72}$$

$$H(b) = \bar{H}(g) = (\sigma_0\ \ldots\ \sigma_n\ \infty\ \infty\ \ldots),$$

$$p^{m_\xi} \nmid k_i, \quad p^{n+1}k_i e_i = 0 \ \text{ для всех } \ i \in J. \tag{73}$$

Тогда

$$H(pg) = (\sigma_1\ \ldots\ \sigma_n\ \sigma_{n+1}\ \ldots),$$
$$H(pb) = \bar{H}(pg) = (\sigma_1\ \ldots\ \sigma_n\ \infty\ \infty\ \ldots).$$

Согласно предположению индукции из леммы 7 получаем, что $\langle pg\rangle_{\bar{\times}} = \langle pg\rangle_{\mathrm{AI}} = \langle pg\rangle + G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(pg)\big)$. Следовательно,

$$\sum_{i\in J} pk_i e_i = pb \in G^{\mathrm{o}}\big(H(pb)\big) = G^{\mathrm{o}}\big(\bar{H}(pg)\big) \subseteq \langle pg\rangle_{\bar{\times}} = p\langle g\rangle_{\bar{\times}}.$$

По лемме 21 имеем, что $pk_i e_i \in p\langle g\rangle_{\bar{\times}}$ для каждого $i \in J$. Согласно лемме 24 получаем, что

$$k_i e_i \in \langle g\rangle_{\bar{\times}}, \quad \text{если} \quad i \in J \quad \text{и} \quad pk_i e_i \neq 0. \tag{74}$$

Пусть $i \in J$ и $pk_i e_i = 0$. Тогда $p^{m_i-1} \mid k_i$, где $p^{m_i} = \mathrm{o}(e_i)$. Поэтому из (73) следует, что $m_i - 1 < m_\xi$, т. е.

$$m_i \leqslant m_\xi, \quad \text{если} \quad i \in J \quad \text{и} \quad pk_i e_i = 0. \tag{75}$$

Так как $b = \sum\limits_{i\in J} k_i e_i$, то из (72) следует, что

$$p^{m_\xi} \mid \Bigl(g - \sum_{pk_ie_i\neq 0} k_i e_i\Bigr) - \sum_{pk_ie_i=0} k_i e_i. \tag{76}$$

Из (74) следует, что $g - \sum\limits_{pk_ie_i\neq 0} k_i e_i \in \langle g\rangle_{\bar{\times}}$. Поэтому по лемме 23, учитывая (76) и (75), получаем, что

$$k_ie_i \in \langle g\rangle_{\bar{\times}}, \quad \text{если} \quad i \in J\setminus\{\xi\} \quad \text{и} \quad pk_ie_i = 0. \tag{77}$$

Если $\xi \notin \{i \in J \mid pk_ie_i = 0\}$, то из (74) и (77) следует, что $b \in \langle g\rangle_{\bar{\times}}$. Тогда по следствию 22 получаем, что

$$G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr) = G^{\mathrm{o}}\bigl(H(b)\bigr) = \langle b\rangle_{\bar{\times}} \subseteq \langle g\rangle_{\bar{\times}}.$$

Если $\xi \in \{i \in J \mid pk_ie_i = 0\}$, то из (74) и (77) следует, что $b - k_\xi e_\xi \in \langle g\rangle_{\bar{\times}}$. С учётом выбора индекса ξ имеем, что $m_\xi > \sigma_n + 1 \geqslant \sigma_0 + 1$. Кроме того, так как $pk_\xi e_\xi = 0$, то $\mathrm{h}(k_\xi e_\xi) = m_\xi - 1$. Поэтому

$$H(k_\xi e_\xi) = (m_\xi - 1\ \infty\ \infty\ \ldots) > (\sigma_0\ \ldots\ \sigma_{n+1}\ \infty\ \ldots) = H(b).$$

Следовательно, $H(b - k_\xi e_\xi) = H(b)$. Тогда из следствия 22 получаем, что

$$G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr) = G^{\mathrm{o}}\bigl(H(b)\bigr) = G^{\mathrm{o}}\bigl(H(b - k_\xi e_\xi)\bigr) = \langle b - k_\xi e_\xi\rangle_{\bar{\times}} \subseteq \langle g\rangle_{\bar{\times}}.$$

Таким образом, в любом случае $G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr) \subseteq \langle g\rangle_{\bar{\times}}$. Имеем, что $\langle g\rangle_{AI} = \langle g\rangle + G^{\mathrm{o}}\bigl(\bar{H}(g)\bigr)$ по лемме 7. Следовательно, $\langle g\rangle_{AI} \subseteq \langle g\rangle_{\bar{\times}}$. Так как обратное включение очевидно, то $\langle g\rangle_{AI} = \langle g\rangle_{\bar{\times}}$ для всех элементов $g \in G$. Следовательно, G является RAI-группой по предложению 2. $\square$

Леммы 19 и 25 вместе дают описание RAI-группы в классе p-примарных групп с неограниченными базисными подгруппами.

