

Локальные абелевы группы без кручения*

В. Х. ФАРУКШИН

Московский педагогический
государственный университет
e-mail: fvk@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа без кручения.

Аннотация

Для p -локальных абелевых групп без кручения конечного ранга получено представление в виде гомоморфизмов p -адических модулей конечного ранга с фиксированными базисами.

Abstract

V. Kh. Farukshin, Local Abelian torsion-free groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 147–152.

A representation for p -local Abelian torsion-free groups of finite rank is obtained in terms of homomorphisms of p -adic modules of finite rank with fixed basis.

В настоящее время есть несколько известных описаний абелевых групп без кручения конечного ранга (А. Г. Курош, М. Кампбелл, Г. Секереш, Д. Дерри, А. И. Мальцев и др.) В работе получено представление p -локальных абелевых групп без кручения конечного ранга в виде гомоморфизмов p -адических модулей данного ранга с фиксированным базисом.

Группа G называется p -локальной (p — простое число), если $qG = G$ для всякого простого $q \neq p$. Если обозначить через Z_p локализацию кольца целых чисел Z относительно простого p , то p -локальную группу будем называть Z_p -группой, так как она является естественным модулем над неполным кольцом дискретного нормирования Z_p . Обозначим через $\hat{Z}_p$ кольцо целых p -адических чисел, через $\hat{Q}_p$ — поле p -адических чисел. Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то $Z_p X = \bigoplus_{i=1}^n Z_p x_i$; $\langle X \rangle$ — Z_p -подгруппа Z_p -группы G ; $\langle X \rangle_*^G$ — сервантная подгруппа Z_p -группы G ; $[X]$ — столбец элементов $x_1, \dots, x_n$. Если Q — поле рациональных чисел, то $QG = Q \otimes_{Z_p} G$; $\hat{Z}_p G = \hat{Z}_p \otimes_{Z_p} G$. Группа G канонически вложена в p -адическое пополнение $\hat{G} = \hat{Z}_p X$, где $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — p -базис группы G . Ранг группы G ($r(G)$) — это Q -размерность пространства QG , p -ранг группы G

*Работа поддержана грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы, государственный контракт № 14.В37.21.0363.

$(r_p(G))$ — это F_p -размерность пространства G/pG , где F_p — поле из p -элементов. Остальные понятия и обозначения можно найти в [1, 3].

Показано, что Z_p -группа без кручения при выборе максимальной линейно независимой системы элементов $W = X \cup Y$ с p -базисом X однозначно определяет и однозначно определяется Z_p -модульным гомоморфизмом Φ свободного $\hat{Z}_p$ -модуля M ранга $r(M) = r(G) - r_p(G)$ в свободный $\hat{Z}_p$ -модуль N ранга $r(N) = r_p(G)$.

Везде, если не оговорено противное, группы являются абелевыми p -локальными без кручения конечного ранга.

Пусть p -локальная абелева группа без кручения G (далее Z_p -группа) имеет ранг $m + n$, где n — p -ранг группы G , и пусть $W = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$ — некоторая максимальная Q -независимая система элементов этой группы с p -базисом $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. При каноническом вложении группы G в качестве сервантной подгруппы в p -адическое пополнение $\hat{G} = \hat{Z}_p X$ элементы из $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ имеют единственное разложение по базису X группы $\hat{G}$:

$$y_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n,$$

где $i = \overline{1, m}$, $a_{ij} \in \hat{Z}_p$. В матричной форме $[Y] = A[X]$. Матрица A называется p -адической матрицей группы G относительно $W = X \cup Y$.

Определение 1 [2]. Строки (столбцы) p -адической матрицы A называются зависимыми по модулю Q , если существует их нетривиальная линейная комбинация с рациональными коэффициентами, являющаяся строкой (столбцом) с рациональными элементами. В противном случае будем называть их независимыми по модулю Q .

Заметим, что линейно зависимая по модулю Q система p -адических векторов может быть линейно независимой над полем Q .

Предложение 1 [2].

1. Каждая конечная система n -мерных p -адических векторов имеет максимальную независимую по модулю Q подсистему векторов.
2. Любые две максимальные независимые по модулю Q подсистемы векторов данной конечной системы p -адических векторов имеют одинаковое число векторов.
3. Максимальное число независимых по модулю Q строк (столбцов) p -адической матрицы A группы G не меняется при переходе к новой p -адической матрице A_1 группы G относительно новой максимальной линейно независимой системы элементов $W_1 = X_1 \cup Y_1$ с новым p -базисом X_1 группы G .

Определение 2. Строчечным (столбцовым) рангом группы G назовём максимальное число независимых по модулю Q строк (столбцов) любой p -адической матрицы группы G . Строчечный ранг группы G обозначим через $rr(G)$, а столбцовый ранг через $cr(G)$.

Определение 3 [3]. Группа называется редуцированной, если она не имеет ненулевых делимых подгрупп.

Определение 4 [6]. Группа называется коредуцированной, если она не имеет ненулевых свободных прямых слагаемых.

Определение 5 [2]. Назовём группу вполне редуцированной, если она редуцированная и коредуцированная.

Предложение 2 [2]. Для Z_p -группы без кручения G конечного ранга имеют место следующие утверждения.

1. $r(G) = r_p(G)$ тогда и только тогда, когда G — свободная Z_p -группа.
2. $r_p(G) = 0$ тогда и только тогда, когда G — делимая Z_p -группа.
3. $r(G) = r_p(G) + rr(G)$ тогда и только тогда, когда G — редуцированная Z_p -группа.
4. $r_p(G) = cr(G)$ тогда и только тогда, когда G — коредуцированная группа.
5. $r(G) = rr(G) + cr(G)$ тогда и только тогда, когда G — вполне редуцированная группа.
6. $rr(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $cr(G) = 0$, что эквивалентно тому, что $G = G_1 \oplus G_2$, где G_1 — свободная Z_p -группа, G_2 — делимая группа.
7. $r(R(G)) = r_p(G) + rr(G)$, где $R(G)$ — редуцированная часть группы G .

Рассмотрим свободный $\hat{Z}_p$ -модуль без кручения M ранга m с базисом $Y_1 = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m\}$, свободный $\hat{Z}_p$ -модуль N ранга n с базисом $X_1 = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ и определим отображение $\Phi: M \rightarrow N$ по правилу

$$[\Phi(Y_1)] = A \cdot [X_1], \quad (*)$$

где A — p -адическая матрица группы G относительно $W = X \cup Y$. Φ единственным образом продолжается до $\hat{Z}_p$ -гомоморфизма $\Phi: M \rightarrow N$. Определим Z_p -группу без кручения G_Φ следующим образом:

$$G_\Phi = Q \widetilde{\text{Ker } \Phi} \oplus \langle \Phi(Z_p Y_1) + Z_p X_1 \rangle_*^N,$$

где $\widetilde{\text{Ker } \Phi} = \{m \in Z_p Y_1 \mid \Phi(m) \in Z_p X_1\}$, $Q \widetilde{\text{Ker } \Phi} = Q \otimes_{Z_p} \widetilde{\text{Ker } \Phi}$.

Предложение 3. Для Z_p -группы без кручения G с p -адической матрицей A относительно $W = X \cup Y$ следующие условия эквивалентны:

- а) $\widetilde{\text{Ker } \Phi} \neq 0$;
- б) G не является редуцированной;
- в) $rr(G) + r_p(G) < r(G)$.

Доказательство. Эквивалентность б) $\iff$ в) доказана в [2, предложение 1.2 с)]. Условие в) эквивалентно тому, что строки p -адической матрицы A зависимы по модулю Q .