Теорема 26. *Пусть G — p-группа, $B = \bigoplus\limits_{i\in I}\langle e_I\rangle$ — её базисная подгруппа, $B_n^* = \bigoplus\limits_{\mathrm{o}(e_i)\geqslant p^n}\langle e_I\rangle$. Пусть B неограниченная. Группа G является RAI-группой тогда и только тогда, когда $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа n.*

Следствие 27.

1. *Редуцированная p-группа G является RAI-группой тогда и только тогда, когда $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа n.*
2. *Счётная редуцированная p-группа является RAI-группой.*

Доказательство. 1. Пусть G — редуцированная p-группа.

Если базисная подгруппа B группы G ограниченная, то $G = B \oplus D$, где $D \cong G/B$ — делимая часть группы G. Из редуцированности группы G следует, что $D = 0$, и поэтому $G = B$ — прямая сумма циклических p групп. Поэтому по предложению 13 группа G является RAI-группой. Таким образом, любая редуцированная группа с ограниченными базисными подгруппами является RAI-группой и для неё $|G/B| = 0 \leqslant |B_n^*|$ для всех n.

Если базисная подгруппа B неограниченная, то по теореме 26 группа G является RAI-группой тогда и только тогда, когда $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа n.

2. Пусть G — счётная редуцированная p-группа. Если её базисная подгруппа B ограниченная, то G является прямой суммой циклических p-групп. Тогда G — RAI-группа по предложению 13. Если подгруппа B неограниченная, то группа B_n^* счётная для любого натурального числа n. Так как группа G счётная, то $|G/B| \leqslant \aleph_0$. Следовательно, $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа n. По теореме 26 группа G — RAI-группа. □

В заключение приведём пример редуцированной p-группы, не являющейся RAI-группой. Пусть $B = \bigoplus\limits_{i\in I}\langle e_i\rangle$ — прямая сумма циклических p-групп, порядки p^{m_i} которых не ограничены в совокупности. Пусть G — периодическая часть группы $\bar{B} = \prod\limits_{i\in I}\langle e_i\rangle$. Группа B является базисной подгруппой группы G [2, следствие 33.3]. Ясно, что $|B| = |I|$. Так как $G[p] = \langle p^{m_i-1}e_i \mid i \in I\rangle$, то $|G[p]| = p^{|I|} > |I| = |B|$. Поэтому $|G| \geqslant |G[p]| > |B|$. Так как $|G| = |G/B| \cdot |B|$ и $|B| \geqslant \aleph_0$, то $|G| = \max\{|G/B|, |B|\}$. Следовательно, $|G/B| = |G| > |B| \geqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа n. Из теоремы 10 следует, что группа G не является RAI-группой.

Таким образом, соединив теоремы 16, 17 и 26, можно описать RAI-группы в классе p-групп.

Теорема. *Пусть G — p-группа, $B = \bigoplus\limits_{i\in I}\langle e_i\rangle$ — её базисная подгруппа и $B_n^* = \bigoplus\limits_{\mathrm{o}(e_i)\geqslant p^n}\langle e_i\rangle$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Если подгруппа B ограниченная и p^m — максимальный порядок элементов группы B, то группа G является RAI-группой тогда и только тогда, когда*
   $\mathrm{r}(G/B) \leqslant \mathrm{r}(B_m^*)(\mathrm{r}(B_m^*) - 1)$, *если* $\mathrm{r}(B_m^*) \in \mathbb{Z}$;
   $\mathrm{r}(G/B) \leqslant \mathrm{r}(B_m)$, *если* $\mathrm{r}(B_m^*) \geqslant \aleph_0$.
2. *Если базисная подгруппа B неограниченная, то группа G является RAI-группой тогда и только тогда, когда $|G/B| \leqslant |B_n^*|$ для любого натурального числа n.*

Эта теорема вместе с предложением 3 даёт описание RAI-групп в классе периодических групп.

Литература

[1] Компанцева Е. И. Кольца без кручения // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 95—143.

[2] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[4] Чехлов А. Р. Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. и мех. — 2009. — № 3. — С. 64—67.

[5] Fried E. On the subgroups of Abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. — P. 51—55.