Докажем импликацию в) $\implies$ а). Если $\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$ — нетривиальная линейная комбинация строк A_i матрицы A , дающая рациональную строку, то

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi(\bar{y}_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ij}\right) \bar{x}_j \in Z_p X_1.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i \neq 0,$$

то $\widetilde{\text{Ker}} \Phi \neq 0$.

Докажем импликацию а) $\implies$ в). Пусть $y' \in Z_p Y_1$, $y' \neq 0$ и $\Phi(y') \in Z_p X_1$. Тогда

$$y' = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i.$$

Поэтому

$$\Phi(y') = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi(\bar{y}_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ij} \right) \bar{x}_j \in Z_p X_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{ij} \in Z_p$$

для каждого j , т. е. строки матрицы A зависимы по модулю Q . $\square$

Теорема 1. Любой гомоморфизм Φ свободного $\hat{Z}_p$ -модуля без кручения M ранга m с базисом Y_1 в свободный $\hat{Z}_p$ -модуль без кручения N ранга n с базисом X_1 однозначно определяет Z_p -группу без кручения G_Φ ранга $m+n$ p -ранга n :

$$G_\Phi = Q \widetilde{\text{Ker}} \Phi \oplus \langle \Phi(Z_p Y_1) + Z_p X_1 \rangle_*^N,$$

где $\widetilde{\text{Ker}} \Phi = \{m \in Z_p Y_1 \mid \Phi(m) \in Z_p X_1\}$.

Любая Z_p -группа без кручения G ранга $m+n$ p -ранга n с максимальной линейно независимой системой $W = X \cup Y$ и p -базисом X однозначно определяет $\hat{Z}_p$ -модульный гомоморфизм Φ свободного $\hat{Z}_p$ -модуля без кручения M ранга m с базисом Y_1 в свободный $\hat{Z}_p$ -модуль без кручения N ранга n с базисом X_1 , при котором группа G изоморфна группе G_Φ , определённой выше.

Доказательство. Если $\Phi: M \rightarrow N$ — гомоморфизм $\hat{Z}_p$ -модулей, заданный равенством (*), то по определению G_Φ — Z_p -группа без кручения, причём

$$\text{r}_p(G_\Phi) = \text{r}_p(\langle \Phi(Z_p Y_1) + Z_p X_1 \rangle_*^N) = |X_1| = n, \quad \text{r}(G_\Phi) = \text{r}(N) + \text{r}(M) = n + m.$$

Пусть G — произвольная Z_p -группа без кручения ранга $m+n$ с $W = X \cup Y$ и p -базисом X , содержащим n элементов, и p -адической матрицей A относительно W , $[Y] = A \cdot [X]$. Для свободных $\hat{Z}_p$ -модулей $M = \hat{Z}_p Y_1$ и $N = \hat{Z}_p X_1$ рангов m и n соответственно определим гомоморфизм $\Phi: M \rightarrow N$ по (*). Этот гомоморфизм определяет Z_p -группу без кручения $G_\Phi = Q \widetilde{\text{Ker}} \Phi \oplus \langle \Phi(Z_p Y_1) + Z_p X_1 \rangle_*^N$. Редуцированные части групп G и G_Φ изоморфны:

$$R(G) = \langle Y, X \rangle_*^{\hat{G}} \cong \langle \Phi(Y_1), X_1 \rangle_*^N = \langle \Phi(Z_p Y_1) + Z_p X_1 \rangle_*^N = R(G_\Phi).$$

По пункту 3 предложения 1 $\text{gr}(G)$ является инвариантом группы G , следовательно, $\text{r}(G) - \text{r}_p(G) - \text{gr}(G)$ также инвариант и согласно пункту 7 предложения 2 это ранг делимой части группы G . Так как $R(G) \cong R(G_\Phi)$, то

$$\text{r}(R(G)) = \text{r}(R(G_\Phi)) = \text{r}_p(G_\Phi) + \text{gr}(G_\Phi).$$

Так как $\text{r}(G) = \text{r}(G_\Phi)$, то

$$\text{r}(D(G)) = \text{r}(G) - \text{r}_p(G) - \text{gr}(G) = \text{r}(G_\Phi) - \text{r}_p(G_\Phi) - \text{gr}(G_\Phi) = \text{r}(Q \widetilde{\text{Ker}} \Phi).$$

Следовательно, $D(G) \cong Q \widetilde{\text{Ker}} \Phi$. В итоге $G \cong G_\Phi$. $\square$

Определение 6. Для системы элементов $Y \subset \hat{Z}_p X$ минимальную подсистему X_1 в X ($X_1 \subset X$) назовём p -адическим базисом, если $\hat{Z}_p Y \subset \hat{Z}_p X_1$.

Следствие 1. Для Z_p -группы G_Φ как в теореме 1 имеем прямое разложение

$$G_\Phi = Q \widetilde{\text{Ker}} \Phi \oplus \langle \Phi(Z_p Y_1) + Z_p X_1 \rangle_*^N \oplus Z_p X_2,$$

где $X_1 \cup X_2 = X$, X_1 — p -адический базис для Y_1 в $\hat{Z}_p X_1$.

Предложение 4. Для Z_p -группы без кручения G с p -адической матрицей A относительно $W = X \cup Y$ с p -базисом X следующие условия эквивалентны:

- а) G — коредуцированная группа;
- б) X является p -адическим базисом для $Y \subset \hat{Z}_p X = \hat{G}$;
- в) $\text{r}_p(G) = \text{sr}(G)$;
- г) столбцы A независимы по модулю Q .

Доказательство. Эквивалентность а) $\iff$ в) доказана в [2, предложение 3.3] (пункт 4 предложения 2).

Докажем эквивалентность а) $\iff$ б). По теореме 1 $G \cong G_\Phi$. По следствию 1 G_Φ — коредуцированная группа тогда и только тогда, когда $X_2 \neq \emptyset$, а последнее равносильно тому, что p -адический базис элементов Y_1 равен $X_1 = X$.

Докажем в) $\iff$ г). Количество столбцов в A равно $\text{r}_p(G)$, все они независимы по модулю Q тогда и только тогда, когда $\text{r}_p(G) = \text{sr}(G)$. $\square$

Следствие 2. Z_p -группа без кручения G является вполне редуцированной в том и только том случае, когда строки и столбцы p -адической матрицы A группы G относительно любой максимальной линейно независимой системы $W = X \cup Y$ с p -базисом X независимы по модулю Q .

Доказательство. Утверждение следует из пунктов 5 и 4 предложения 2 и предложений 3 и 4. Вполне редуцированность группы G эквивалентна условию $\text{r}(G) = \text{gr}(G) + \text{sr}(G)$. $\square$

Следствие 3. Для Z_p -группы без кручения G имеют место следующие утверждения.

1. Группа G делима в том и только том случае, когда $\hat{Z}_p$ -модуль N в определении группы $G_\Phi \cong G$ равен нулю.

2. Группа G является свободной Z_p -группой в том и только том случае, когда $\hat{Z}_p$ -модуль M в определении группы $G_\Phi \cong G$ равен нулю.
3. p -адическая матрица A группы G является нулевой в том и только том случае, когда Z_p -группа G не содержит вполне редуцированной части, т. е. G является прямой суммой свободной и делимой Z_p -групп.

Литература

- [1] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск, 2002.
- [2] Фарукшин В. Х. Эндоморфизмы редуцированных обобщённо примарных групп без кручения: Автореферат дис. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1986.
- [3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.
- [4] Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Trends in Mathematics. — Basel: Birkhäuser, 1999. — P. 87—100.
- [5] Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups // Abelian Groups, Rings and Modules. — Amer. Math. Soc., 2001. — (Contemp. Math.; Vol. 273). — P. 117—128.
- [6] Murley C. The classification of certain classes of torsion free Abelian groups // Pacific J. Math. — 1972. — Vol. 40. — P. 647—665.